МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ Задача

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+10)}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4)$$

Если $x=-10$, то $x^3-64x+200=-1000+640+200<0$, т.е. подкоренное выраж. меньше нуля, т.е. $x=-10$ – не является корнем, поэтому можно поделить на $(x+10)$

Получаем:

$$\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}}=x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64x+200=8(x-4)^2 \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-64x+200=8x^2-64x+128 \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-8x^2+72=0 \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x^2+2x-12)=0 \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x^2+2x-12=0 \end{array}\right. \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-1+\sqrt{13} \\ x=-1-\sqrt{13} \end{array}\right. \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=6, \text{ т.к. } \begin{array}{l} -1+\sqrt{13}<4 \quad /\sqrt{13}<5 \text{ – верно}/ \\ -1-\sqrt{13}<4 \quad /-\sqrt{13}<5 \text{ – верно}/ \end{array}$$

Ответ: $x=6$

④ Задача

$$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$$

При $x\geq -2$: $4x^4+x^2+4x-5x^2(x+2)+4\geq 0 \Leftrightarrow 4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0 \Leftrightarrow$

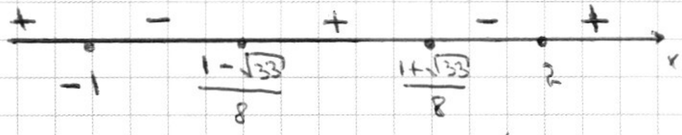
$\Leftrightarrow (x+1)(4x^3-9x^2+4)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(4x^2-x-2)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2})\geq 0 \Leftrightarrow$

/ Решим ур-ние: $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}}{2} \\ x=\dfrac{\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8} \end{array}\right.$ /

$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$

Заметим, что: $-1 < \frac{1-\sqrt{33}}{8} < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < 2$

Метод интервалов:



У нас $x \geq -2$, поэтому решением нер-ва будет: $x \in [-2;-1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup$
$\cup [2;+\infty)$

При $x<-2$:

$4x^4+x^2+4x+5x^2(x+2)+4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^4+5x^3+11x^2+4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x^4+6x^2+4x^3+4x+1+3x^4+3x^3+x^2+3x^3+3x^2+x+$

$+9x^2+9x+3-5x^3-8x^2-10x \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^4+(x^2+x+3)(3x^2+3x+1)-(5x^3+8x^2+10x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x^2+x+3)(3x^2+3x+1)-x(5x^2+8x+10) \geq 0$

Заметим, что $(x+1)^4 \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} x^2+x+3>0 \\ 3x^2+3x+1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2+x+3)(3x^2+3x+1)>0$

$\left.\begin{array}{l} -x>0 \text{ (у нас } x<-2) \\ 5x^2+8x+10>0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x(5x^2+8x+10)>0$

Поэтому: $(x+1)^4+(x^2+x+3)(3x^2+3x+1)-x(5x^2+8x+10) \geq 0$ - верно $\forall x \in (-\infty;-2)$

Объединив два ответа получаем:

Ответ: $(-\infty;-1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2;+\infty)$

(1) Задача

Заметим, что $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

В числе, произведение цифр которого равно $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, обязательно должны быть 2 цифры "7" иначе мы не получим нужного произведения цифр.

Аналогично поймем, что в этом числе должны быть две цифры "5"

Также в этом числе должны быть, либо 2 цифры "2", либо 1 цифра "4"

Мы уже получили, произведение равное 4900, след. оставшиеся цифры должны быть равны 1.

Теперь посчитаем кол-во восьмизначных чисел, в которых есть две "7"; две "5" и две "2" (остальные цифры это единицы). их:

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2^3} = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 2520$$

Теперь посчитаем кол-во восьмизначных чисел, в которых есть две "7"; две "5" и одна "4" (остальные цифры это единицы. их:

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2^2} = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$$

Тогда всего нужных нам чисел: $2520 + 1680 = 4200$

Ответ: 4200 чисел

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 Задача:

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

При $\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8\geq 0 \end{cases}$: $\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+16=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ (|x|-15)^2+8^2=a \end{cases}$

При $y=0$:

$\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8\geq 0 \end{cases}$: $-8\leq x\leq 8$

При $\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8<0 \end{cases}$: $\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ (|y|-8)^2+7^2=a \end{cases}$

При $x=8$:

$\begin{cases} y+x+8\geq 0 \\ y-x+8<0 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} y\geq 0 \\ y<-16 \end{cases}} \Leftrightarrow -16\leq y<0$

При $\begin{cases} y+x+8<0 \\ y-x+8\geq 0 \end{cases}$: $\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$

При $x=-8$

$\begin{cases} y+x+8<0 \\ y-x+8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ y\geq -16 \end{cases} \Leftrightarrow -16\leq y<0$

При $\begin{cases} y+x+8<0 \\ y-x+8<0 \end{cases}$: $|y+x+8|+|y-x+8|=16 \Leftrightarrow -2y-16=16 \Leftrightarrow y=-16$

При $y=-16$

$\begin{cases} y+x+8<0 \\ y-x+8<0 \end{cases} \Leftrightarrow -8<x<8$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получаем

$$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} y=0 \\ (|x|-15)^2+8^2=a \\ |x|\le 8 \end{cases} \\ ② \begin{cases} y=-16 \\ (|x|-15)^2+8^2=a \\ |x|\le 8 \end{cases} \\ ③ \begin{cases} x=8 \\ (|y|-8)^2+7^2=a \\ -16\le y<0 \end{cases} \\ ④ \begin{cases} x=-8 \\ (|y|-8)^2+7^2=a \\ -16\le y<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

если вторая система имеет хотя бы 1 корень, то и первая система имеет это корень (относительно $|x|$)

если $|x|\neq 0$, то мы получим более четырех корней $\begin{pmatrix} (x;0) & (x;-16) \\ (-x;0) & (-x;-16) \end{pmatrix}$ и возможно другие)

корень $|x|=0$, при $a=15^2+8^2=289$ очевидно, что при таком a больше не будет решений в 1ой и во 2ой системах ($|x|=0$, $|x|=30$ – не подходит)

Поймём, что не будут еще корни в 3 и 4 системах

Например в 3ей:

$$(|y|-8)^2+7^2=289 \Leftrightarrow y^2-16|y|-176=0 \Leftrightarrow |y|=8\pm\sqrt{8^2+176} \Leftrightarrow |y|=8+\sqrt{240}>16,$$
$$(8-\sqrt{8^2+176}<0)$$

поэтому решений не будет

Аналогично в 4ой системе

$a=289$ - подходит

если третья система имеет хотя бы 1 корень, то и четвертая система имеет это корень (относительно $|y|$)

если $|y|\neq 0$, то мы имеем более четырех корней: $(8;y)$ $(8;-y)$ $(-8;y)$ $(-8;-y)$ и возможно другие)

корень $|y|=0$, при $a=8^2+7^2=113$, но у нас $-16\le y<0$, след. не будет корней в 3ей и 4ой системах

Поймем, что будут еще корни в 1ой системе

$$(|x|-15)^2+8^2=113 \Leftrightarrow (|x|-15)^2=7^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|-15=7 \\ |x|-15=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=22 \\ |x|=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow |x|=8 \text{ - подходит}$$

т.е. будут еще корни $(8;0)$ $(-8;0)$

$a=113$ - подходит

Ответ: при $\left[\begin{array}{l} a=289 \\ a=113 \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$|x|=t \le 8$

$\cancel{t^2+8^2=a}$

$\boxed{(t-15)^2+8^2=a}$

$0\le t<8$

$t^2-30t+225+8^2=a$

$t^2-30t+289-a=0$

$a=289$ $\qquad t=15\pm\sqrt{15^2-(289-a)}$

$t=30$

$t=0$

$x=0$

$(0;-16)$

$0;0$

$t=15-\sqrt{15^2-(289-a)}$

$t=15-\sqrt{15^2-(289-a)}<8$

$\cancel{15^2-(289-a)<0}$

$\boxed{15^2-(289-a)\geq 0}$

$7^2+8^2=$

$=$

8

-8

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}64\\49\end{array}\\ \hline 113\end{array}$$

$15^2-(289-a)^2 \geq 0$

$a\geq 64$

$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ $\quad t=0$

$\begin{cases}x=0\\y=-16\end{cases}$

$a=289$

$y+x+8<0$

$y-x+8<0$:

$-2y-16=16$

$y=-16$

$x<8$

$x-8<0$

$t=$

$-x-8<0 \Leftrightarrow$

$-8<x<8$

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}225\\64\end{array}\\ \hline 289\end{array}$$

$t\ne 0$

$y+x+8-(y-x+8)=2x$

$2x=16$

$x=8$

$\sqrt{15^2-(289-a)}>7$

$15^2-(289-a)>49$

$a>\underbrace{289-49}_{240}-\underbrace{15^2}_{225}=15$

$289-225=64$

$a>15$

$a=15$

$15=\sqrt{15^2-(289-a)}$

$15 \qquad -(289-a)=0$

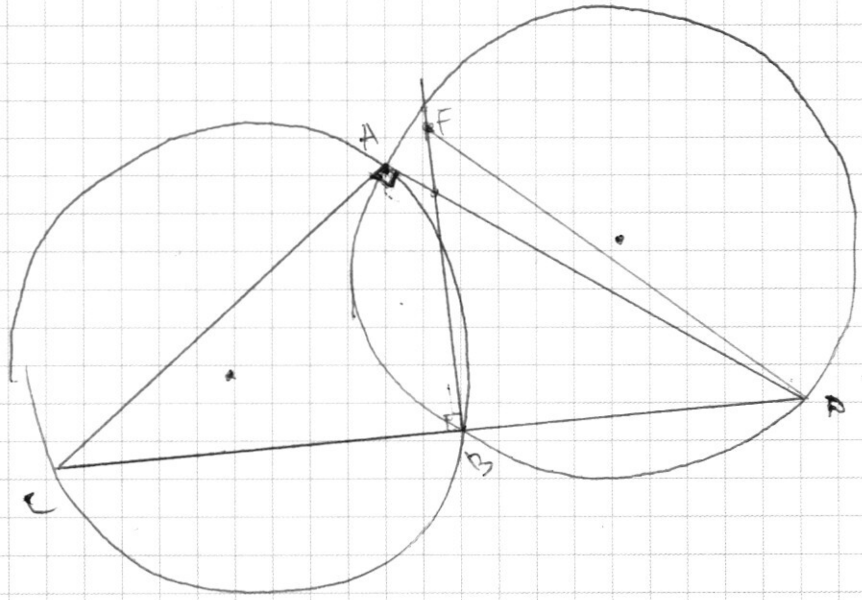
$a=289$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000} = S$

$b_1 + b_2 + 40b_3 + \ldots + 40b_{3000} = 5S$

$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \ldots + 3b_{3000} = ?$

$S + 39b_3 + 39b_6 + \ldots + 39b_{3000} = 5S$

$39b_3 + 39b_6 + \ldots + 39b_{3000} = 4S$

$= S + 2b_2 + 2b_4 + \ldots + 2b_{3000} =$

q^2

$39q^2 + 39q^5 + 39$

$= S + 2(b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000}) =$

$39b_1q\,(q + q^4 + q^7 + \ldots + q^{2998}) = 4S$

$= S + 2b_1\,(q + q^3 + \ldots + q^{2999})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

(x,y) (a,b) $(-x,y)$ $(-a,b)$

(x,y) $(-x,y)$

$(|x|-15)^2+8^2=113$

$(|x|-15)^2=7^2$

$|x|-15=7$ $|x|=22$

$|x|-15=-7$ $|x|=8$

$|x|=$

$a=-a$ $a=0$

$b=0$

$y=x$

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 & a=b^2 \\ \left(\frac{|x|+15}{b}\right)^2+\left(\frac{|y|-8}{b}\right)^2=1 \end{cases}$$

$\frac{\varphi z}{v}=$ $\frac{(\varphi+\pi)z}{v}$

$\frac{\varphi z}{2{,}5v}=\frac{(\varphi+\pi)z}{v}$

$2{,}5\varphi=(\varphi+\pi)z$

$-8\le x\le 8$

$\begin{cases} y+x\geq -8 \\ y-x\geq -8 \end{cases}$

$x\geq -8$

$x\le 8$

$=1{,}5\varphi=$

$2y+16=16 \Leftrightarrow y=0$

$\frac{3}{2}\varphi=\frac{5}{2}\pi$

$\varphi=\frac{5}{3}\pi$ ~~$(x-15)^2+8^2=a$~~

~~$x^2-30+225+8^2-a=0$~~

~~$|x|^2-30|x|+225+y^2-16|y|+64=a$~~

$2|y+8|=16$ $\left[\begin{array}{l} y=-16 \\ y=0 \end{array}\right.$

(x,y) $(x+8,y+8)$ $(-x,y)$

$$\begin{cases} y=0 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \\ -8\le x\le 8 \end{cases}$$

$|y+x|+|y-x|=16$

φ

$|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$y\geq -7$

$2|y+8|=16$ $|y+8|+|y+7|=16$

$y+8=8$

$y+8=-8$

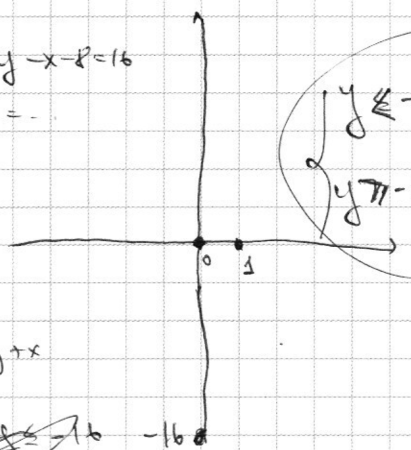
$2y+16$

$x=1$

$y-x+8+y-x-8=16$

$x=$

$$\begin{cases} y\le -(x+8) \\ y\geq -(8-x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} y\geq -(x+8) \\ y\geq -(8-x) \end{cases}$$

$-(x+8)\geq 0$

$x+8\le 0$

$y=0$

$2y+16=16$ $\begin{cases} x\le -8 \\ x\geq 8 \end{cases}$ $\varnothing$

$y=0$

$y+x+8-y+x$

$\begin{cases} y\le -16 \\ y\geq 0 \end{cases}$ -16

$$\begin{cases} y\geq -(x+8) \\ y\geq -(8-x) \end{cases}$$

$-(8-x)\geq 0$

$8-x\le 0$

$x\geq 8$

$y=0$

$-y-x-8+y-x+8=16$

$$\begin{cases} y\geq -(x+8) \\ y\le -(8-x) \end{cases}$$

$x=-8$

$y=0:\ -8\le x\le 8$

$\begin{cases} y\geq -16 \\ y<0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$4900 \quad 7\cdot7\cdot5\cdot5 \quad 2\cdot2$

$\begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases}$ $\quad y=0 \quad \begin{cases} x+8\geq 0 \\ -x+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -8 \leq x \leq 8$

$\begin{cases} (|x|-15)^2 + 8^2 = a \\ -8 \leq x \leq 8 \end{cases}$ $\quad 8\cdot7\cdot6\cdot5$

$\begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases}$: $x=8$. $\begin{cases} y \geq 16 \\ y<0 \end{cases}$: $\varnothing$ $\quad y+16 \geq 0 \quad y<0 \quad \begin{cases} y \geq -16 \\ y<0 \end{cases}$

$\begin{cases} y+x+8 < 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases}$: $x=-8 \quad y<0 \quad y \geq 16 \quad \varnothing$

$y<0$

$\begin{cases} y+x+8 < 0 \\ y-x+8 < 0 \end{cases}$: $y+16 \geq 0$ $\quad -2y = 32 \Leftrightarrow y=-16 \quad \begin{cases} x<8 \\ x>-8 \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq 8 \\ x \neq -8 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (|x|-15)^2 + 8^2 = a \\ -8 \leq x \leq 8 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} (|x|-15)^2 + 8^2 = a \\ -8 < x < 8 \\ y=-16 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-8 \end{array}\right.$ $\quad \boxed{a = 7^2+8^2}$ $\quad 49 + 64 = 113 \quad x \neq 0$

$12 \times 5 = 60 \quad 60 \times 6 = 360 \quad 360 \times 7 = 2520 \quad 0;0$

$|x| = t \quad 15^2+8^2 \quad (t-15)^2 = 15^2 \quad \begin{cases} t=0 \\ t=30 \end{cases}$

$t^2 - 30t + 225 + 8^2 - a = 0 \quad 225 + 8^2 - a = \quad a = 64$

$\cancel{D=0 \quad 900 - 4\cdot(225+8^2-a) = 0}$ $\quad (t-15)^2 = 0$

$-356 + 4a = 0 \quad a = \quad 8 + \sqrt{8^2+176} \leq 16$

$225 \times 4 = 1000 \quad 64 \times 4 = 256 \quad 356 : 4 = 89 \quad a = 89 \quad 64 - 89 = \quad 8 + \sqrt{8^2+176} \leq 16$

$2520 + 1680 = 4200 \quad 64 \times 4 = 6 \quad \sqrt{8^2+176} \leq 24$ верно

$30 \times 7 = 210 \quad 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4 \quad 240 - 64 = 240 - 60 - 4 = 176$

$210 \times 8 = 1680 \quad (|y|-8)^2 + 7^2 = 289 \quad y^2 - 16|y| - 176 = 0 \quad 176 + 64$

$y^2 - 16|y| + 64 = 240 \quad y = 8 \pm \sqrt{8^2+176}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

$7722 55$ $\quad 45577$

$\sqrt{33} >$

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9$ $\quad 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 99 \cdot 9$

$\frac{\sqrt{33}-1}{8} < 1$

② $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$ $\quad \sqrt{33} < 9$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000} = S$

$b_3 \to 40 b_3$

3. $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

$x \geq -2$ $\quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$

$4x^2 - x - 2 =$

$= 4(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2}) =$

$\frac{1 \pm 3}{8}$ $\quad -\frac{1}{4} = (4x+1)(x-\frac{1}{2})$

$b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{2999}) = S$

$b_1 + b_2 + 40 b_3 + b_4 + \ldots + 40 b_{3000} = S$

$\frac{1 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{1 \pm 3}{8} = \frac{1}{2}$

$b_1(1 + q + 40q^2 + q^3 + q^4 + 40q^5 + \ldots + 40q^{2999}) = 5S$

$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) =$

$= 4(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$

$1 + q + 40q^2 + q^3 + \ldots + 40q^{2999} = 5(1 + q + q^2 + \ldots + q^{2999})$

$\frac{1-\sqrt{33}}{8} > -1$ $\quad -4 - 4q + 35q^2 - 4q^3 - 4q^4 + 35q^5 + \ldots + 35q^{2999} = 0$

$-2 \quad -1 \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} \quad 2$

$9 > \sqrt{33}$ - верно

$8(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{4}) =$ $\quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

$= (4x+1)(2x - \frac{1}{2})$

$6 + 1 + 3 + 3 - 8$

$\frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{16} + 2 = \frac{33}{16}$ $\quad (y_1; x)$ $\quad \frac{4 \pm 6}{8} =$

$y + x \geq 0$, $y - x \geq 0$ $\quad 1, \quad \frac{1}{2}$

$8{,}5 \; 4 + 3 + 3 - 6$

$9{,}5 \quad 11{,}5$

$(y_1; -x)$

$= \frac{7}{8} \quad -\frac{1}{2}$ $\quad |y + x + 8| = |y - x + 8|$ $\quad 4 + \cancel{1 + 9 - 10}$ $+ 9{,}5 =$

$13 + 9$ $\quad (x; y)$ $\quad 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{7}{8}) =$ $\quad 7{,}5$

$(-x; y)$

$= (4x+2)(x - \frac{7}{8})$

$2; 3$

$1; 8$

$\sqrt{1 + 4 \cdot 8} =$ $\quad (x^2 + x + 3)(3x^2 + 3x + 1) =$

$= \sqrt{33}$ $\quad 3x^4 + 3x^2 + x^2 +$

$9; 1$

$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ $\quad + 3x^3 + 3x^2 + x +$

$2; -3$

$64 - 5 \cdot 10 +$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(x)\ 4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geqslant 0$ $\quad x\leqslant -2$

$64 \quad -40+44-8+4$ $\quad 2\cdot 1$

$\cancel{4\cdot 3^4 = 4\cdot 81}$

$\cancel{5\cdot 4\cdot(27) = -100-35=-135}$

$\cancel{h(x)\ 16x^3+15x^2+22x}+4$

$27=8\cdot 9=$

$=24 \quad 64-8\cdot 16+72=$

$h(x)\ 16x^3+15x^2+22x+4$

$=-64+72=$ $\quad 1+6-4-4+($

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geqslant 0=$

$(x+1)^4=(x+1)^{2\,2}=(x^2+2x+1)^2=$

$=4(x+1)^4+3x^4+x^3+5x^2+3\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$=x^4+4x^2+1+2x^3+4x+2x^2=$

$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x^2+x+3)(3x^2+3x+1)$ $\quad \boxed{x^3-8x^2+72=0}$

$=x^4+6x^2+4x^3+4x+1=$

6 6 5 6 4 4 4 35 $\quad 16$

$(x-6)(x^2+2x-12)=\cancel{(x+1)}(x^3+3x^2+3x+1)$

$2\pm\sqrt{13}$ $\quad 36$ $\quad -92\,|\,6$

$\left(\frac{x}{2\sqrt2}+\frac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$

$2+\sqrt{13}$ $\quad (x+1)^3$ $\quad 12$

$1+12\ 6 \quad 4\ 6 \quad 24\ 6$

$x^2(x-8)+72=0$

$3x^4+x^3+5x^2+3=$ $\quad 36\cdot 2$

$\underbrace{3x^2-64}$ $\quad x^2+6x-40(x+10)=$ $\quad -72$

$x^2\geqslant \frac{64}{3}$

$=(3x^2-x+3)(x^2+x+1)=$

$=x^3-5x^2+6x^2-40x-30x+200$

$=3x^4+3x^3+3x^2-x^3-x^2-x+$

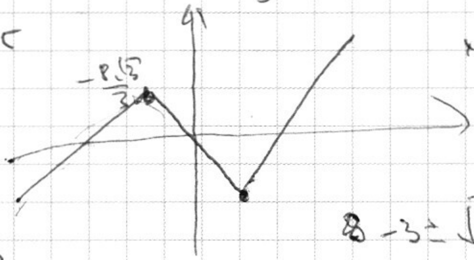
$\left[\begin{array}{l} x\geqslant \frac{8\sqrt3}{3} \\ x\leqslant -\frac{8\sqrt3}{3}\end{array}\right.$

$\sqrt{13}-1\geqslant 4$

$\cancel{=x^3+x^2-70x+200}$

$=3x^2+3x+3$

$\sqrt{13}\geqslant 5$



$(x-4)(x+10)$ $\quad \cancel{2x^3+2x}$

$x^2+6x+40$

$\frac{\cancel{-6\pm\sqrt{36+160}}}{2}$

$(x^2+x+3)\cancel{(3x^2+x+1)}$

$4 \quad 80x^2 \quad 16-$

$-3\pm\sqrt{9+40}=-3\pm 7=$

-10

$1+13$

$\cancel{\left(\frac{8}{\sqrt3}\right)^3=\frac{8^3}{3\sqrt3}-\frac{8^3}{3\sqrt3}}=-\frac{2\cdot 8^3}{3\sqrt3}+200$

$3x^4-5x^3+x^2+3x^3-5x^2+x$

$+9x^2-15x+3$

$x\geqslant 4$

$9-4\cdot 3<0$

$3\ (x^2+x+1)^2=$ $\quad -2x^3 \quad \cancel{16-4\cdot 5\cdot 4}$

$\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt2}=(x-4)$

$x^3-64x\leqslant 0\Rightarrow$

$=3(x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2)=$ $\quad (x^2+x+3)(3x^2+3x+1)=$

$x(x-8)(x+8)\leqslant 0$

$\longrightarrow x^3-64x+200=8(x^2-8x+16)$ $\quad =3x^4+9x^2+6x^3+6x+3$ $\quad 3x^4+3x^3+x^2+3x^3+3x^2+x+$

$8\cdot 16=8\cdot\frac{64}{2}=128$ $\quad +9x^2+9x+3-5x^3-8x^2-10x$

x^3-8x^2+

$\frac{(x+10)}{2\sqrt2}\sqrt{x^3-64x+200}=(x-4)(x+10)$ $\quad -(5x^3+4x^2+6x)$ $\quad -(5x^3+8x^2+10x)$

$-x(5x^2+4x+6)$

$70>0$

$x+10=0$ $\quad 160$ $\quad >0$ $\quad -x(5x^2+8x+10)$

200

-128 $\quad 16-4\cdot 5\cdot 6<0$ $\quad >0$

72

$x=-10$ $\quad -1000+640+200<0$

$\cancel{3x^2-16x}<\frac{80}{48}\ 128$ $\quad 64-50\cdot 64$

$x^3-8x^2+72=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

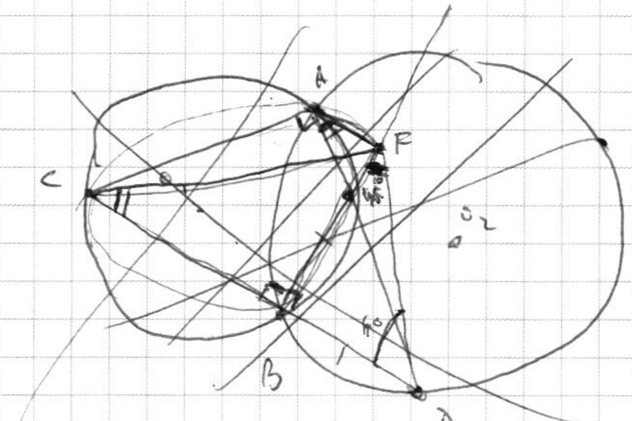
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а)



$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$a=0$ $x=\pm 15$

$y=\pm 8$

$15-8=7+8$

$8-15$

$-15-8 \geq 8$

$15 + -15+8+8=1$

$(x;y)$

$(-x;y)$

$(-8;-15)$

$(8;-15)$

$\begin{cases} y+x+8 \geq 0 \\ y-x+8 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=8$

$a=64$

$|BH|^2 = |FA|^2$

$2y+16=16$

$y=0$

$a > 64$

$(|x|-15)^2 = a-64$

$|x|-15 = \pm\sqrt{a-64}$

$\sqrt{2+8}$

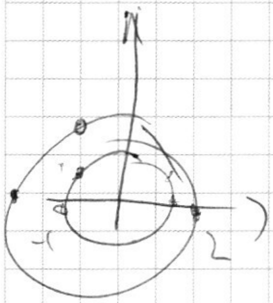
$\sqrt[3]{4+32}=6$

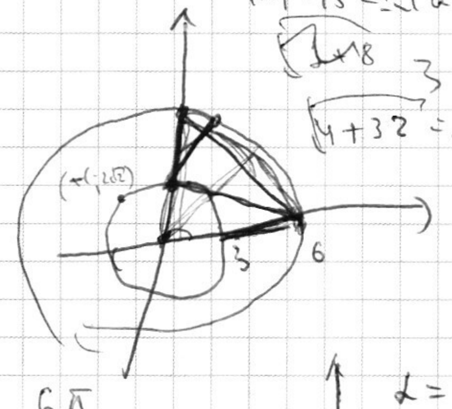
$x=-x \Leftrightarrow x=0$

$|y+8|=8$

$y=0$

$y=-16$





$15^2+8^2=a$

$15^2+8^2=a$

$\frac{2\pi}{\ } = 3$

$\frac{2\pi}{4}$

$30^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\frac{2}{3}\pi$

$\frac{2\pi 2}{3\pi} = \frac{2}{3}2$

$\alpha = 5(\pi+\alpha)$

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$

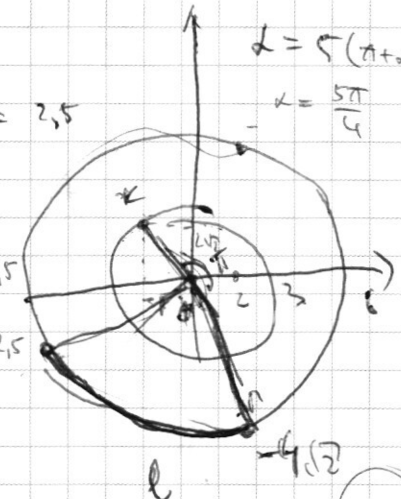
$\frac{\frac{6\pi}{\pi+\alpha}}{\frac{12\pi}{\alpha}} = 2,5$

$\frac{6\pi}{\pi+\alpha} = t \cdot v_k$

$\frac{12\pi}{\alpha} = t \cdot v_n$

$\frac{6\pi \cdot \alpha}{12\pi(\pi+\alpha)} = 2,5$

$\frac{\alpha}{2(\pi+\alpha)} = 2,5$



$y - 2\sqrt{2} = k(x+1)$

$k = -2\sqrt{2}$

$\boxed{y = -2\sqrt{2}x}$

$2\pi 2$

$\pi + \alpha$

$r=6$

$\frac{6\pi}{\pi+\alpha}$

$V_k = 2,5 V_n$

$\frac{12\pi}{\alpha}$

$\frac{2\pi 2}{\alpha} = \frac{12\pi}{\alpha}$

$S = \frac{\ }{\alpha}$

$6 \cdot 2 \frac{2\pi 2}{\frac{2\pi}{3}} = 32$

2π

$\boxed{\alpha = 2}$

12π

4π

$\frac{2\pi 2}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$ $\boxed{b_i = b_1 \cdot q^{i-1}}$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000} = S$ $b_1 + b_2 + 40b_3 + \ldots + 40b_{3000} = 5S$

$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \ldots + 3b_{3000} - ?$

$\frac{1}{5} = \frac{1+q+q^2+\ldots+q^{2999}}{1+q+40q^2+q^3+\ldots+40q^{2999}}$ $1+3q+q^2+3q^3+\ldots+3q^{2999} - ?$

7 77

$1+q+40q^2+q^3+q^4+40q^5+\ldots+40q^{2999} = \underline{5+5q+5q^2+5q^3+\ldots+5\cdot q^{2999}}$

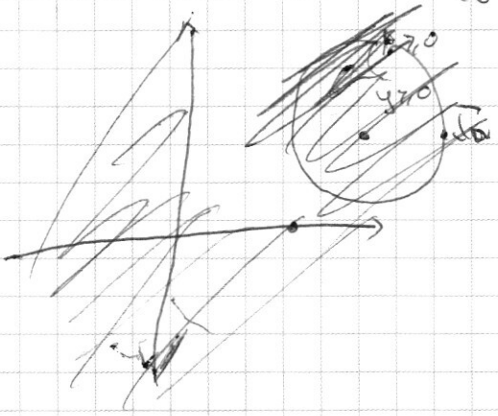
$\cancel{35q^{2999}}$

$\cancel{4} = 4q + 35q^2 - 4q^3 + \ldots$

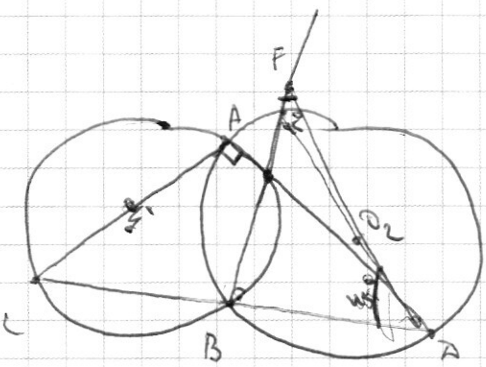
$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$ (x, y) $(-x, y)$

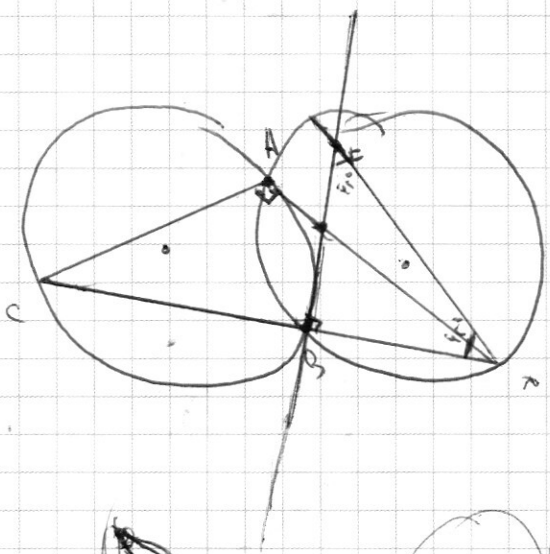
$16 = |y+x+8| + |y-x+8| \geq 8 - |x+y| + 8 - |y-x|$

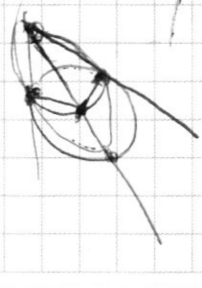
$\cancel{|y+x+8+y-x+8|}$

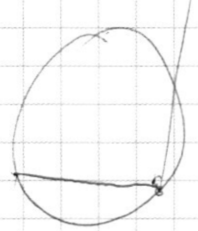


$16 = |y+x+8| + |y-x+8| \geq y+x+8$









☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)