МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

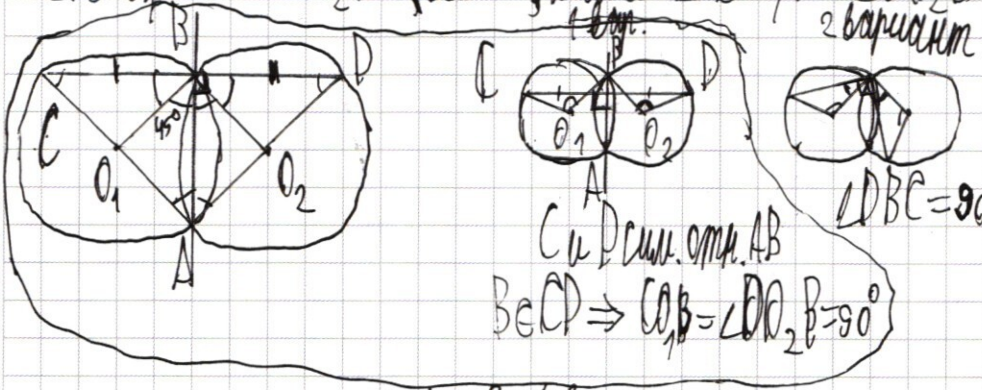
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CO_1B + \angle DO_2B = 180^\circ$, иначе $\angle CO_1B = \angle DO_2B$ получается два вар.:



первый вариант

$\angle CO_1B + \angle DO_2B = 180^\circ$

$2\angle MO_1B + \angle DO_2B = 180^\circ$, т.к. $CO_1 = O_1B$, M-сер. BC

$2\angle MO_1B + 2\angle NO_2B = 180^\circ$, т.к. $DO_2 = O_2B$, N-сер. BD

$\angle MO_1B + \angle NO_2B = 90^\circ$

7. $CF^2 = CB^2 + BF^2$ (по теор. Пиф.)

$CF^2 = CB^2 + BD^2$

$CF^2 = 4(MB^2 + BD^2)$

$CF^2 = 4((5\cdot\cos\angle MO_1B)^2 + (5\cdot\cos\angle NO_2B)^2)$

$CF^2 = 100((\cos\angle MO_1B)^2 + (\cos\angle NO_2B)^2)$,

$CF^2 = 100$ (пункт 6) $(\cos\alpha)^2 + (\cos(90^\circ - \alpha))^2 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

$CE = 10$

~~Ответ: 10.~~ Ответ: 10.

б). $CF^2 = CB^2 + BD^2$

$100 = 36 + BD^2$

$8 = BD$

$8 = BF$

$S_{\triangle CF} = 0{,}5 \cdot BF \cdot CB = 24$ (т. к. $\angle CBF = 90^\circ$

Ответ: 24.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y = \pm 6$ $\quad y = -6 \Rightarrow |y-6| = 12 \Rightarrow |y-6| > |x| \Rightarrow$ против.

$y = 6$

$(x;y) = (\pm 6; 6)$

$a = 4$ подходит

При $40 \geq a > 4$:

$(x;y) = (\pm 6; 6 \pm \sqrt{a-4})$ — такие 4 вар. $(x;y)$ являются решениями

Противоречие, т.к. решений больше 2.

При $a > 40$:

Если $|x| \geq |y-6|$: $|x| = 6 \Rightarrow (6-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \Rightarrow |y| = 6 \pm \sqrt{a-4}$ два случ.:

$|y| = 6 - \sqrt{a-4}$ неверно, т.к. $|y| \geq 0 = 6 - \sqrt{40-4} > 6 - \sqrt{a-4}$

$|y| = 6 + \sqrt{a-4}$ неверно, т.к. $|y| = 6 + \sqrt{a-4} \Rightarrow |y| > 12 \Rightarrow |y-6| > 6 \Rightarrow |y-6| > |x|$

Если $|y-6| > |x|$:

$|y-6| = 6$

$y = 0$ или 12

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$

$(|x|-8)^2 = a - 36$

$|x| = 8 \pm \sqrt{a-36}$

$|x| = 8 - \sqrt{a-36}$ $\quad (8 + \sqrt{a-36} > 6 = |y-6|$ (против. с если $|y-6| > |x|$)).

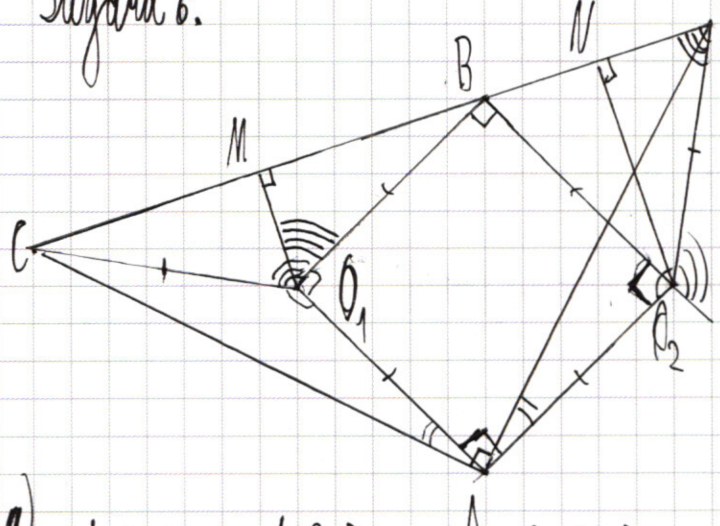
при $a > 100$ нет решений

при $a = 100$ $(x;y) = (0,0)$ или $(0,12)$ подходит

при $a < 100$ $(x;y) = (\pm(8 - \sqrt{a-36}); 6 \pm 6)$ — 4 решения.

Ответ: $a = 4$ или 100.

Задача 6.



Пусть: окруж. (ABC) имеет центр O_1, окруж. (ABD) имеет центр O_2, M – середина BC, N – серед. BD

а)

1. $\angle AO_1C = \angle AO_2D$, т.к. B, C и D на одн. прямой (по усл.) выполнена лемма о велосипедистах.
2. $\angle O_1CA + \angle CAO_1 + \angle AO_1C = 0$ (по свой. Δ)

$2\angle CAO_1 + \angle AO_1C = 0$ (по свой. равнобед. Δ)

$\angle AO_1C = 2\angle O_1AC$

3. Аналогично $\angle AO_2D = 2\angle O_2AD$
4. $\angle AO_1C = \angle AO_2D$ (пункт 1)

$2\angle O_1AC = 2\angle O_2AD$

~~$\angle O_1AC = \angle O_2AD$~~

$2\angle O_1AC + 2\angle DAO_1 = 2\angle O_2AD + 2\angle DAO_1$

$2\angle DAC = 2\angle O_2AO_1$

$0 = 2\angle O_2AO_1$

$90^\circ = \angle O_2AO_1$ (иначе окруж. либо совпадают, либо касаются)

5. AO_1BO_2 – квадрат, т.к. $AO_1 = O_1B = 5 = BO_2 = O_2A$ и $O_2A \perp AO_1$
6. $\angle AO_1C + \angle CO_1B + \angle BO_1A = 0 = \angle AO_2D + \angle DO_2B + \angle BO_2A$

$\angle CO_1B + \angle BO_1A = \angle DO_2B + \angle BO_2A$ (пункт 1)

$\angle CO_1B + 90^\circ = \angle DO_2B + 90^\circ$, т.к. AO_1BO_2 – квад.

$\angle CO_1B = \angle DO_2B$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

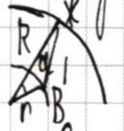
Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-\sqrt{17}-1}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; \infty)$.

Задача 5.

$\left(5^2+(5\sqrt{7})^2\right):\left(2^2+(2\sqrt{7})^2\right)^2 = 2{,}5^2 \Rightarrow$ жук движется по кругу, у которого радиус больше в 2,5 раза, чем у круга, по которому плавает водомерка.

Угловая скорость $\underbrace{\text{водомерки}}_{\text{относительно поплавка}}$ в $2\cdot 2{,}5=5$ раз больше, чем у жука.

Пока жук делает 1 круг, водомерка „обгоняет" его (находится на одной линии с жуком и поплавком) $5-1=4$ раз. Эти случаи отличаются друг от друга поворотом кратным $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$ (то есть случаи, в которых жук и водомерка на одной линии отличаются только поворотом вокруг поплавка положений насекомых на 90° или 180°). Тут рассматриваются случаи, в которых поплавок жук и водомерка на одной прямой и водомерка находится между жуком и поплавком. Заметим, что эти случаи ~~таков~~ являются случаями кратчайшего расстояния между насекомыми:



$l=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\alpha} > \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos 0}$ (при $\alpha \neq 0$)

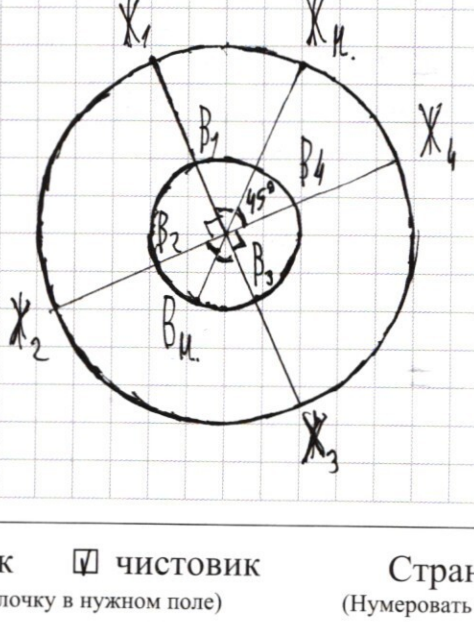
~~От начального~~

Нужные случаи таковы:

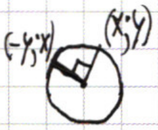
Пусть: α − угол отн. поплав. который прошёл жук

1 случ. − при $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi z$ (коор. жука $(x_1; y_1)$)

2 случ. − при $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi z$



3 случ. - при $a=\frac{5\pi}{4}+2\pi z$



4 случ. - при $a=\frac{7\pi}{4}+2\pi z$

где $z\in\mathbb{Z}$.

$(x_1,y_1)=(5\cdot\cos a-5\sqrt{7}\cdot\sin a;\ 5\sqrt{7}\cos a+5\cdot\sin a)=\left(\frac{5-5\sqrt{7}}{\sqrt{2}};\frac{5+5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$

Координаты положений жука-плавунца таковы:

$\left(\frac{5}{\sqrt2}(1-\sqrt7);\frac{5}{\sqrt2}(1+\sqrt7)\right),\left(\frac{5}{\sqrt2}(-1-\sqrt7);\frac{5}{\sqrt2}(1-\sqrt7)\right),\left(\frac{5}{\sqrt2}(-1+\sqrt7);\frac{5}{\sqrt2}(-1-\sqrt7)\right),\left(\frac{5}{\sqrt2}(1+\sqrt7);\frac{5}{\sqrt2}(-1+\sqrt7)\right)$

Ответ: $\left(2{,}5\sqrt2(1-\sqrt7);2{,}5\sqrt2(1+\sqrt7)\right),\left(2{,}5\sqrt2(-1-\sqrt7);2{,}5\sqrt2(1-\sqrt7)\right),\left(2{,}5\sqrt2(-1+\sqrt7);2{,}5\sqrt2\cdot\right.$
$\left.\cdot(-1-\sqrt7)\right),\left(2{,}5\sqrt2(1+\sqrt7),2{,}5\sqrt2(-1+\sqrt7)\right)$.

Задача 7.

$\begin{cases}|y-6-x|+|y-6+x|=12\\(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{ll}|y-6|=6 & \text{при } |y-6|\geq|x|\\|x|=6 & \text{при } |x|\geq|y-6|\end{array}\right.\\(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a\end{cases}$

При $a<4$:

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2<4$

$x\neq6$

$|y-6|=6$ $\quad(|x|<|y-6|)$

$y=0$ или 12

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2\geq4$

противоречие

При $a=4$:

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2\leq4$

$y\neq0\quad y\neq12\quad(|y-6|\neq6)$

$|x|>|y-6|$

$|x|=6$

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2\leq4$

$(|y|-6)^2=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Цифра 0 не используется, т.к. произведение цифр будет 0 при использовании 0.
Цифра 7 используется 1 раз, т.к. ~~это~~ единственная цифра кроме 0 кратная 7, а степень вхождения 7 в 700 равна 1.
Цифра 5 исп. 2 раза, т.к. это един. цифра кроме 0 крат. 5, а степень вхож. 5 в 700 равна 2.

$700 : 7 : 5^2 = 4$

4 можно представить как $4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ или $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$.
Возможны 2 варианта набора цифр: 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1 и 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1. Всего вариантов расставить их:

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 4!} + \frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8!}{4!}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{8!}{16} = \frac{7!}{2} = 2520$$

Ответ: 2520 чисел.

Задача 2.

Пусть: геометрическая прогрессия имеет увеличение в k раз на каждом шаге.

$b_{i+1} = k\, b_i$, при $i \in [1, 2999]$

$$\sum_{i=1}^{1000} (b_{3i-2} + b_{3i-1} + 50\, b_{3i}) = 10 \sum_{i=1}^{1000} (b_{3i-2} + b_{3i-1} + b_{3i})$$

$$b_1 (1 + k + 50 k^2) \sum_{i=1}^{1000} (k^{3(i-1)}) = 10\, b_1 (1 + k + 50 k^2) \sum_{i=1}^{1000} (k^{3(i-1)})$$

$1 + k + 50 k^2 = 10 (1 + k + k^2)$

$40 k^2 - 9k - 9 = 0$

$(5k - 3)(8k + 3) = 0 \quad k > 0$, т.к. $b_1 > 0$, $b_1 k > 0$ $(b_2 > 0)$

$k = 0{,}6$

$$\frac{\sum_{i=1}^{1500}(b_{2i}+b_{2i})}{\sum_{i=1}^{1500}(b_{2i-1}+b_{2i})}=\frac{b_1(1+2k)\sum_{i=1}^{1500}(k^{2(i-1)})}{b_1(1+k)\sum_{i=1}^{1500}(k^{2(i-1)})}=\frac{1+2k}{1+k}=\frac{2{,}2}{1{,}6}=1{,}375$$

Ответ: сумма увеличится в 1,375 раза.

Задача 3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

$(x+6)(\sqrt{x^3-4x+80})=\sqrt{2}(x+4)(x+6)$ $x=-6$ подходит

$\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}(x+4)$ $x\geq-4$ (кроме $x=-6$)

$x^3-4x+80=2(x+4)^2$ должен быть ~~$x>-4$~~

$x^3-2x^2-20x+48=0$

$(x-4)(x^2+2x-12)=0$

$(x-4)((x+1)^2-13)=0$

$x=4$ или $-1\pm\sqrt{13}$ при $-1-\sqrt{13}=x$: $\sqrt{x^3-4x+80}\geq0\Rightarrow\sqrt{2}(x+4)\geq0\Rightarrow x\geq-4$, противо.

Ответ: -6; $\sqrt{13}-1$; 4.

Задача 4.

При $x\geq2$:

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4=2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq$

$\geq4x^3-3x^3+14x-4x+4=x^3+10x+4\geq0$ $x\in[2;\infty)$

При $x\leq2$:

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4=2x^4+3x^3-5x^2-4x+4=(x-1)\cdot$

$\cdot(2x^3+5x^2-4)=(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)$

$2x^2+x-2=0$

$D=1^2-4\cdot2\cdot(-2)=17$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{D}}{2\cdot2}=-\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ $1\geq-\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}\geq-2$

$x\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{-\sqrt{17}-1}{4};\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right]\cup[1;2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 5 5 4

7 5 5 2 2

$\frac{8!}{2!\cdot 4!}+\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=\frac{8!}{4!}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{8!}{16}=\frac{7!}{2}=2520$

$\sum_{i=1}^{1000}(b_{3i-2}+b_{3i-1}+50b_{3i})=10\sum_{i=1}^{1000}(b_{3i-2}+b_{3i-1}+b_{3i})$ $b_1+b_2+50b_3=10(b_1+b_2+b_3)$

$b_{i+1}=kb_i$ $1+k+50k^2=10(1+k+k^2)$. $40k^2-9k-9=0$

$D=1521=39^2$ $k=\frac{9\pm39}{240}=0,6$ $(k>0)$

$\sum_{i=1}^{1500}(b_{2i-1}+2b_{2i}):\sum_{i=1}^{1500}(b_{2i-1}+b_{2i})=(b_1+2b_2):(b_1+b_2)=2,2:1,6=1,375$

$\left(\frac{x}{\sqrt2}+3\sqrt2\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$

$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt2(x+4)(x+6)$ $x=-6$

$x^3-4x+80=2(x^2+8x+16)$

$x^3-2x^2-20x+48=0$

$(x-4)(x^2+2x-12)=0$

$(x-4)(x+6)(x$ $x=-6;4;-1\pm\sqrt{13}$

$2x^3+5x^2-4$

$4x^3-5x-2$ $x^3-1,25x-0,5$

$p^3+q^3=0,5$ $3pq=1,25$

$D=17$ $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2\cdot2}$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq0$

$x\geq2$ | $x\leq2$
$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq0$ | $2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq0$

$\checkmark$

$(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geq0$

$x\in(-\infty;-2]\cup\left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4};\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right]\cup[1;\infty)$ $(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geq0$

$2(x-1)(x+2)(x+0,25(1+\sqrt{17}))(x+0,25(1-\sqrt{17}))\geq0$

$1;-2;-0,25(1\pm\sqrt{17})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

~~$y = a > \sqrt{8^2+6^2}$, т.к. иначе не более 1-го реш. $(x,y)=$~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |y-6| = 6, & \text{при } |y-6| \geq |x| \\ |x| = 6, & \text{при } |x| \geq |y-6| \end{cases} \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{array}\right.$$

если x подходит, то и $-x$ подходит

$40 > a \geq 4 \Rightarrow (x;y) = (\pm 6; 6 \pm \sqrt{a-4})$, много реш.

$a < 4 \Rightarrow |x| < |y-6| \Rightarrow y = 0$ или $12 \Rightarrow (|y|-6)^2 > a \Rightarrow 0$ реш.

$a = 4 \Rightarrow (x;y) = (\pm 6; 6)$

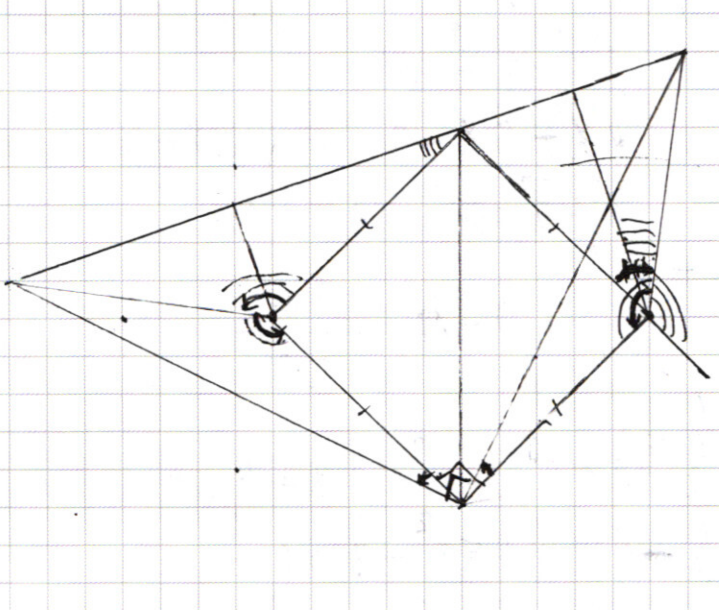
$a > 40 \Rightarrow (x;y) = |x| < |y-6| \Rightarrow y = 0$ или $12 \Rightarrow (\pm\sqrt{a-4}$ $\quad x-8 = \pm\sqrt{a-6^2} \Rightarrow x = 8 \pm \sqrt{a-6^2}$

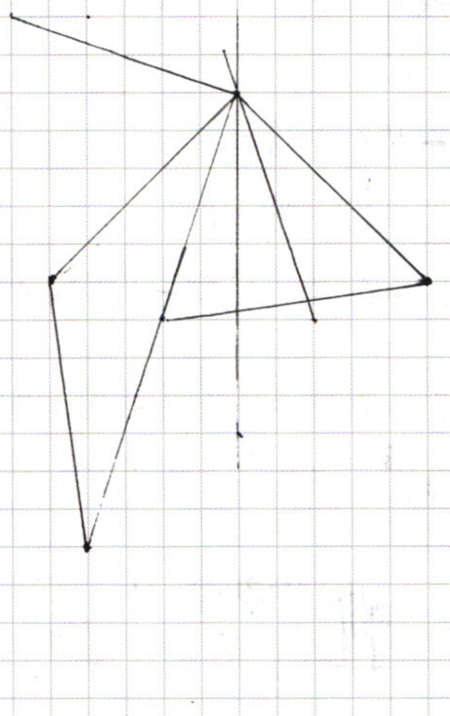
~~$52 > a > 40 \Rightarrow (x;y) = (\pm 6$~~ $\quad x = 0 \Rightarrow (x-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \Rightarrow 100 = a$

$|x| \geq |y-6|$

$|x| = 6 \quad y = \sqrt{a-4} - 6 \quad \sqrt{a-4} \leq 18$

$(x;y) = (\pm 6, \sqrt{a-4} - 6$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)