

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40; \quad \text{ОДЗ:}$$

$$x \neq 4$$

$$x \neq -10$$

$$x > -4 \text{ (т.к.)}$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}(x^2+6x-40)} = \frac{1}{\sqrt{x^3-64x+200}}$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}(x+10)(x-4)} = \frac{1}{\sqrt{x^3-64x+200}} \Rightarrow \frac{x+10}{2\sqrt{2}(x+10)(x-4)} \geq 0;$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x-4);$$

$$8(x-4)^2 = x^3 - 64x + 200;$$

$$8x^2 - 64x + 128 = x^3 - 64x + 200;$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0;$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0;$$

$$(x-6)\left(x - \left(\frac{2+\sqrt{52}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{2-\sqrt{52}}{2}\right)\right) = 0;$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{2+\sqrt{52}}{2} \\ x = \frac{2-\sqrt{52}}{2} \end{cases}$$

$$< 4 \Rightarrow \text{не входит в ОДЗ};$$

$$\text{Ответ: } x = 6; \quad x = \frac{2+\sqrt{52}}{2};$$

И/

Разложим 4200 на простые множители:

$$4200 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow \text{Каждый делитель все}$$

возможные числа, содержащие эти цифры:
4, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1. или 7, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1.

Другие наборы упорядочены не по возрастанию, т.е.
 4 - наим. делителю из 4200 из чисел;
 Кол-во 8-значных чисел с цифрами
 из набора 7, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1 =

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 1 = 2520$$

Кол-во 8-значных чисел с цифрами
 7, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1 = $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 =$
 $= 2060$

$$2520 + 2060 = 4580$$

Ответ: 4600 чисел;

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0;$$

$$1) x \leq -2;$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0;$$

$$4x^4 + 5x^3 + 10x^2 + (x+2)^2 \geq 0;$$

$(x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^4 + 5x^3 + 10x^2$ должно быть
 не меньше 0;

$$4x^4 + 5x^3 + 10x^2 < 0;$$

$$x^2 (4x^2 + 5x + 10) < 0;$$

$$4x^2 + 5x + 10 < 0;$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 10 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 5x + 10 > 0 \Rightarrow$$

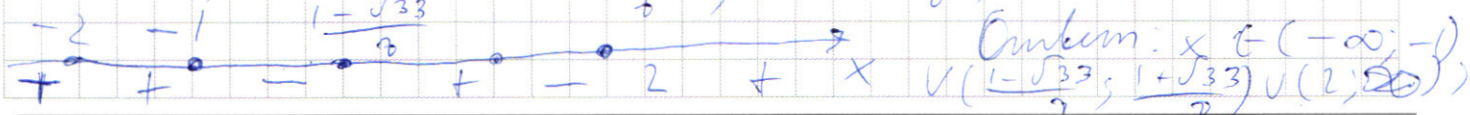
$$\Rightarrow \text{При } x \leq -2 \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0;$$

$$2) x \geq -2;$$

$$4 + 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 \geq 0;$$

$$(x-2)(x+1)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0;$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

Сумма четн прогрессии $S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Сумма $b_1 + b_6 + b_9 = S_3 = \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} =$

$$40 S_3 + S - S_3 = 5 S;$$

$$39 S_3 = 4 S;$$

$$39 \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{4 b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{39 q^2}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} = \frac{4}{q - 1}, \Rightarrow 39 q^2 = 4 q^2 + 4 q + 4;$$

$$35 q^2 - 4 q - 4 = 0, \quad D = 16 + 36, \quad \sqrt{D} = 24;$$

$$q^2 = \frac{5}{5};$$

Сумма чисел на нечетных местах: $S_1 = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$; Сумма на четных: $S_2 = \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$;

$$S_1 + 3 S_2 = x S;$$

$$\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + 3 \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = x \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten solution on graph paper:

Geometric Diagram: A triangle with vertices D, B, and F. Point A is on DF, and point E is on BF. Lines DA and BE are drawn, intersecting at point C. Angles are labeled: $\angle D = 45^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle F = 45^\circ$. Sides are labeled: $DA = a\sqrt{2}$, $BE = a$. Right angle symbols are shown at points A and B.

Angle Calculations:

$$\alpha = 7,5\alpha + 360$$

$$2,5\alpha = \alpha + 360$$

$$1,5\alpha = 360$$

$$\alpha = 240$$

$$\alpha = 400^\circ$$

Sum Calculations:

$$S_1 = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$S_2 = \frac{b_1 q(q^{2000} - 1)}{q - 1}$$

$$S_3 = \frac{b_1 q^2(q^{1000} - 1)}{q - 1}$$

$$40 \frac{b_1 q^2(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{b_1 q(q^{3000} - q^{1000})}{q - 1} = 5 \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$39 \frac{b_1 q^2(q^{1000} - 1)}{q - 1} = 4 \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$39 q^{1002} - 39 = 4 q^{3000} - 4$$

$$q^{1002}(q^{2222} - 1) = 35$$

Other Notes:

- $\frac{1}{10}$
- $\alpha = 240$
- $\alpha = 400^\circ$
- $4 : \frac{5}{2} = \frac{8}{5}$
- $360 + \frac{5}{2} \alpha = \alpha$

$$S_3 = \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1};$$

$$40 \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} + \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} - \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} =$$

$$= 5 \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$39 \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 4 \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q - 1};$$

$$39 q^3 - 39 q^2 = 4 q^3 - 4,$$

$$39 q^3 - 39 q^2 - 4 q^3 + 4 = 0,$$

$$\frac{39 q^2}{q^3 - 1} = \frac{4}{q - 1}$$

$$\frac{39 q^2}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} = \frac{4}{q - 1}$$

$$39 \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} + \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{1 + q}{q^2 - 1} = \frac{x}{q - 1}, \quad \frac{2}{q + 1} = x,$$

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{20}, \quad \frac{x}{5} = \frac{10}{2}, \quad x = \frac{10}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_1 + 3q S_2 = S_3$$

$$40 S_3 + S_1 + S_2$$

$$S_1 + q S_2 + q^2 S_3 = q^5 S_7$$

$$1) x = -2:$$

$$1 + x^2 + x^3 - 5x^3 - 10x^2 = 0;$$

$$1 + x^2 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 4 = 0;$$

$$-x^3 = 3x^2 - 3x - 2 \quad | x + 2$$

$$-x^3 - 4x^2 \quad | 4x^2 - x - 2$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 3x \\ -x^3 - 4x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$= -2x - 2$$

$$-2x - 2$$

$$0$$

$$0$$

$$(x-2)(4x^3 + 3x^2 - 3x - 2) = 0,$$

$$(x-2)(x+1)(4x^2 - x - 2) = 0,$$

$$(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right),$$

2) 1)

$$4x^4 - 5x^2 |x+2| \leq 0, \quad x > -2$$

1) $x > -2$

$$4x^4 - 5x^3 - 10x^2 \leq 0$$

$$4x^2 - 5x - 10 \leq 0$$

$$D = 25 + 160 = 185$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{185}}{8}$$

N5
4

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 6$$

$$l_1 = 224y, \quad l_2 = 354y$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}(x+10)(x-4)} = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}$$

$$b(x-4)^2 = x^3 - 64x + 200$$

$$x^3 - 64x + 200 = bx^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x^2(x-8) = -72$$

$$x = 6$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 72 & x-6 \\ \hline x^3 - 6x^2 & \\ \hline -2x^2 + 72 & \\ -2x^2 + 12x & \\ \hline -12x + 72 & \\ -12x + 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

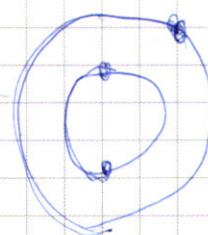
$$\begin{array}{r} -2x^2 + 72 \\ -2x^2 + 12x \\ \hline -12x + 72 \\ -12x + 72 \\ \hline 0 \end{array}$$

2) $x < -2$

$$4x^4 + 5x^3 + 10x^2 \leq 0$$

$$4x^2 + 5x + 10 \leq 0$$

$$D < 0 \Rightarrow > 0$$



$$D = 25 - 160 = -135$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-135}}{8}$$

$$D < 0$$

$$x \neq 10$$

$$x > 4$$

$$b(x^2 - 8x + 76) = 0$$

$$x^2 - 8x + 76 = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$D = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$



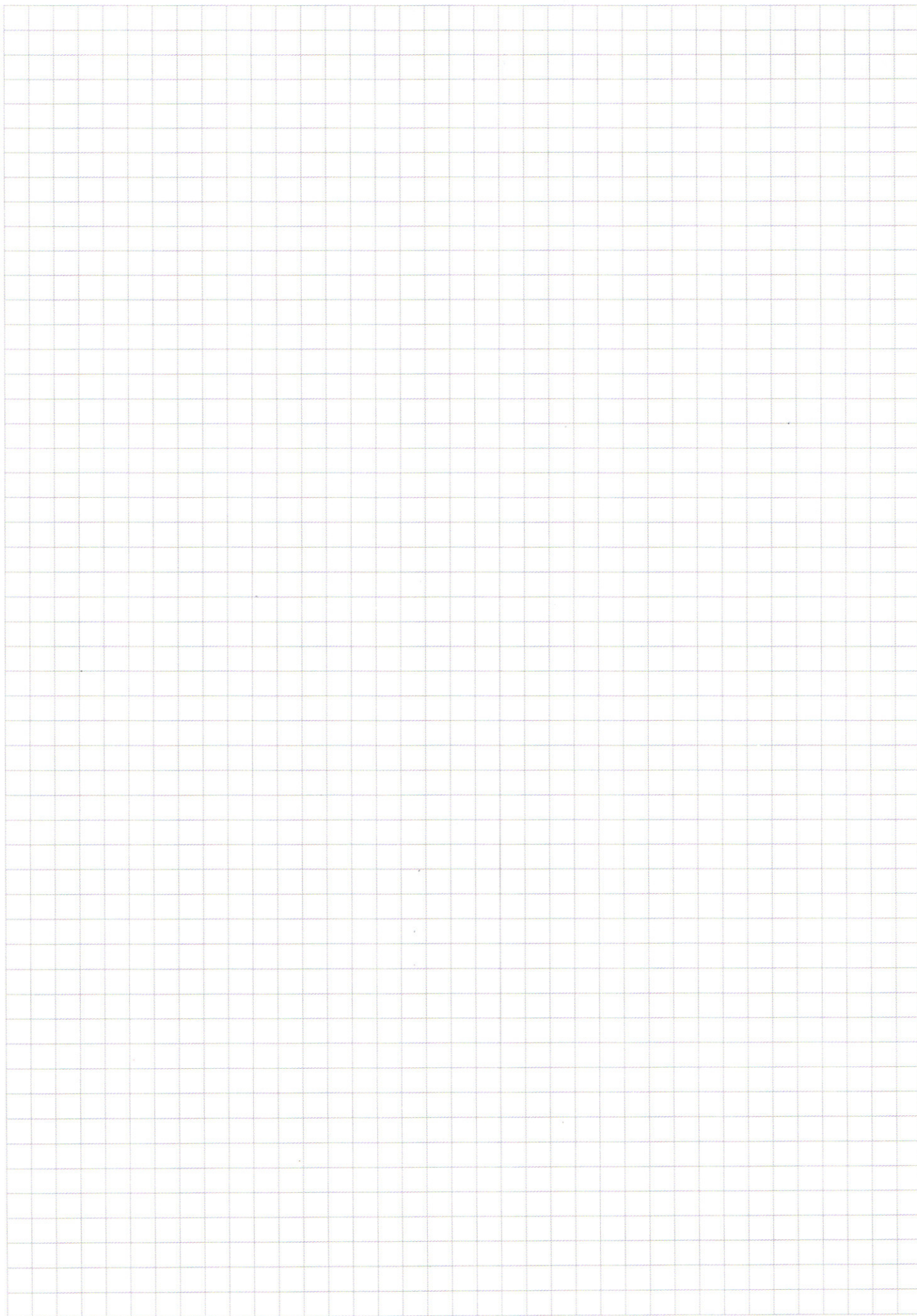
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)