МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра[...]
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$

$\frac{\cancel{(x+6)}\sqrt{x^3-4x+80}}{\sqrt{2}}=(x+4)\cancel{(x+6)}$

$x=\{-6\}$ решение

$\sqrt{(-6)^3+4\cdot 6+80}\geq 0$

$\sqrt{x^3-4x+80}=\sqrt{2}(x+4)$

$x^3-4x+80=2(x+4)^2=2(x^2+8x+16)=2x^2+16x+32$

$x^3-2x^2-20x+48=0$

$x=\{4\}$ решение

$64-2\cdot 16-80+48=0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ \underline{x^3-4x^2} & \overline{x^2+2x-12} \\ \quad 2x^2-20x+48 & \\ \quad \underline{2x^2-8x} & \\ \qquad -12x+48 & \\ \qquad \underline{-12x+48} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$(x-4)(x^2+2x-12)=0$

$x^2+2x-12=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$

~~$x=\{-1-\sqrt{13};-1+\sqrt{13};4;-6\}$~~ $x=\{-6;\ -1-\sqrt{13};\ -1+\sqrt{13};4\}$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

4. $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\ge 0$

$$2x^4+(x-2)^2\ge 3x^2|x-2| = 2x^2|x-2|+x^2|x-2|$$

$$|x-2|\left(|x-2|-x^2\right)\ge 2x^2\left(|x-2|-x^2\right)$$

$$|x-2|\left(|x-2|-x^2\right)=a$$

$$a\ge 2a \Rightarrow a\le 0$$

$$|x-2|\left(|x-2|-x^2\right)\le 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\\ |x-2|-x^2\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x^2\ge|x-2|\ge 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x^4\ge x^2-4x+4\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x^2(x-1)(x+1)-4(x-1)\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ (x-1)\left(x^2(x+1)-4\right)\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ \left\{\begin{array}{l} x-1\le 0\\ \left(x^2(x+1)-4\right)\le 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x-1\ge 0\\ x^2(x+1)-4\ge 0\end{array}\right.\\ x-1=0\\ x^2(x+1)-4=0\end{array}\right.$$

$$\left(|x-2|-x^2\right)\left(|x-2|-2x^2\right)\ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2|-x^2=0\\ |x-2|-2x^2=0\\ \left\{\begin{array}{l} |x-2|-x^2>0\\ |x-2|-2x^2>0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} |x-2|-x^2<0\\ |x-2|-2x^2<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4=x^2-4x+4\\ 4x^4=x^2-4x+4\\ \left\{\begin{array}{l} 4x^4<x^2-4x+4\\ x^4>x^2-4x+4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

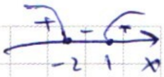
ax^2+bx+c

$D<0$, $a=1>0$ $\Rightarrow$ $x^2-x+2>0$ $\forall x\in R$

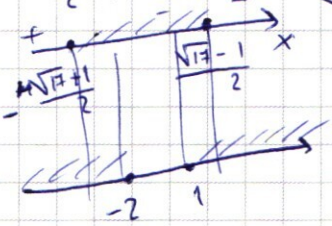
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4\ge (x-2)^2\\ 4x^4\le (x-2)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x^2-(x-2)\right)\left(x^2+(x-2)\right)\ge 0\\ \left(2x^2-(x-2)\right)\left(2x^2+(x-2)\right)\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x^2-x+2)(x^2+x-2)\ge 0\\ (2x^2-x+2)(2x^2+x-2)\le 0\end{array}\right.$$

$D<0$, $2>0$ $\Rightarrow$ $2x^2-x+2>0$ $\forall x\in R$

4. $\cancel{(x+1)(x+2)+x^2}$ $\left[\begin{array}{l} x^2+x-2\ge 0 \\ 2x^2+x-2\le 0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} (x-1)(x+2)\ge 0 \\ 2\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\le \end{array}\right.$

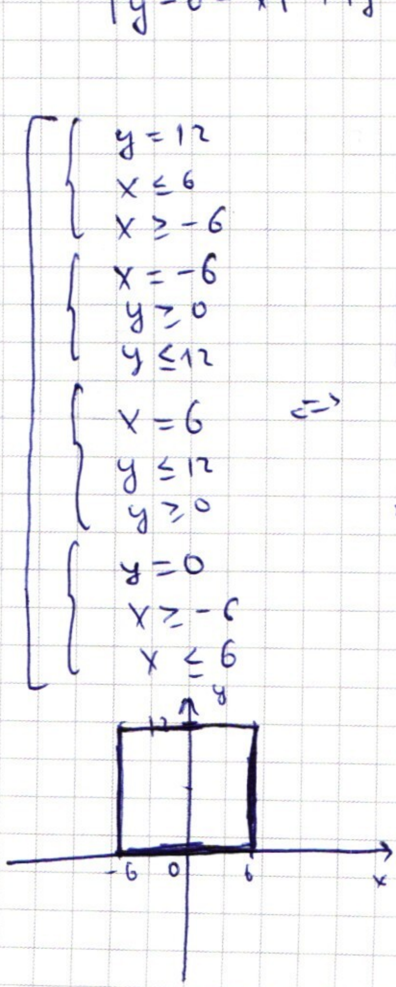


$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty) \\ \left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)\le 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $x\in\left[-\frac{\sqrt{17}+1}{2};-2\right]\cup\left[1;\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$

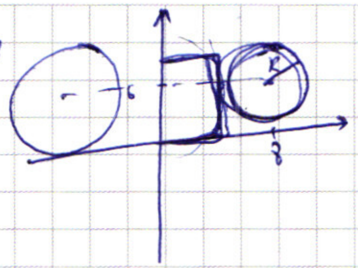


7. $\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$ $|y-6-x|+|y-6+x|=12$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-6-x\ge 0 \\ y-6+x\ge 0 \\ y-6-\cancel{x}+y-6+\cancel{x}=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6-x\ge 0 \\ y-6+x\le 0 \\ \cancel{y}-\cancel{6}-x-\cancel{y}+\cancel{6}-x=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6-x\le 0 \\ y-6+x\ge 0 \\ x+\cancel{6}-\cancel{y}+\cancel{y}-\cancel{6}+x=12 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6-x\le 0 \\ y-6+x\le 0 \\ x+6-y+6-\cancel{x}-y=12 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=12 \\ x\le 6 \\ x\ge -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y\ge 0 \\ y\le 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y\le 12 \\ y\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x\ge -6 \\ x\le 6 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=12 \\ x\in[-6;6] \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6 \\ y\in[0;12] \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y\in[0;12] \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x\in[-6;6] \end{cases} \end{array}\right.$



7. $(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a$ $\qquad R=\sqrt{a}$



$\sqrt{a}=2$

$a=\{4\}$

1. ~~abcde~~ $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot a_8=700 \Rightarrow a_1,a_2,\dots,a_8\neq 0$ (a_1 по-любому не равно 0)

$$\begin{array}{r|l} 700 & 2 \\ 350 & 5 \\ 70 & 5 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$700=2^2\cdot 5^2\cdot 7=\underbrace{2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7}$

5 цифр $<8 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ как минимум 3 равны 1.

$700=4\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$700=2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

Есть только эти 2 варианта

$$\frac{8!}{4!\cdot 2!}+\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4}=$$

$$=15\cdot 56+56\cdot 30=15\cdot 56\cdot 3=45\cdot 56=2520$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ $\quad \frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}\dots=q$

$$S=\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ это тоже геометрическая прогрессия только q нужно заменить q^3.

b_1 $\quad q\to q^3$

$b_1 \to 50b_3$

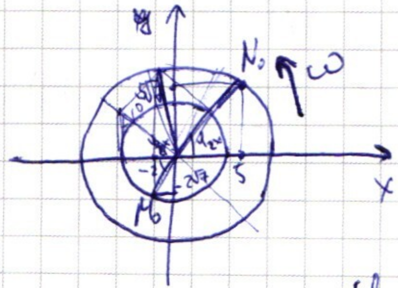
$3000 \to 1000$

$$10S = b_1+b_2+b_4+b_5+\dots+b_{2998}+b_{2999}+$$

$$+\frac{50b_3(q^{3000}-1)}{q^3-1}=\frac{10b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$\frac{50b_1q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$$

5.



$V=\omega r$ $\quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{\omega_1 r_1}{\omega_2 r_2}=2$ $\quad \frac{\omega_1}{\omega_2}=5$

$r_1^2=x_1^2+y_1^2=4+28=32$

$r_1=4\sqrt{2}$

$\varphi_{1x}=\varphi_{2x}$ $\quad r_2^2=x_2^2+y_2^2=25+25\cdot7=25\cdot8=100\cdot2$

$r_2=10\sqrt{2}$

$x_1=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_{1x})$

$x_2=r_2\cos(\omega_2t+\varphi_{2x})$

$y_1=r_1\cos(\omega_1t+\varphi_{1y})$

$y_2=r_2\cos(\omega_2t+\varphi_{2y})$

$\cos\varphi=\frac{5}{10\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

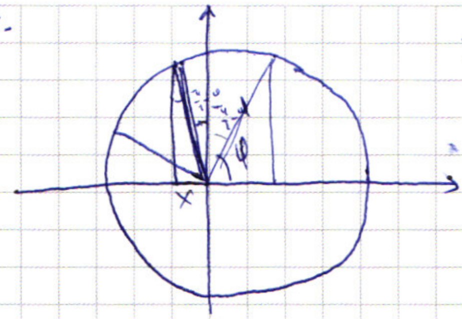
$\sin\varphi=\frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$(\omega_1-\omega_2)t_1=2\pi$

$\omega_2t_1=\frac{\pi}{4}$

$t_1=\frac{\pi}{4\omega_2}$ $\quad \omega_2t_1=\frac{\pi}{4}$

5.



$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \varphi = \varphi - \frac{\pi}{4}$

$X_0 = r\sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) =$

$= -r\sin\varphi \frac{\sqrt{2}}{2} + r\cos\varphi \frac{\sqrt{2}}{2} = \Big(-10\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} +$

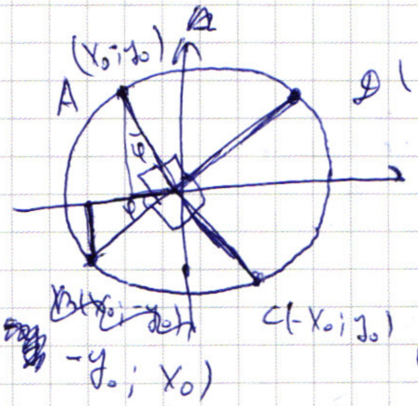
$+ 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\Big) = -\Big(-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{10\sqrt{7}}{2}\Big) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{10\sqrt{7}}{2} =$

$= \frac{5}{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{7})$

$y_0 = r\cos(\varphi - \frac{\pi}{4}) = r\cos\varphi\frac{\sqrt{2}}{2} + r\sin\varphi\frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 10\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\Big) = \frac{10(1+\sqrt{7})}{2\sqrt{2}}$

$4\omega_2\Delta t = 2\pi \qquad \omega_2\Delta t = \frac{\pi}{2}$



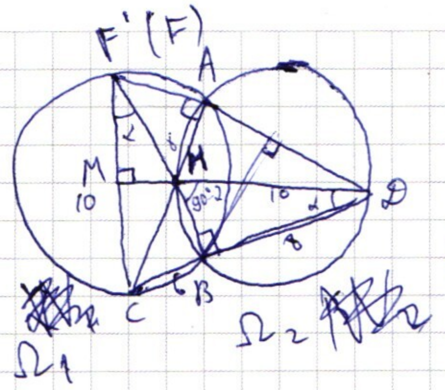
$A(X_0, y_0)$

$C(-X_0; -y_0)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$H \in AC$, $HB \perp CD$, $\angle CAD = 90^\circ$ $\Rightarrow H \in \Omega_2$

Обозначим первую окружность Ω_1, вторую Ω_2

$\angle HAD = 90^\circ \Rightarrow HD$ – диаметр ~~Ω_2~~

$HD = 10$

Продолжим BH.

$BH \cap \alpha = F'$

$\angle F'BC = 90^\circ \Rightarrow CF'$ – диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAF' = 90^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ$ $\Rightarrow F', A$ и D лежат на одной прямой. H – получается ортоцентром треугольника $CF'D \Rightarrow DH \perp CF'$

Обозначим $\angle CDH = \alpha \Rightarrow \angle BHD = 90^\circ - \alpha =$

$= \angle MHF' \Rightarrow \angle MF'H = \alpha$

$CF' = 10 = DH$, $\angle MF'H = \angle BDH$, $\angle M = \angle B = 90^\circ$ $\Rightarrow \Delta MF'H = \Delta BHD \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = BF' \Rightarrow F'$ это F

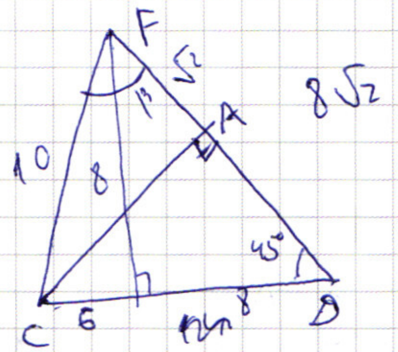
$CF = 10$

Если $BC = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow BF = 8 = BD$

$FD = 8\sqrt{2}$

7.



$$\frac{\sin\beta}{14} = \frac{\sin 45^\circ}{10} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

$$\sin\beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{98}{100}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$AF = 10\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{10\cdot\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

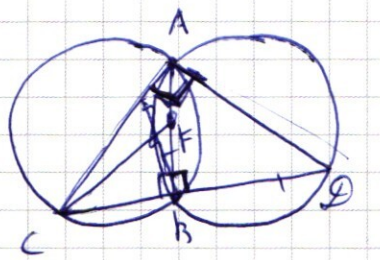
$\cancel{x\geq 2}$

$(x-2)^2+2x^4-3x^2|x-2|\geq 0$

$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=(x^2+10x+24)\sqrt{2}$

$(x^2+12x+36)(x^3-4x+80)=\cancel{4x^2+40x+96}\ 2(x^2+10x+24)^2$

$x^5-4x^3+80x^2+12x^4-48x^2+$

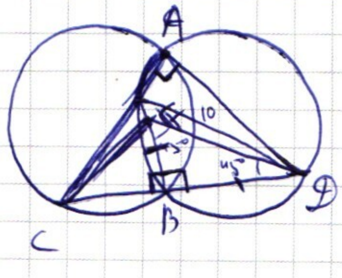


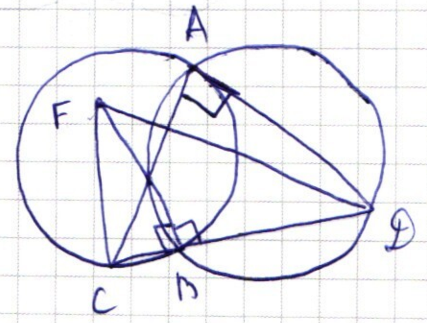
$R=5$

$\angle CAD=90°$

27 - 18

9 - 60





$64-32-80+48=0$

$80=32+48$

$18+5+12=35$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

$x\,{}^{3}_{8}$

$-|3x^3 - 6x^2|$

$240+48=288$

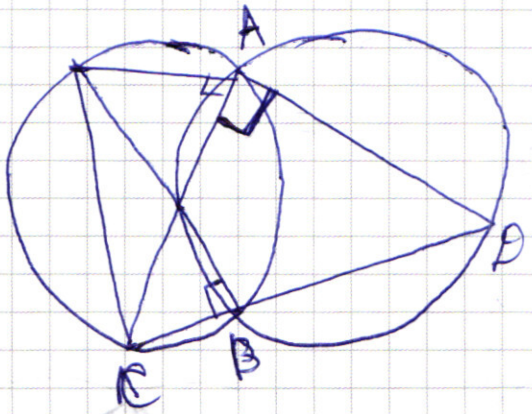
$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}(x^2+10x+24)$

$(x^2+12x+36)(x^3-4x+80)=2(x^2+10x+24)^2$

$x^5-4x^3+80x^2+12x^4-48x^2+96x+36x^3-$

$144x+2880=2x^4+$

$(x+5)^2-1=(x+4)(x+6)$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|y-6-x|+|y-6+x|=12$

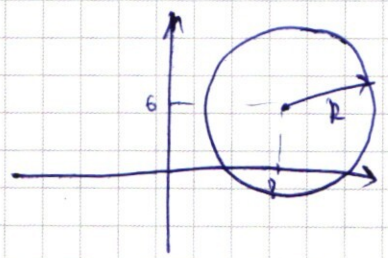
$|a|+|b|\ge|a+b|$

$|y-6-x|+|y-6+x|\ge 2|y-6|$ ⇒

$|y-6|\le 6$

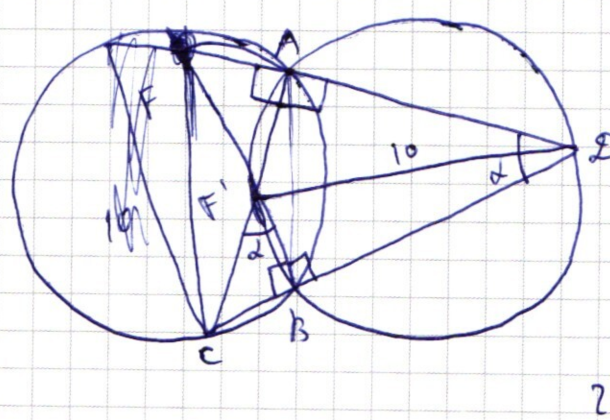
$\begin{cases} y-6\le 6 \\ y-6\ge -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\le 12 \\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y\in[0;12]$



$R=\sqrt{a}$

$\frac{6\cdot 8}{2}=24$



$x=2$

$2x^4$

$x^2=|x-2|$

$x^4=x^2-4x+4$

x^4-x^2+4x

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\ge 0$

x^2-4+8

$(x-2)(x+2)+8$

$(x-2)^2+2x^4\ge 3x^2|x-2|=2x^2|x-2|+x^2|x-2|$

$|x-2|(|x-2|-x^2)\ge 2x^2(|x-2|-x^2)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

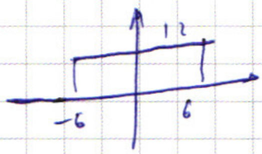
$|y-6-x|+|y-6+x|=12 \geq |y-6-x+y-6+x| = 2|y-6|$

$|y-6|\leq 6$

$y\in[0;12]$

$\left[\begin{cases} y-6-x\geq 0\\ y-6+x\geq 0\\ y=12\end{cases}\right.$

$y=12$ $x\leq 6$ $x\geq -6$



$$\begin{array}{r} \times\ 45\\ 56\\ \hline 270\\ +225\ \ \\ \hline 2520 \end{array}$$

$S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-2}$

q^2

$\dfrac{10b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$