

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+6)(x+4)$$

$$x = -6$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 8 \cdot 32 + 16x$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \quad x = 4$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \quad | \quad x-4 \\ \underline{x^3 - 4x^2} \\ -2x^2 - 20x \\ \underline{-2x^2 - 8x} \\ -12x + 48 \\ \underline{-12x + 48} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 4 \cdot 13$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13} \approx \frac{3}{2}, -1 \pm 3,5$$

Проверка по ОДЗ: $-36 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 80 < 0$ X -6

$4^3 - 4^2 + 80 \geq 0$ V 4

V

Ответ: 4; $-1 \pm \sqrt{13}$

№ 4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \Big| x-2 \Big| + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

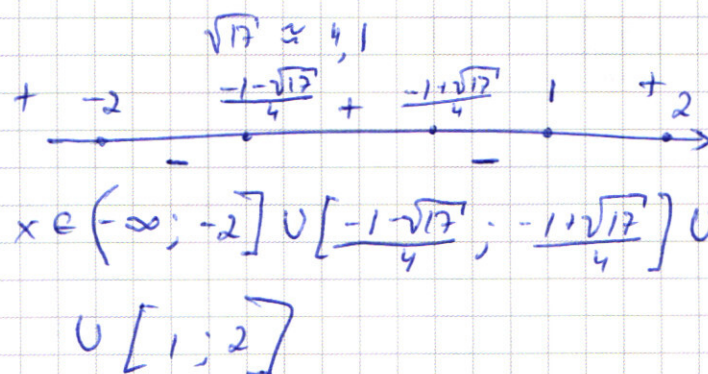
$$x < 2$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$(x-1)(x+2)\left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}\right)\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{-2\sqrt{7}}{-2} = \frac{5\sqrt{7}}{5} \Rightarrow \text{углы } \angle \text{ углов равны} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (0; 0)$, $(-2; -2\sqrt{7})$ и $(5; 5\sqrt{7})$ лежат на одной
прямой. r - радиус окр. водометки, $= \sqrt{4+4 \cdot 7} = 4\sqrt{2}$

$$R - \text{радиус жука} = \sqrt{25+25 \cdot 7} = 10\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{5}{2} r$$

Т.к. $V_{\text{вод.}} = 2 V_{\text{жук}}$, то если мы спроецируем водометку
на окр. жука, отн. центра, то $V'_{\text{вод.}} = \frac{R}{r} \cdot 2 V_{\text{жук}} = 5 V_{\text{жук}}$

Т.к. они крутятся в одну сторону, то если жук пройдет l ,
то водометка пройдет $5l$ и приблизится к нему на $4l$.

Т.к. проекция водометки и жук находятся в диаметрально
противоположных точках окр. жука, то жук должен пройти

$$\frac{2\pi R}{8} = \frac{\pi R}{4}, \text{ чтобы водометка с ним соединилась, т.к.}$$

и минимальное расстояние между жуком и водометкой

вступает в момент, когда их радиус-векторы сонаправлены.

$\Rightarrow$ Далее жук будет проходить $\frac{\pi R}{2}$, и водометка
снова будет его догонять. $\Rightarrow \tan(\alpha + 45^\circ) = [\alpha - \text{кат угл.}] =$

$$= \frac{\sin \alpha \cos 45^\circ + \cos \alpha \sin 45^\circ}{\cos \alpha \cos 45^\circ - \sin \alpha \sin 45^\circ} = \frac{\frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{7}+1}{1-\sqrt{7}} = \frac{8+2\sqrt{7}}{-6} = -\frac{4+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -\frac{4+\sqrt{7}}{3} x$ - прямая, на которой первый раз встретятся
жук и водометка.

$$\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^2 x^2 + 9x^2 = 200$$

$$x^2 = 200 \cdot \frac{9}{(4+\sqrt{7})^2 + 9} = \frac{1800}{9+16+7+8\sqrt{7}} = \frac{\cancel{1800} 225}{4+\sqrt{7}}$$

$$x = \frac{\cancel{15}}{9} \cdot \frac{15\sqrt{4-\sqrt{7}}}{9} = -\frac{5}{3} \sqrt{4-\sqrt{7}}$$

$$\cancel{y^2 = \frac{225}{4+\sqrt{7}} \cdot \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^2} \quad \cancel{y = \frac{15}{3} \cdot \sqrt{4-\sqrt{7}} = 5}$$

$$y = \frac{15}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} \cdot \frac{4+\sqrt{7}}{3} = 5 \sqrt{4+\sqrt{7}}$$

=) Ответ: точки

$$\left(-\frac{5}{3} \sqrt{4-\sqrt{7}}; 5 \sqrt{4+\sqrt{7}}\right);$$

$$\left(-5 \sqrt{4+\sqrt{7}}; -\frac{5}{3} \sqrt{4-\sqrt{7}}\right);$$

$$\left(\frac{5}{3} \sqrt{4-\sqrt{7}}; -5 \sqrt{4+\sqrt{7}}\right);$$

$$\left(5 \sqrt{4+\sqrt{7}}; \frac{5}{3} \sqrt{4-\sqrt{7}}\right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

$$a \geq 0$$

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

Решить и построить график.

1. $y \geq 6+x$

2. $y < 6+x$

• $y \geq 6-x$

• $y \geq 6-x$

$$y-6-x+y-6+x=12$$

$$y-6+x-y+6+x=12$$

$$y=12 \quad x \in [-6; 6]$$

$$x=6 \quad y \in [0; 12)$$

• $y < 6-x$

• $y < 6-x$

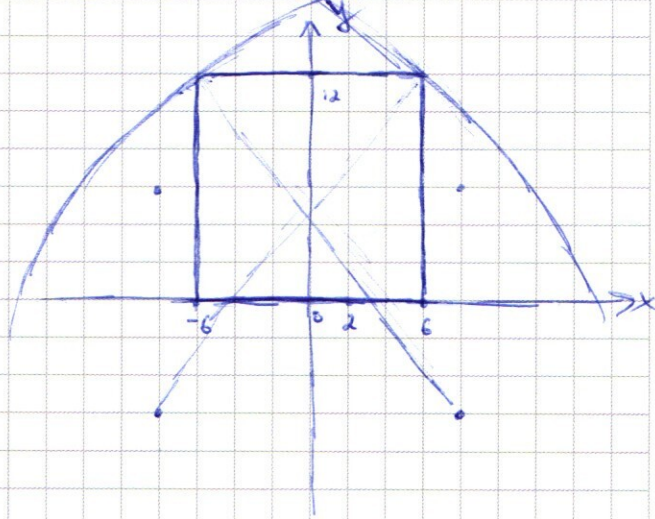
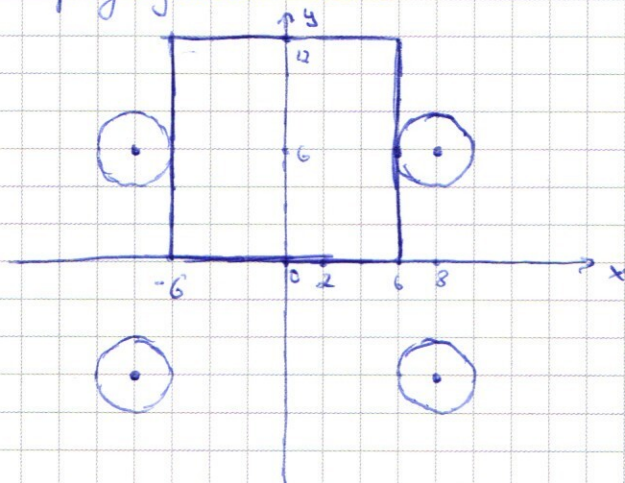
$$y-6-x-y+6-x=12$$

$$-y+6+x-y+6-x=12$$

$$x=-6 \quad y \in [0; 12)$$

$$y=0 \quad x \in (-6; 6)$$

$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$ - график 4-х окруж. с центрами
в точках ~~6~~ $(8; 6)$; $(-8; 6)$; $(-8; -6)$; $(8; -6)$ и
радиусами $\sqrt{a}$.



Имеем лишь 2 пересечения с графиком первого
ур-ия только в двух данных случаях. Они выполняются
при $a = 2^2 = 4$; $a = (8+6)^2 + (6+12)^2 = 196 + 324 = 520$
Ответ: 4; 520

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

5 и 7 цифры по другому не
представимы, а $2 \cdot 2 = 4$

0 быть не может, т.к. произведение = 700.

Значит остальные цифры = 1.

=>

Число, состоящее из:

7; 5; 5; 2; 2; 1; 1; 1

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

Число, состоящее из:

7; 5; 5; 4; 1; 1; 1; 1

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

$$840 + 1680 = 2520$$

Ответ: 2520

№2

$$S_n = b_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S = b_1 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1}, \text{ где } q = \frac{b_2}{b_1}$$

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3000}$ - геом. прогрессия с первым членом $b_1 q^2$

$$\text{и } q_1 = \frac{b_2}{b_1} = q^2 \Rightarrow S_{3000} = [\text{сумма этой прогр.}] = b_1 q^2 \cdot \frac{(q^{1000} - 1)}{q - 1} =$$

$$= b_1 q^2 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \quad \text{По условию, } S + (50 - 1) S_{3000} = 10S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49 S_{3000} = 9S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49 b_1 q^2 \frac{(q^{3000} - 1)}{(q^3 - 1)(q^2 + q + 1)} = 9 b_1 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1} \Rightarrow 49 q^2 = 9 q^2 + 9 q + 9$$

$$\Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 39^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ т.к. все члены посл. } > 0$$

$b_2, b_4, b_6, \dots, b_{3000}$ - тоже геометрическая посл. с перв. членом $b_1 q$

$$\text{и } q_{\text{с2}} = \frac{b_4}{b_2} = q^2. \text{ Сумма этой прогрессии } S_{\text{с2}} = b_1 q \cdot \frac{(q^2 - 1)}{q^2 - 1} =$$

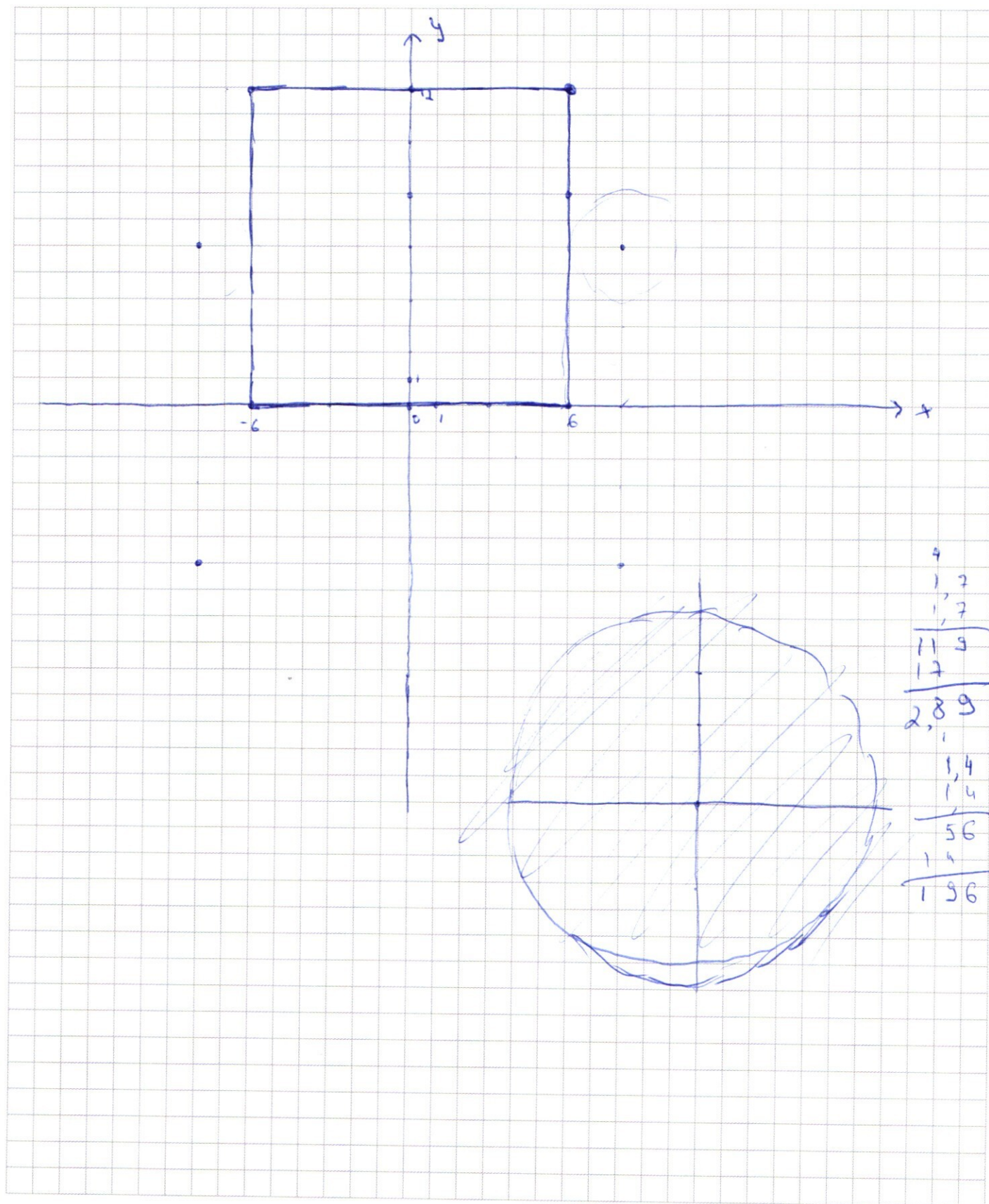
$$= b_1 q \frac{(q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q + 1)}. \quad \frac{S + S_{\text{с2}}(2 - 1)}{S} = \frac{S_{\text{с2}}}{S} + 1 =$$

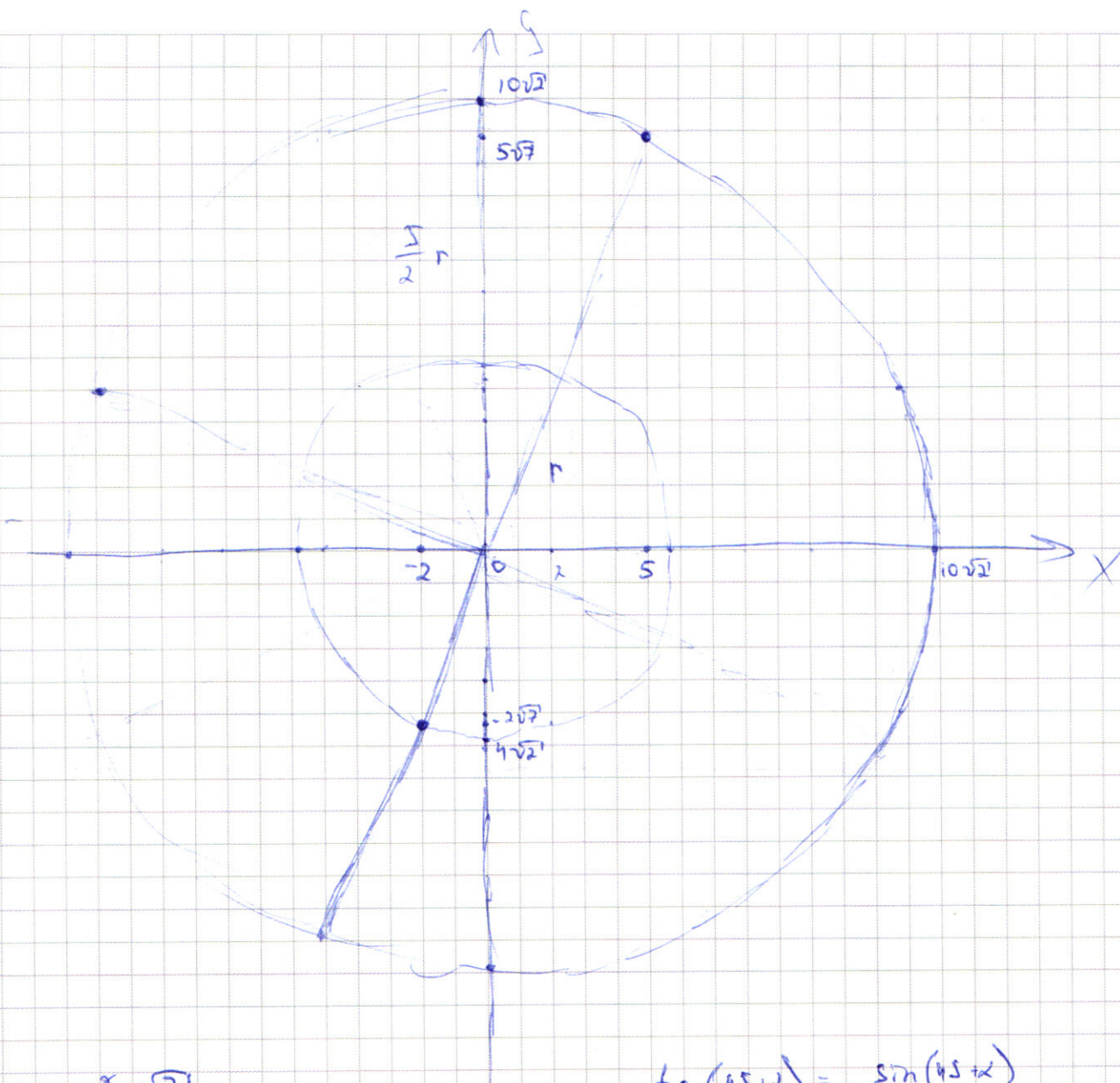
$$= b_1 q \frac{(q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q + 1)} \cdot \frac{q - 1}{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)} + 1 = \frac{q}{q + 1} + 1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + 1 =$$

$$= \frac{11}{8}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{8}$ раза

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$5\sqrt{2}$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha)} =$$



$$\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{3} - \frac{1}{4}$$

$$\cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos 30^\circ + 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{4\sqrt{3} - 1}{4}$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ + 30^\circ = \cos 30^\circ \cos 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ + 30^\circ = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$\cos 30^\circ \cos 30^\circ$$

$$\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$$

$$\frac{1800}{8} = 2250$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x^2 + 10x - 24 = y \\ y = \frac{x^3}{2} \end{cases} \quad y = (x+12)(x-2)$$

~~$$x^3 - 1 = x^2 + 10x - 25$$~~
~~$$(x-1)(x^2+x+1) = (x-1)$$~~

~~$$(x+11)(x-1) = x^2 + 10x - 11$$~~

$$16 - 40 - 24$$

$$16 + 40 - 24$$

$$-32$$

$$32$$

$$3 \quad 9 \quad 27 \quad 81$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \quad 64 \\ \quad 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$2 \cdot 256 - 3 \cdot 64 + 7 \cdot 16 - 16 \cdot 4$$

$$2 \cdot 81 - 81 + 7 \cdot 9 - 4 \cdot 3 + 4$$

$$81 + 63 - 12 + 4$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x-1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ 5x^3 - 5x^2 \\ \underline{5x^3 - 5x^2} \\ 2x \end{array}$$

$$2 - 3 + 7 - 4 + 4$$

$$2 \cdot 81 - 3 \cdot 8 + 7 \cdot 4 - 8 + 4$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4$$

$$16 + 20 - 4$$

$$2x$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4 \quad | \quad x+2 \\ \underline{2x^3 + 4x^2} \\ -x^2 + 2x \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x - 4 \end{array}$$

$$8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

$$1 + 16$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$
 $7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1$
 $\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

$\frac{120}{7} = 1680$
 $7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1$
 $\frac{8!}{2 \cdot 4!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$

$\frac{1}{2} = 3$

$b_3 = b, q^{3 \cdot 2}$
 $b_6 = b, q^3$
 $S_n = b, q^2$

$\frac{1}{680} \quad b, b, q, b, q^2, b, q^3, b, q^4, b, q^5, b, q^6, q^7, q^8$
 $\frac{840}{2520} \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$S_n = b, + b, q + \dots + b, q^{n-1}$
 $q S_n = b, q + \dots + b, q^n + b, q^n$
 $S_n q - S_n = b, q^n - b,$
 $S_n = b, \frac{(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b, q^n - b,}{q - 1}$

$S_{3000} = b, q^2 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$
 $S = b, \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1}$
 $S_{2n} = b, q \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$
 $\frac{S}{S_{2n}} = b, \frac{(q^{3000} - 1)}{q - 1} \cdot \frac{(q - 1)(q + 1)}{b, q (q^{3000} - 1)} = 49 q^2 = 9 q^2 + 9 q + 9$
 $40 q^2 - 9 q - 9 = 0$
 $D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 13^2 - 3^2 = 39^2$
 $q = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{3}{5} = 0,6$
 $x \cdot 2q \cdot x = S_n \quad q = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{3}{5} = 0,6$
 $2q(b, + b, q^2 + b, q^4)$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$(x+6)(x+4) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+6)(x+4)$$

$$x = -6$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 32 + 16x$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^2 + 16 + 8x$$

$$2 \cdot 3$$

$$27 - 9 \cdot 2 - 3 \cdot 20$$

$$9 - 60 = -51$$

$$-27 - 18 - 60 + 48$$

$$x \geq 2$$

$$x < 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 + 3 + 7 + 4 + 4 \geq 0$$

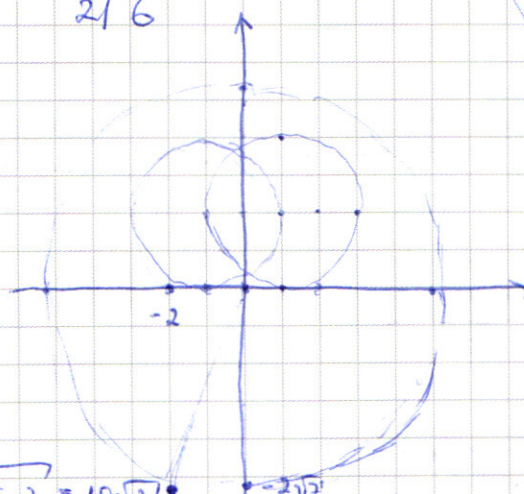
$$2 - 3 + 7 + 4 + 4$$

$$8 - 6\sqrt{2} + 14 - 4\sqrt{2} + 4$$

$$32 - 3 \cdot 8 + 7 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$$



$$\sqrt{4 + 4 \cdot 7} =$$

$$= 4\sqrt{2} = R_2$$

$$R_x = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{7}$$

$$\lg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\cos^4 = \sqrt{\frac{1}{\lg^2 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{B}{251r} \div \frac{251r}{+} =$$

$$\frac{B}{251} \div \frac{251}{+}$$

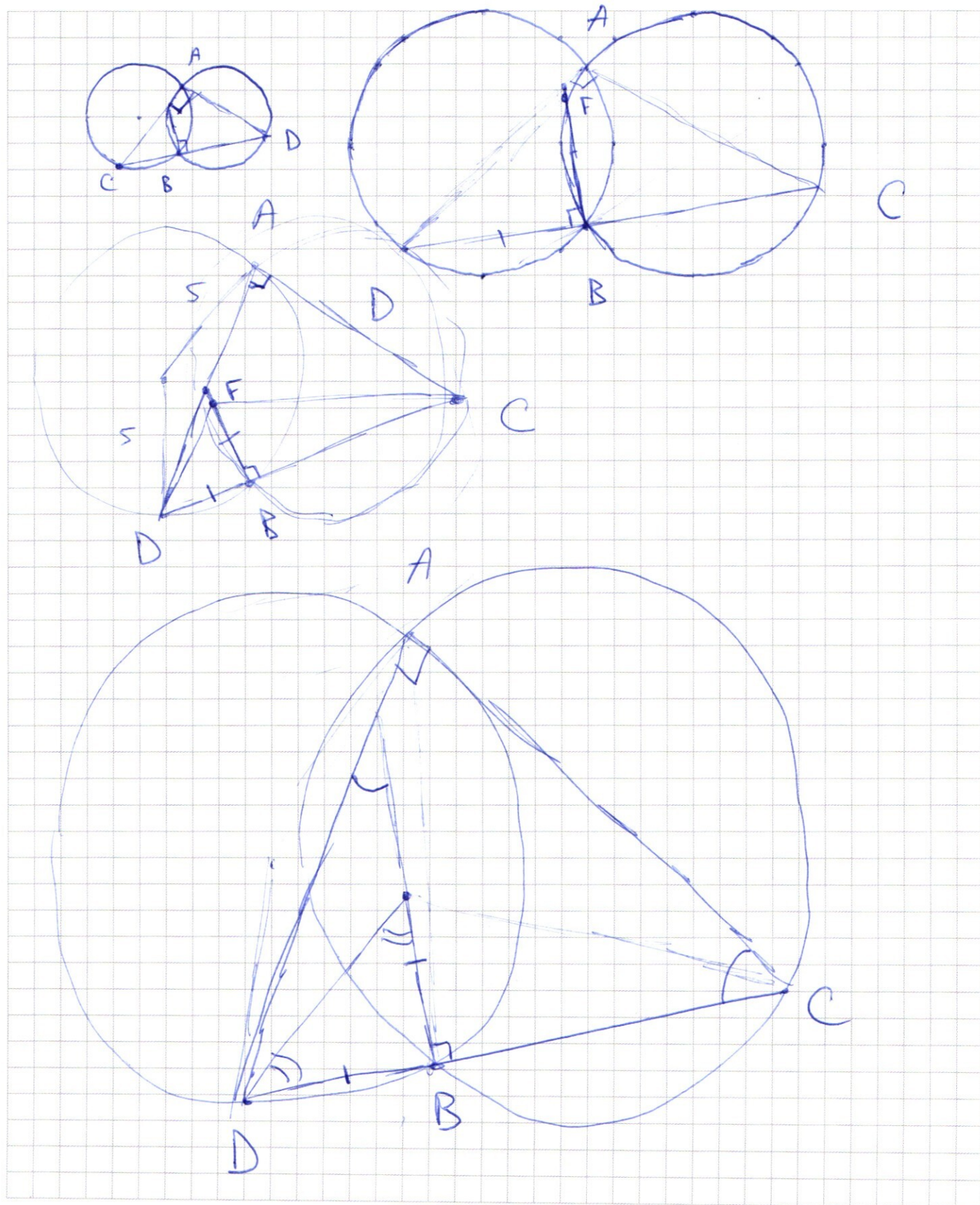
$$251 \div \frac{251}{5}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$(x-1)^2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|y-12| + |y-12| = 12$$

$$|y| + |y-12| = 12$$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

$$a \geq 0$$

$$y \geq 6+x$$

$$y < 6+x$$

$$y \geq 6-x$$

$$y < 6-x$$

$$y \geq 6+x$$

$$\bullet y \geq 6-x$$

$$y-6-x + y-6+x = 12$$

$$y = 12$$

~~х произв~~

$$y \geq 6$$

$$\bullet 6 \geq x$$

$$x \geq -6$$

$$x \in [-6; 6]$$

$$\bullet y < 6-x$$

$$y-6-x - y+6-x = 12$$

$$x = -6$$

$$y \in [0; 12)$$

$$y < 12$$

$$y \geq 0$$

$$y < 6+x$$

$$\bullet y \geq 6-x$$

$$y-6+x - y+6+x = 12$$

$$x = 6$$

$$y \in [0; 12)$$

$$y \geq 0$$

$$y < 12$$

$$\bullet y < 6-x$$

$$-y+6+x - y+6-x = 12$$

$$y = 0$$

$$x \in [-6; 6)$$

$$x \geq -6$$

$$x < 6$$