

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [5 баллов] Бросили 90 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что эта сумма не меньше 500, или того, что эта сумма меньше 130?
2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S , а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 4 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 3 раза. А во сколько раз увеличится S , если разность исходной прогрессии увеличить в 2 раза (оставив первый член неизменным)?
3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 + x - 90} + 7) |x^3 - 10x^2 + 31x - 28| \leq 0$.
4. [5 баллов] Решите уравнение $5x^4 + x^2 + 8x - 6x^2|x + 4| + 16 = 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(-2; 4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет наибольшим.
6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{4}{3}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 2$.
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = 64, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Т.к. вероятность выпадения каждого
цикла на 1 кубике равна.

вероятности выпадения.

цикла X (от 1 до 6) = вероятности
выпадения цикла $7-X$

Это правило¹ соблюдается для всех
90 кубиков.

Вероятности выпадения суммы на
кубиках $n =$ вероятности выпадения
суммы $7 \cdot 90 - n$.

минимальная сумма $n = 90 \cdot 1 = 90$,
а максимальная $90 \cdot 6 = 540$.

Потому вероятности выпадения

$n = 540 =$ вероятности выпадения $n = 630 - 540 = 90$

$n = 539 = n = 91$ вероятность выпадения

$n = 538 = n = 92 \Rightarrow$ все суммы от 7500
... = вероятности выпадения

$n = 501 = n = 129$ выпадения любой суммы < 130

вероятности того что выпадет
суммы ≥ 500 больше чем вероятности

то, что выведет ~~маленькие~~ сумму
 меньше 130, если сумма = 500
 может выдать, а она выведет
 может. пример: $60 \cdot 50 + 5 \cdot 40 = 300 + 200 = 500$
 (50 кубиков по 6) (40 кубиков по 5).



Отбави. вероятности выведения
 суммы ≥ 500 больше

12. $S = na_1 + \frac{(n-1)nd}{2}$ (т.к. $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \dots, a_k = a_1 + (k-1)d$)

$S = a_1 + a_1 + d + \dots + a_1 + (n-1)d$
 кол-во $(a_1) = n$
 кол-во $(d) = 0 + 1 + 2 + \dots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$

$d_2 = 4d$

$S_2 = na_1 + \frac{(n-1)nd_2}{2} = na_1 + 2n(n-1)d$

$S_3 = S_2$

$3na_1 + \frac{3n(n-1)}{2}d = na_1 + 2n(n-1)d$

$4na_1 = n(n-1)d$

$4a_1 = (n-1)d, n \neq 0$ (это невозможно, т.к. если $n=0$,
 то в S нет ни 1 кубика)

$S_3 = na_1 + \frac{n(n-1)d_3}{2} \quad d \Rightarrow S_2 = S$

$d_3 = 2d$

$S_3 = na_1 + n(n-1)d$

$\frac{S_3}{S_2} = \frac{na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}{na_1 + 2n(n-1)d} =$

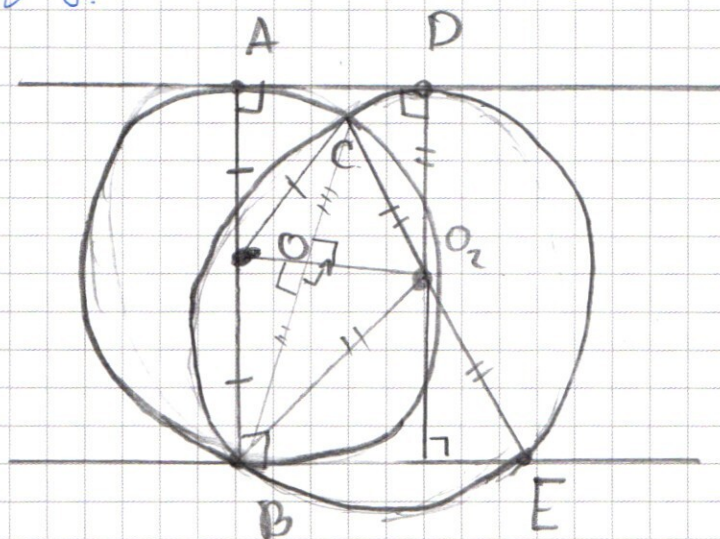
$= \frac{na_1 + 2na_1}{na_1 + 4na_1} = \frac{3na_1}{5na_1} \quad n \neq 0, a_1 > 0$

(т.к. $4na_1 = n(n-1)d$)

$\frac{3na_1}{5na_1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S_3}{S} = \frac{5}{3}$
 ⇓

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Отвечать в $\frac{5}{3}$ раз
н.б.



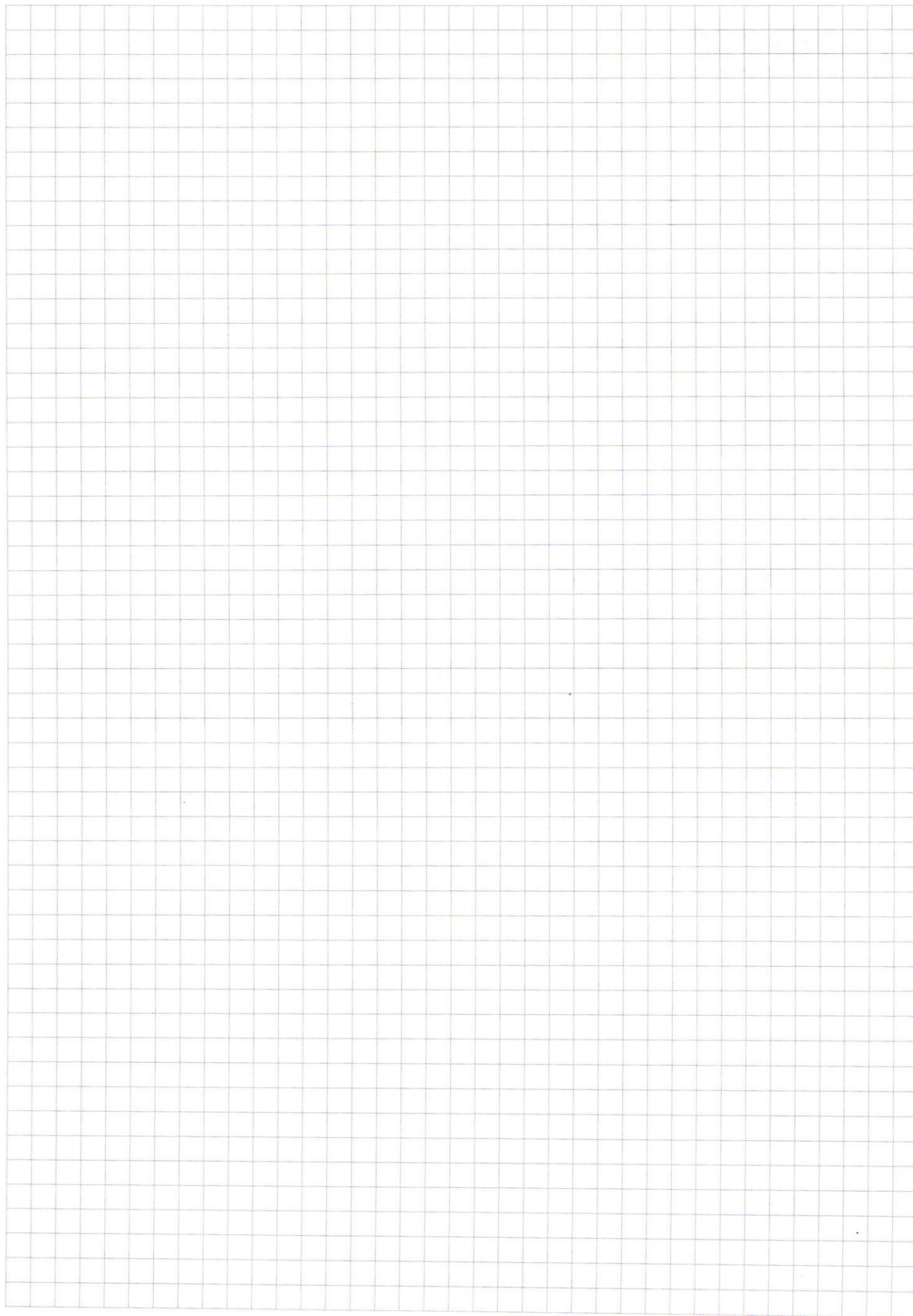
$O_2C = O_2E = O_2B = O_2D$
 R_2 (радиусы окружности
 W_2)
 $O_1C = O_1A = O_1B = O_1E$
 R_1 (радиусы окружности
 W_1)
 $S_{BO_1CO_2} = \frac{4}{3} S_{BO_2E}$

$\Delta O_1CO_2 = \Delta O_1BO_2$ по 3 сторонам (O_1, O_2 - общ.).
 пусть $\angle O_2EB = \alpha$. $\Rightarrow \angle O_2BE = \angle O_1EB = \alpha$

$\angle EBO_1 \stackrel{\parallel}{=} 90^\circ - \alpha = \angle O_1CO_2$ (из равенства Δ)

$\angle BO_2E = 180^\circ - 2\alpha$.

$\angle CO_1B + \angle CO_2B = 360^\circ - 180^\circ + \alpha = 180^\circ + \alpha$.



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Рассмотрим графики уравнения.

$$(|x-8|)^2 + (|y-15|)^2 = 289$$



$$(8-x)^2 + (15-y)^2 = 289$$

$$(x-a)^2 + y^2 = 64 \Leftrightarrow (a-x)^2 + (0-y)^2 = 64$$

Графиком 2 уравнения является окружность с центром в точке $(a; 0)$ и радиусом 8.

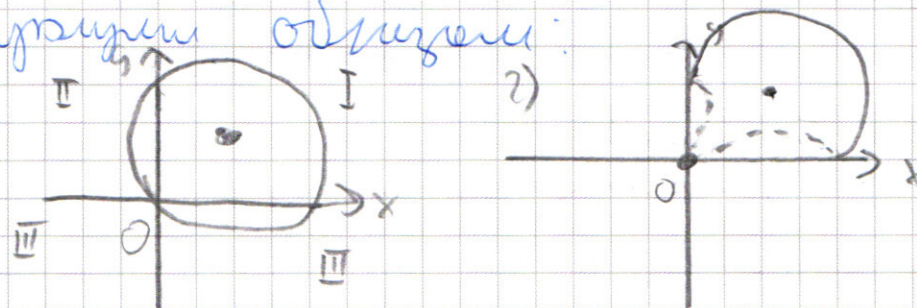


при изменении a график данного уравнения будет „ездить“ вдоль оси X , при увеличении a он будет смещаться в правую сторону, при уменьшении в левую.

Графиком уравнения ~~$(x-8)^2 + (y-15)^2 = 289$~~ также является окружность с центром в точке $(8; 15)$ и радиусом 17. Но т.к. в нашем уравнении использованы не x и y , а $|x|$ и $|y| \Rightarrow$ график изменится: все точки, которые приближались первоначально окружности-

ти 4. А также какие-либо значения
положительной и отрицательной координаты
больше в график вносить не будем.

↓
график изметится примерно сле-
дующим образом:



(если $x \geq 0$ и $y \geq 0$), то $9x^2 + 16y^2 = 17z^2$ график
переходим к нулю, т.е. точку $(0,0)$

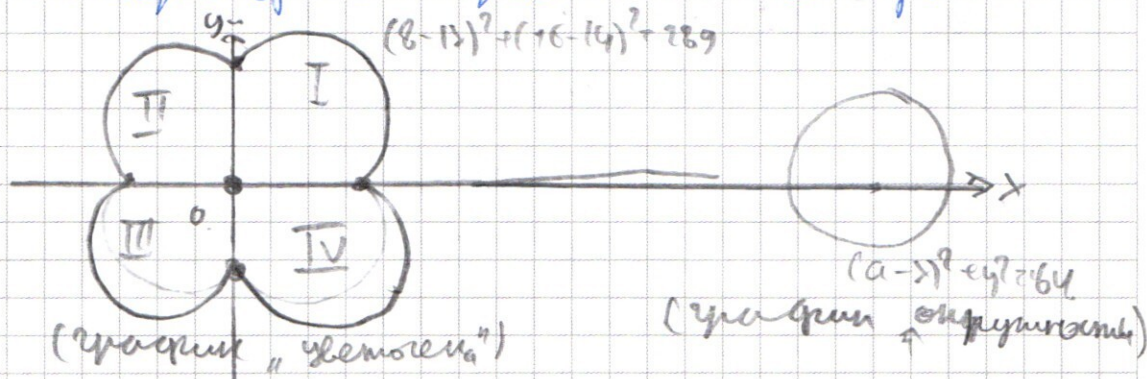
↓
в III четверти координатное пространство
он не входит теперь как как мы заметили
 x на $|x|$ и y на $|y|$, то точки, которые
возникают. имеют какую-либо отри-
цательную координату, отражена
относительно 1 из осей координат,
и числовое уравнение не будет
теперь число могут удовлетворять
точки которые так же могут лежать
на отрезке части окружности, либо
симметричны им относительно 1 из ос-
ей координат, либо симметричны им
относительно начала координат.

т.е. $I \sim X \sim I$ и если $F(x) = |x|$ то $F(-x) = x$
 $F(x) = x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Есть и еще $F(y) = |y|$, то $F(-y) = y$ и $F(y) = y$

нечетный график примет вид:



Теперь нам надо объединить все в систему.

Есть график в форме "цветка" и окружность, центр которой лежит на оси x и перемещается вдоль нее).

Система будет иметь ровно 2 корня тогда и только тогда, когда 2 графика 2 уравнения системы будут пересекаться в 2 точках.

Заметим, что график "цветка" (уравнение 1) симметричен относительно оси Oy .

Также, центр окружности (срав графика уравнения 2). Задайте параметром $a \geq 0$ и нам необходимо найти все значения a при которых система имеет

2 решения, но это равносильно тому, что нам необходимо найти все такие точки на оси Ox , что

окружность с центром в этих точках и радиусом $\sqrt{2}$ целиком вписана в $\triangle T$.

переведем с «цветочком»

Окружность (или часть круга) в такие точки с координатами x , координаты, и вписана в $\triangle T$ и симметрична относительно Oy (т.к. график функции симметричен относительно Oy).

Хорошо. Будем теперь гадать, каково направление. Основание AB лежит на Ox и $A(0,0)$.

Нам заранее известны точки пересечения функции с Ox и Oy . (1) $(|x|-8)^2 + 15^2 = 17^2$

откуда

$$x = \pm 16, x = 0.$$

Окружность стоит в т. $(0,0)$ — значит — это

$$(2) \quad y^2 + 8^2 + (15-14)^2 = 17^2$$

$$y \geq 0, \quad y = \pm 30.$$

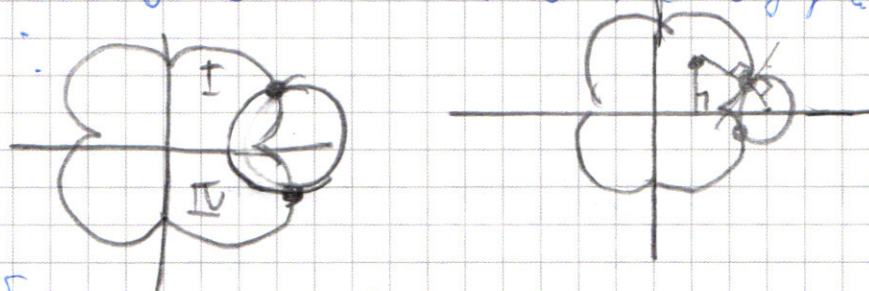
значит, что $A(0,0)$.

И так, окружность стоит в $T(0,0)$, но она не касается графика функции ни в 1 точке, т.к. радиус $\sqrt{2}$, а $\triangle T$ — это такая точка «цветочка».

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

лемма на расстоянии 16 от центра.
 Теперь будем перебирать окружности
 вправо, т.е. увеличивать a пока
 они ~~не пересекут~~ не пересекут окружность
 единичную и точку $(0; 0)$ пока
 увеличим $(16; 0)$. $\Rightarrow$ (касание $(0; 0)$) $\Rightarrow$
 вверху окружность касалась с осью.
 при этом a окружность касалась и
 центр координат $m.k.$ $a = 8$, и $(8^2 + 0^2 = 8^2$
 и $(16-8)^2 = 64^2$. - Означает т.е. увеличивая окруж-
 ность не пересекут, т.е. ~~не пересекут~~ ^{max} ~~не пересекут~~
 координаты окружности $= 8$, а центр
 окружности, из точек концы
 сегменты увеличиваем $|x| = 8$ $|y| = 16 \Rightarrow$.
 т.е. у координат увеличиваем x до 8
 $x = 16$ лемма выше 8 (касание точек $(0; 0)$, $(16; 0)$)
 $\Downarrow$
 при $a = 8$ ~~окружности~~ ~~не пересекут~~ графики
 пересекаются в 2 точках.
 Если увеличить окружность вправо
 дальше она также будет пересекаться
 с окружностью в 2 ~~точках~~ ~~точка~~ точках.

1 в IV. касательная к четверти и 1 в I
 (0,0) больше она касается не будет и (16,0)
 тоже).



Это будет совершенно произвольная
 пока окружность не коснется
 точки "узелочка" (16, 0), это произойдет
 совершенно при $a = 16 + 8 = 24$.

Тогда эта графика имеет уже
 3 точки пересечения, $\Rightarrow$ все условия
 уже выполнены при $a \in [8; 24)$.

Далее пока окружность не коснется
 линии касания узелочка она

будет пересекать его в 4 точках
 когда окружность коснется касания
 узелочка, то она его коснется в

2 симметричных относительно оси

0x точек. в I и IV четвертях $\Rightarrow$

три условия касания к четвертям
 точки. Остаточное а удовлетворяет

условию, если соединить точки (8; 15) и
 (a; 0) то по формуле дуги окружности $= 17 +$
 $+ 8 = 25$. тогда сохраним условие.

$$15^2 + (a - 8)^2 = 25^2 \Rightarrow (a - 8)^2 = 400 \quad a - 8 \geq 0$$

$$a = 28$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⇒ где $a \in [8; 24)$ ~~или~~ $a \in \{28\}$

Если же мы проанализируем
окружности $a \in [8; 24)$, то они a a a
не будут пересекаться, учитывая $a \in [8; 24)$

и $a \in \{28\}$ $a \in [8; 24) \cup \{28\}$
и $a \in \{28\}$ $a \in [8; 24) \cup \{28\}$

$a \in [-28] \cup (-24; -8] \cup [8; 24) \cup \{28\}$

Ответ: $a \in [-28] \cup (-24; -8] \cup [8; 24) \cup \{28\}$

15. Радиус окружности по которому
находим a a a
соответственно $\sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$.

Радиус окружности a a a
 $\sqrt{(-2)^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+32} = 6$

Получив a a a
координаты a a a
 $(x; y)$ и a a a
теперь a a a
через $(0; 0)$ a a a
и a a a

каркас в 2,5 раза больше диаметра
 нескара $\Rightarrow$ и $R_{\text{вн}} : R_{\text{внн}} = 2,5$
 нескара в 2 раза больше R каркаса
 а диаметр окружности $= 2R$ $\Rightarrow$

диаметр окружности $R_{\text{вн}} : R_{\text{внн}} = 2,5$ $\Rightarrow$

каркас за какое-то время x

будет перемещаться со скоростью v
 в 5 раз больше скорости v в 5
 раз больше, чем v на который
 перемещается нескара.

Если нескара ~~будет~~ ^{применяет} ~~применяет~~
 угол в 180° градусов, то каркас
 применяет $180^\circ \cdot 5 = 900^\circ = 720^\circ + 180^\circ$.

Два случая будем считать $\frac{\pi}{x}$
 путь нескара ~~будет~~ ^{применяет} $\frac{\pi}{x}$,
 тогда каркас применяет $\frac{5\pi}{x}$, минималь-
 ное расстояние будет между нескаром
 будет тогда, когда они находятся
 на противоположных сторонах окружности
 т.е. угол в π $\angle = \pi$

$$\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} = \frac{5\pi}{x} \quad \Downarrow$$

$$\frac{x\pi}{x^2} = 4\pi$$

$$x\pi = 4\pi$$

$$x = 4$$

Если нескара применяет $\frac{5\pi}{x}$
 $x \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{\pi}{x} < \frac{5\pi}{x}$, то каркас $\frac{5\pi}{x}$
 между ними будет минималь-
 ное расстояние

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

На рисунке изображены две лампы накаливания мощностью 100 Вт и 40 Вт, подключенные к сети 220 В. В первом случае лампы соединены последовательно, во втором — параллельно. Требуется рассчитать ток в цепи и мощность, потребляемую лампами.

Т.к. лампы соединены последовательно, то ток в цепи одинаков. Мощность лампы рассчитывается по формуле $P = UI$. Для лампы 100 Вт ток равен $I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{100}{220} \approx 0,45$ А. Для лампы 40 Вт ток равен $I_2 = \frac{P_2}{U} = \frac{40}{220} \approx 0,18$ А. Поскольку лампы соединены последовательно, ток в цепи будет равен наименьшему току, т.е. $I = 0,18$ А.

$$\frac{P_1}{U} + \frac{P_2}{U} = \frac{5P_1}{U} - 2Ik$$

(минимум мощности)

$$x \cdot 100 + x \cdot 40 = 400x$$

$$140x = 400x$$

$$260x = 400x$$

$$\frac{100}{x} = \frac{500}{x} - 2Ik$$

(минимум)

$$2Ikx = 400$$

$$2Ikx = 400$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{x^3+x-90}+7 \leq 0 \\ x^3-10x^2+31x-28=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^3+x-90} \leq -7 \\ x^3+x-90 \leq -49 \\ x^3+x-90 < 0 \\ |x^3+x-90| \geq 49 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{16}{x} + 24}{x} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{16 + 24x}{x^2} + 1 = 0$$

$$16 + 24x + x^2 = 0$$

$$6x^3 + x^2 - 24x - 16 = 0$$

$$\frac{16}{x^3} + \frac{24}{x^2} + \frac{1}{x} - 6 = 0$$

$$16 + 24x + x^2 - 6x^3 = 0$$

$$a_1 a_2 = 41$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

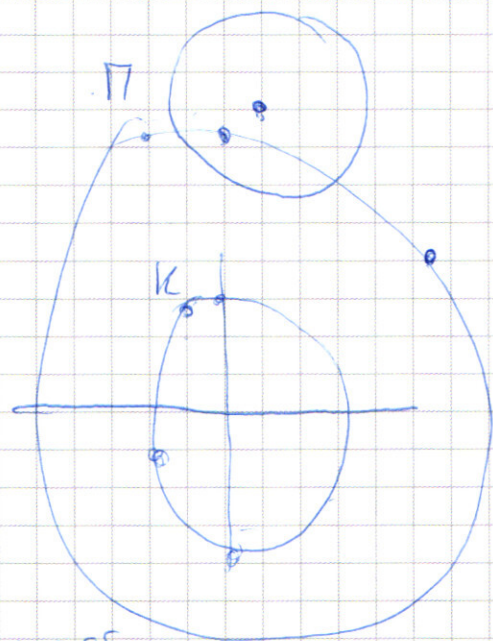
$$x^3 + x^2 - 41 = 0$$

$$5x^4 + x^2 + 6x - 6x^3 - 24x^2 + 16 = 0$$

$$5x^4 - 6x^3 - 23x^2 + 6x + 16 = 0$$

$$\begin{array}{r} 5x^4 - 6x^3 - 23x^2 + 6x + 16 = 0 \\ 5x^4 - 15x^3 - 24x^2 - 16x + 16 = 0 \\ \hline 9x^3 + 6x + 32 = 0 \\ 9x^3 + 27x^2 + 27x + 32 = 0 \\ \hline -21x^2 - 21x - 16 = 0 \\ -21x^2 - 21x - 16 = 0 \\ \hline 5x + 15 = 0 \\ 5x + 15 = 0 \\ \hline 2x + 10 = 0 \end{array}$$

на $\mathbb{R}$



$4 + 32$

6.

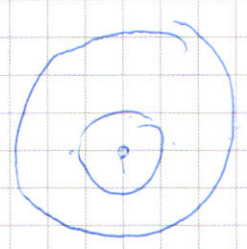
$a_1 a_2 a_3 z = 1$

$a_1 a_2 a_3 a_4, a_1 a_2 a_3 = 0$

$a_1 a_2 a_3 = 1$

$g_k z, 5 \sqrt{m}$

$x^3 + x - 1 \leq 0$

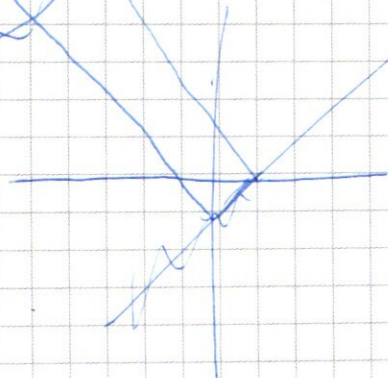
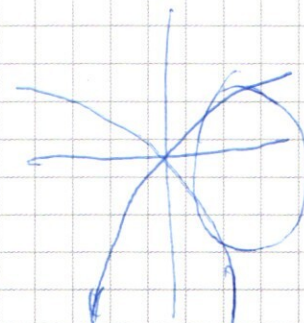
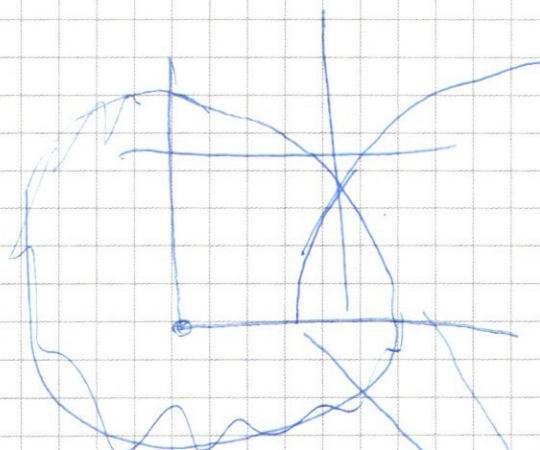
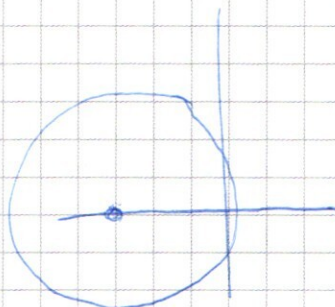
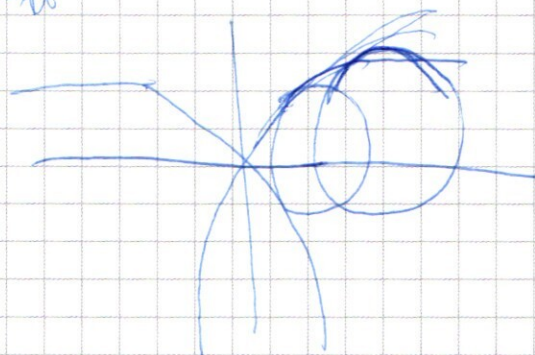
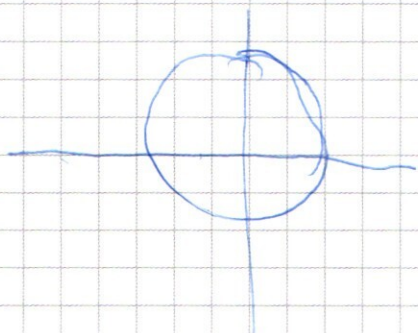


$x^2 + y^2 = 9$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

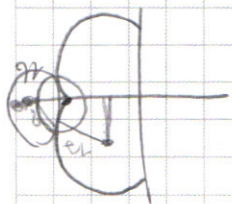
Б-1-24-16



225

64

229



Q E X

$$n = 2 \times$$

$$0 = (x)9x - 2x$$

$$h_9 = (8 - X)$$

0

26

0 x

26th

0 V

✓

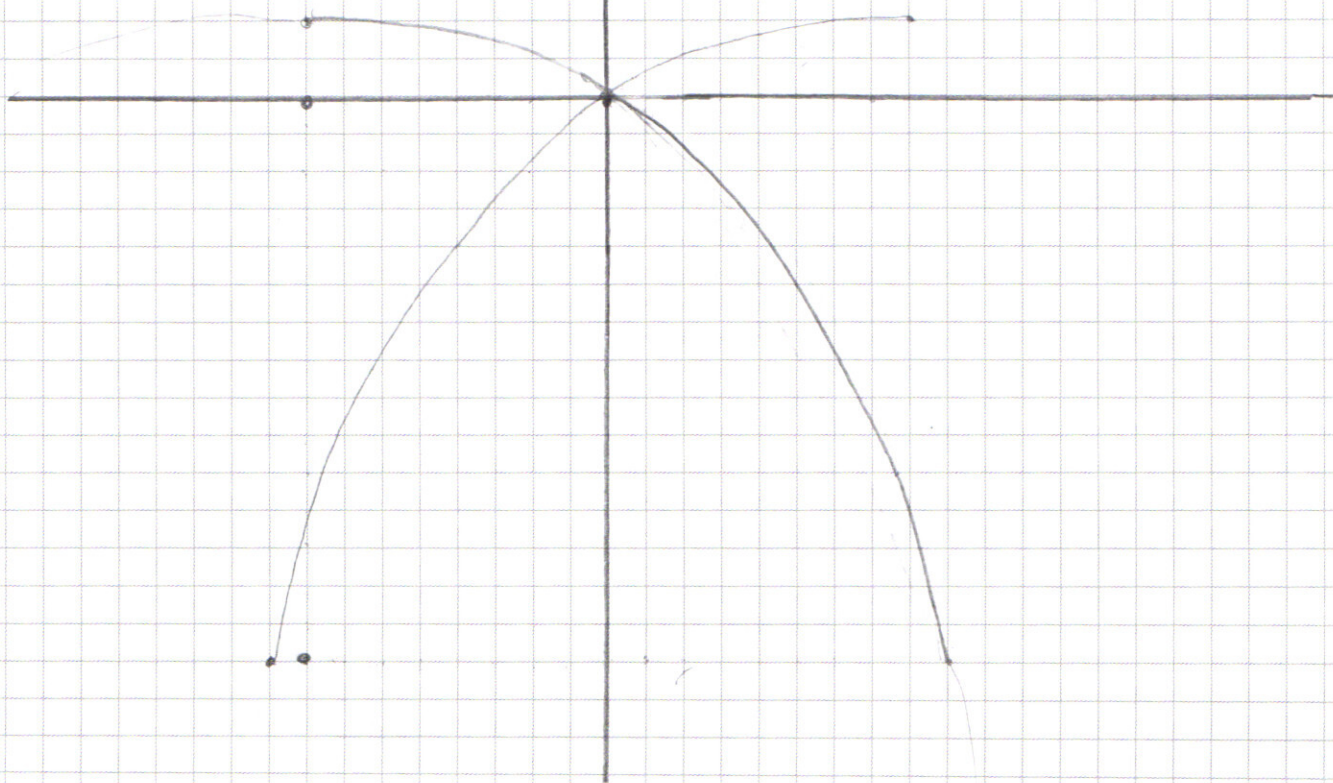
18

2

6

13

A handwritten lowercase letter 'v' on a four-line grid. The letter is formed with a single stroke, starting from the middle dashed line, going down to the bottom solid line, and then up to the top solid line.



225

Q22b x

0012 (2-8)

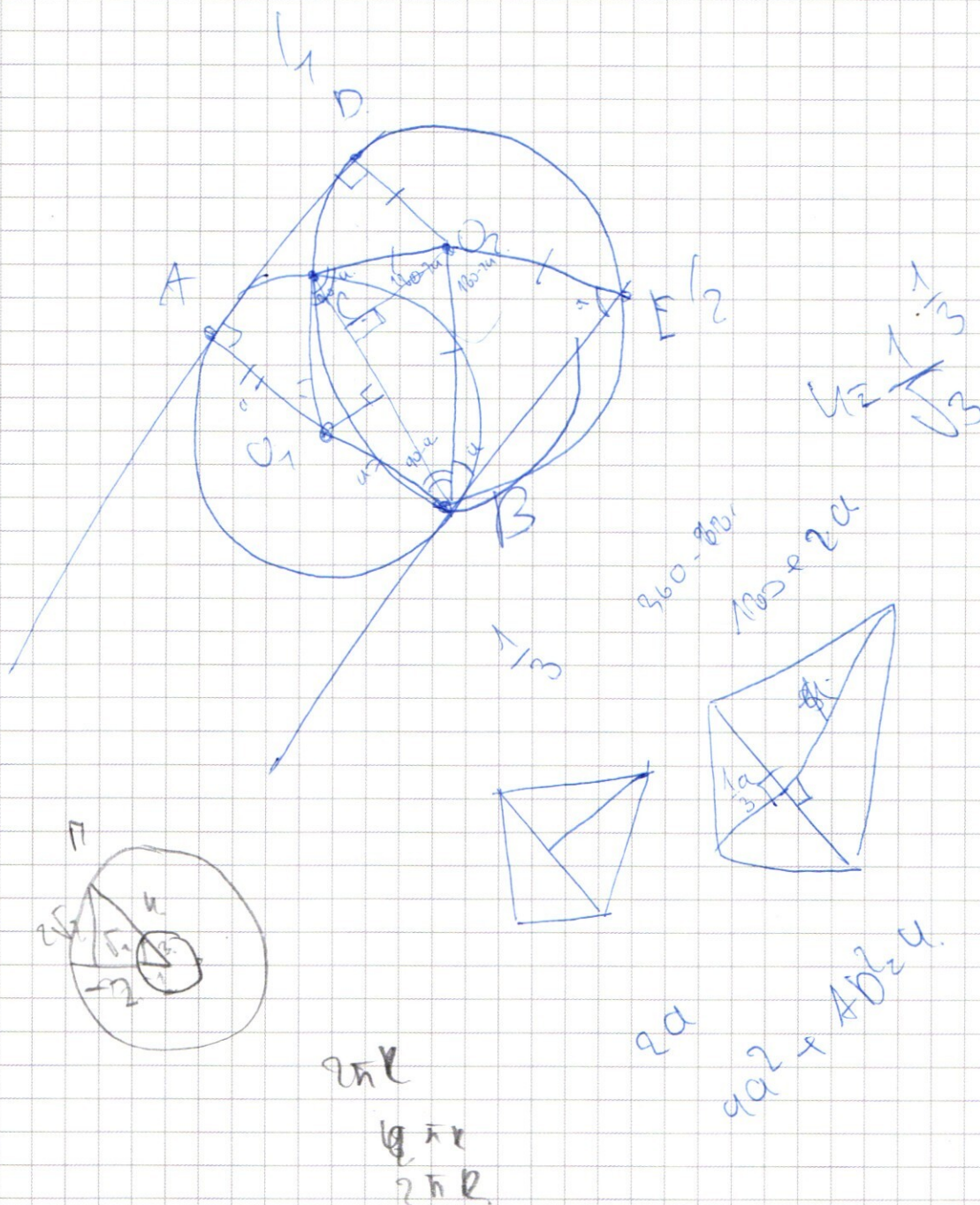
$$\eta = h + b(x - x_0)$$

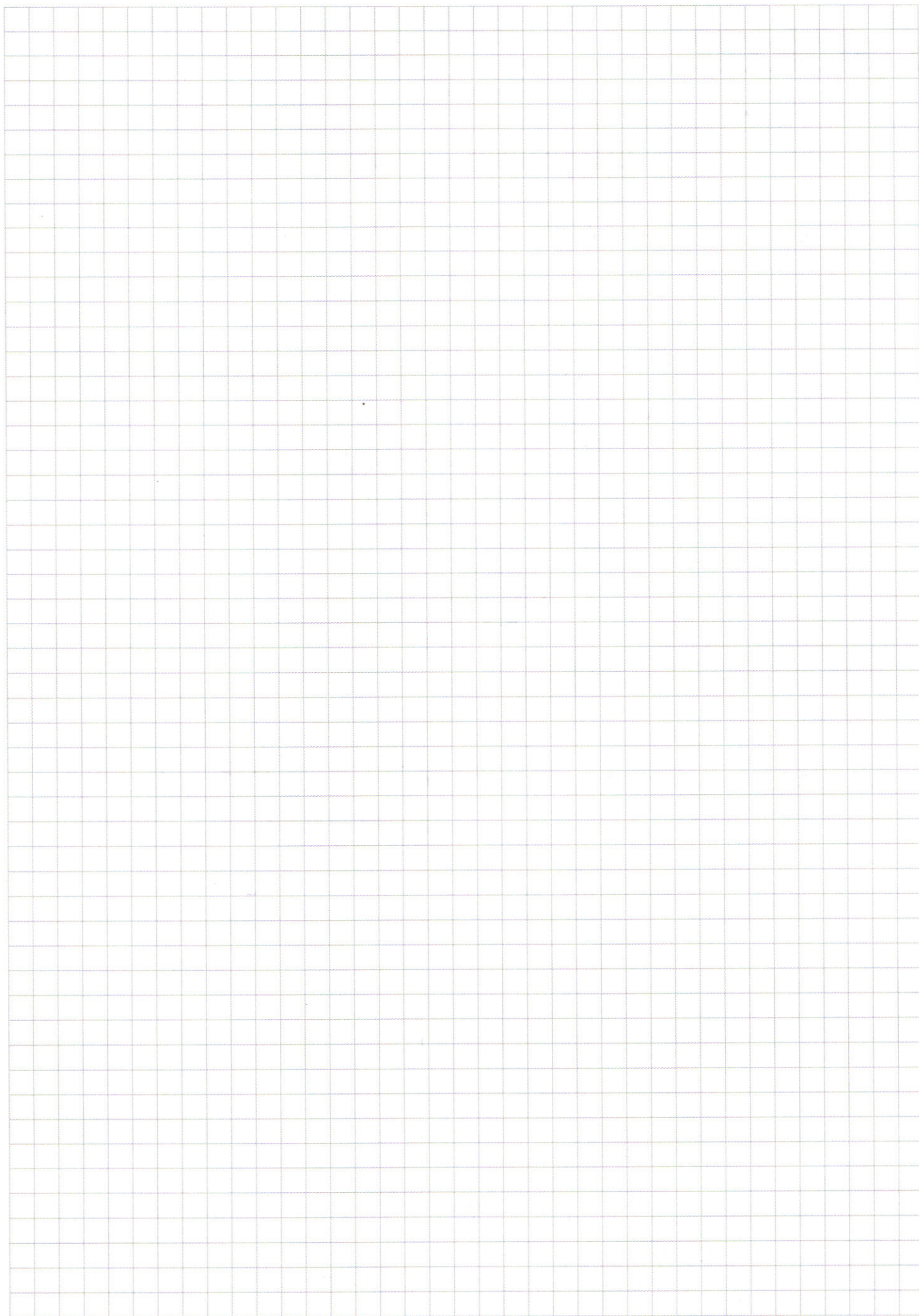
$$V_2(t) = (1 - X) + X V_1(t)$$

22

42 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{6}$$

$$6 \cdot 50$$

$$5 \cdot 40$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ -17 \\ \hline 119 \\ -17 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$x^2 - 16|x| + 64 + y^2 - 30|y| + 225 = 289$$

$$x^2 - 16|x| + y^2 - 30|y| = 0$$

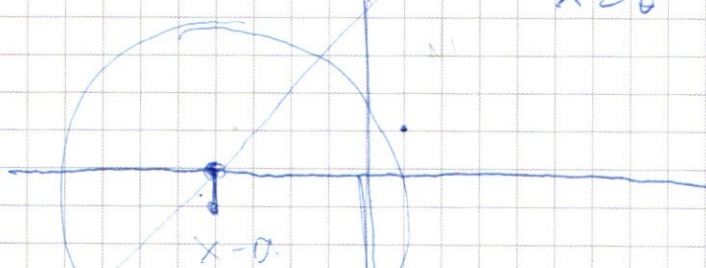
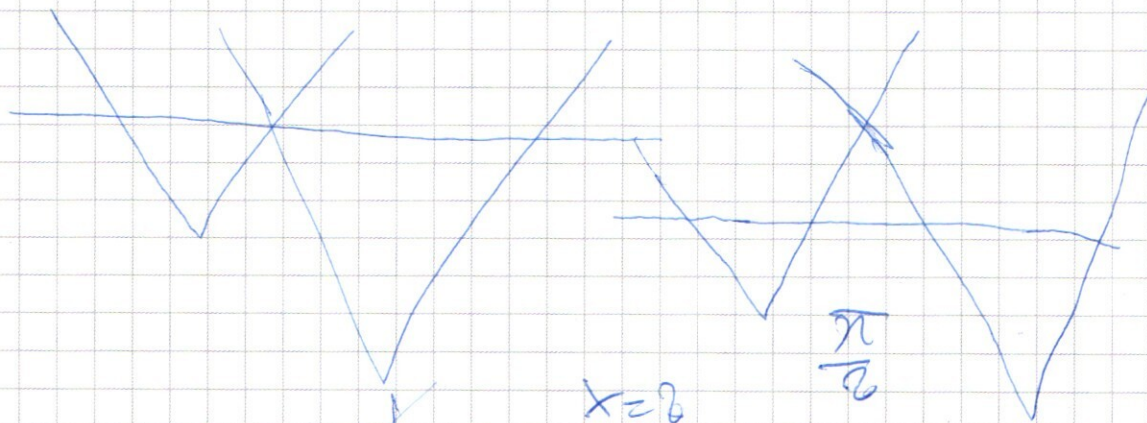
$$x^2 + y^2 = 16|x| + 30|y|$$

$$x^2 + y^2 - 2xa + a^2 = 64$$

$$\frac{n\pi}{x} + \pi = \frac{5n\pi}{x}$$

$$x\pi = 4n\pi$$

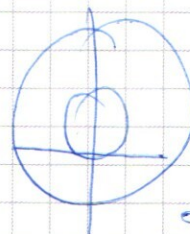
$$x = 4n$$



$$\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{x}$$

$$\pi + \frac{x\pi}{2} = 5\pi$$

$$x\pi = 8\pi$$



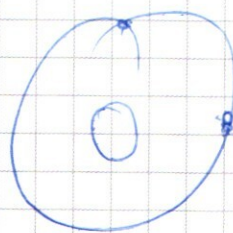
$$\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{10}$$



90 120 50 540

70

540

91

639

92

538

40

40

120

$a_1 +$

$a_1 d$

$$\begin{aligned} 2na_1 + 4n(n-1)d &= \\ &= 6na_1 + 3n(n-1)d \\ n(n-1)d &= 4na_1 \end{aligned}$$

$$na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$\frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$na_1 + 2nc$$

$$na_1 + n(n-1)d$$

$$na_1 + 2n(n-1)d = 3na_1 + \frac{3n(n-1)d}{2}$$

$$\frac{a_1 + (n-1)d}{a_1 + \frac{(n-1)d}{2}}$$

$$2na_1 =$$

$$4na_1 = n(n-1)d$$

$$4a_1 = (n-1)d$$

$$\frac{5a_1}{3a_1}$$

$$\frac{5}{3}$$