МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

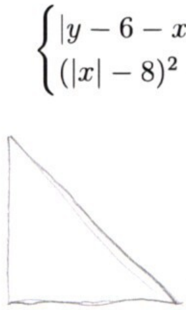
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

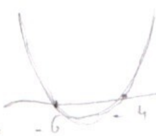
   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.





$x^3-4x+80$

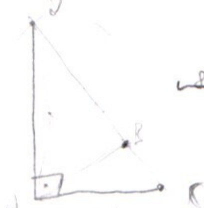
$x^2+10x+24=0$

$D=100-96$

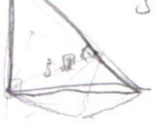
$x=\frac{-10\pm 2}{2}=\left[\begin{array}{l}-6\\-4\end{array}\right.$

$\frac{-6}{\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}$

$CF=\sqrt{CB^2+BD^2}$



$0=(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})\cdot\sqrt{-64+16+80}$

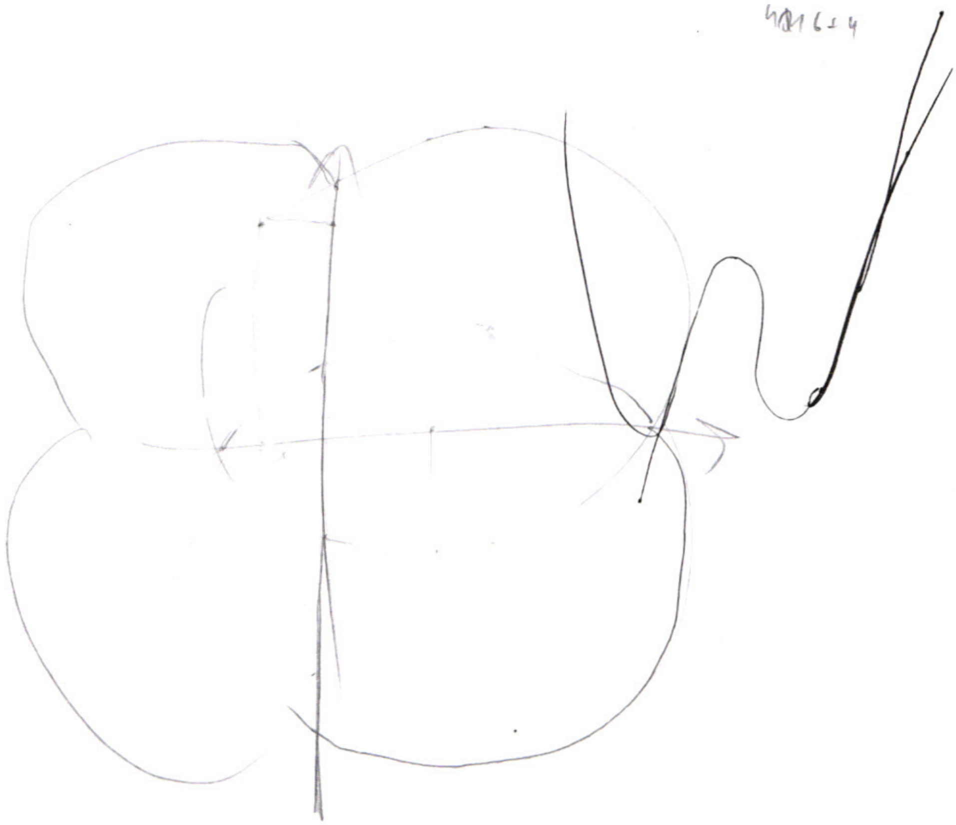


360
63
·8
378
27
374·6
5(6+7)·6
9·6
44 * 3
12·3
120·14

$$\left(\left(\left(\left(2x^{2}-3\right)x+7\right)x-4\right)x+4\right)$$

136

1800
420
24
8·3
5·4
7·5+7
2244+4
42·5
20+7
·4
210−4
206·5
108−4
104·4
1030+1
416+4



$700 = 7\cdot 2^2\cdot 5^2$ 7 2 2 5 5   7 4 5 5 $\frac{81}{3\cdot 2\cdot}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

$x^3-4x+80$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$700 = 7\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$

Значит, может быть 2 набора цифр: 7, 2, 2, 5, 5 или 7, 4, 5, 5
остальные цифры должны быть 1

кол-во 8-значных чисел в которых первый набор цифр:

$$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot (8-5)!} = 7\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 1680$$

кол-во 8-значных чисел в которых второй набор цифр:

$$\frac{8!}{2!\cdot (8-4)!} = 4\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 840$$

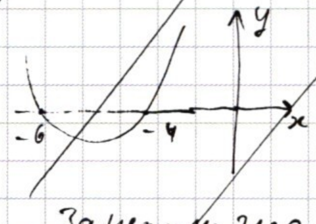
в сумме 2520 чисел

Ответ: 2520

№3

$x^2+10x+24 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}$

$y = x^2+10x+24$ $y = (x+6)(x+4)$

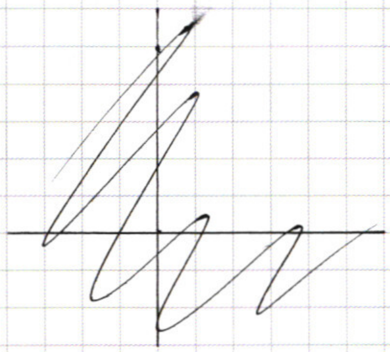


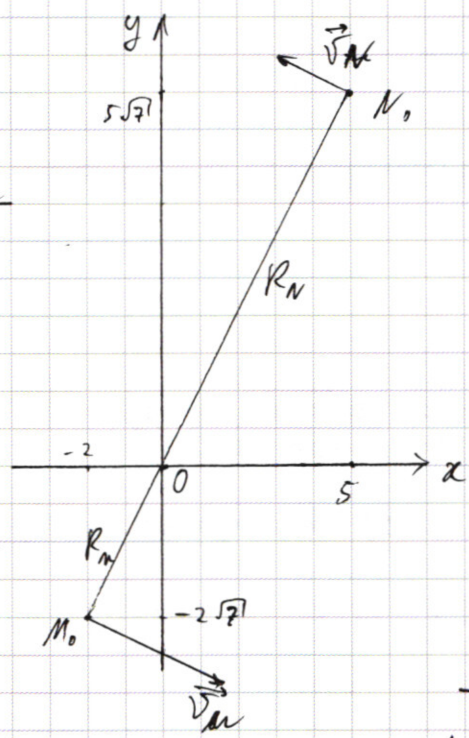
Заметим, что если подставить -6 в обе уравнение, -6 не окажется его корнем, т.к. $\sqrt{x^3-4x+80}$ не будет существовать

Теперь рассмотрим, что происходит, если $x<-6$
при $x<-6$, $x^2+10x+24>0$, а $\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}<0$, и, учитывая, что $\sqrt{x^3-4x+80}\geq 0$ можно сделать вывод, что для уравнения нет решений <-6

Подставив $x=-4$, увидим, что $x=-4$ не является корнем уравнения

№ 5





т.к. $\frac{-2}{-2\sqrt{7}} = \frac{5}{5\sqrt{7}}$, + чертеж, то ясно, что в начале угол между радиусами к жуку и водомерке равен π

$R_N = \sqrt{(5\sqrt{7})^2 + 5^2} = 10\sqrt{2}$

$R_M = \sqrt{(-2\sqrt{7})^2 + (-2)^2} = 4\sqrt{2}$

$v_M = 2 v_N$

$\omega_M = \frac{v_M}{R_M} = \frac{2 v_N}{4\sqrt{2}}$

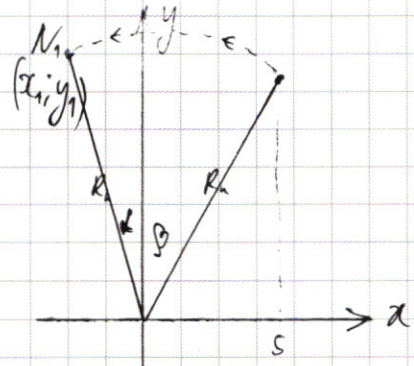
$\omega_N = \frac{v_N}{10\sqrt{2}} = \frac{\omega_M}{5}$

~~радиусы~~

расстояние между ними будет наименьшим, когда ~~их~~ р векторы $\vec{ON}$ и $\vec{OM}$ (N и M — положения жука и водомерки в любой момент) будут сонаправлены

Угловая скорость N в 5 раз меньше угловой скорости M, значит, пока N проходит x градусов, M проходит $5x$ градусов, и расстояние между ними уменьшается на $4x$ градусов.

Значит, первый ~~раз~~ раз когда между ними будет кратчайшее расстояние, будет, когда $\vec{ON}$ повернется на $\frac{\pi}{4}$



$\sin\alpha = \sin(45° - \beta) = \sin 45° \cdot \cos\beta - \cos 45° \cdot \sin\beta$

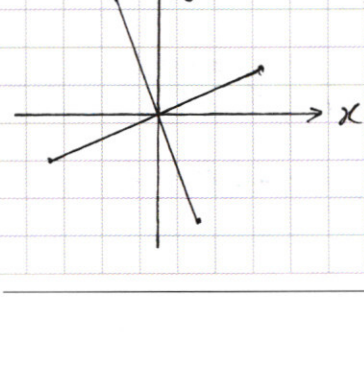
$\sin\beta = \frac{5}{10\sqrt{2}}$; $\cos\beta = \frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{7} - 5}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{4}$

$x_1 = -R_N \cdot \sin\alpha = -\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7} - 1)}{2}$

$y_1 = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7} - 1}{4}\right)^2} = 10\sqrt{2}\sqrt{\frac{16 - 7 - 1 + 2\sqrt{7}}{16}} = 5\sqrt{4 + \sqrt{7}}$

Далее, каждая след. точка в которой ~~расстояние~~ будет находиться жук, будет поворот по его окружности на 90° от ~~пр~~ предыдущей (жук проходит $\frac{\pi}{2}$, водомерка проходит $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$)



соответственно будут повторяться координаты $(x_1; y_1)$; $(-y_1; x_1)$; $(-x_1; -y_1)$; $(y_1; -x_1)$

$64-32-80+48$ $16+40+24$ $5\sqrt{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}=40$

$=80$ $112-112$ 128 $64-16+80$ $48+80$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Рассмотрим $x\in(-6;-4)$ на этом отрезке $x^2+10x+24<0$, а $\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}>0$, и, учитывая, что $\sqrt{x^3-4x+80}\geq 0$, можно сделать вывод, что нет решений уравнения на $x\in(-6;-4)$~~

№3

$x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$

$\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+6)$

$(x+4)(x+6)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}$

$x+4=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^3-4x+80}$ ($x\neq-6$, т.к. при $x=-6$ $\sqrt{x^3-4x+80}$ не существует)

возведем в квадрат

$2x^2+16x+32=x^3-4x+80$

$x^3-2x^2-20x+48=0$

Возможные корни: $\pm1;\pm2;\pm4;$ и т.д. (целые делители 48)

$x=4$ - подходит (~~также~~ при $x=4$ $\sqrt{x^3-4x+80}$ существует)

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ \underline{x^3-4x^2} & x^2+2x-12 \\ \quad 2x^2-20x & \\ \quad \underline{2x^2-8x} & \\ \quad\quad -12x+48 & \\ \quad\quad \underline{-12x+48} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$x^3-2x^2-20x+48=(x-4)(x^2+2x-12)=0$

$x^2+2x-12=0$

$D=4+48$ ~~<0, значит, $x^2+2x+12\neq0$~~

$D=4\cdot13$

~~Значит, единственный корень уравнения это 4~~

~~Ответ: 4~~

$x=\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{2}=\left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{13}\\ -1+\sqrt{13}\end{array}\right.$

если $x=-1-\sqrt{13}$, то $x+4<0$ (т.к. $-\sqrt{13}<-\sqrt{9}$; $-\sqrt{13}<-3$), хотя должно быть ≥0 ($\sqrt{x^3-4x+80}\geq0$)

Ответ: 4; $\sqrt{13}-1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$x \geq 2$

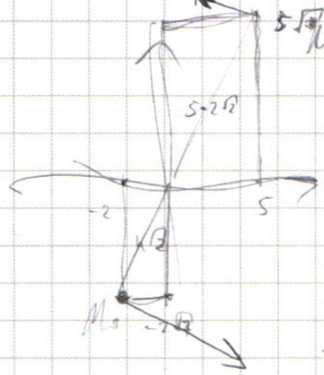
$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4$

$(x-1) \cdot x(4-3x) = -2(x^4+2)$

$3x^2 + 4x^2$

$-3x^2(x-1) + 4x(x-1) + 2(x^4+2)$

$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \qquad 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$



вод M

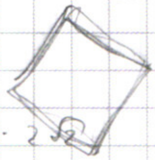
$|y-x-6|\ |y+x-6|$

$|x - \dots| + |y - \dots| = \dots$

$y > x$

$y < x$

$\sqrt{4(1+7)} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$



$S = b_1 + kb_1 + k^2 b_1 + \dots + k^{2999} b_1$

$10S = b_1 + kb_1 + k^2 b_1 \cdot 50 + \dots + 50 \cdot k^{2999} b_1$

$9S = 49k^2 b_1 + 49k^5 b_1 + \dots + 49k^{2999} b_1$

$k^{2999} b_1$

$\boxed{S = \frac{b_1(k^{2999}-1)}{k-1}}$

$2kb_1 + 2k^3 b_1 + 2k^5 b_1$

$\boxed{9S = \frac{49 b_1 k^2 (k^{2997}-1)}{k^3-1}}$

$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

$u_5 = u_1 b^4$

$bS = u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

$= S + u_5 - u_1$

$S = \frac{u_1(b^{n-1}-1)}{b-1} = \frac{u_5 - u_1}{b-1}$

$\boxed{?S = \frac{b_1 k(k^{2999}-1)}{k^2-1}}$

t

$v_l = 2v_{ж}$

$w_l = \frac{v}{R} = \frac{v_l}{2R} = \frac{2v_ж}{2R} = \frac{v_ж}{2\sqrt{2}}$

$w_ж = \frac{v_ж}{5R} = \frac{w_l}{5} = \frac{v_ж}{10\sqrt{2}}$

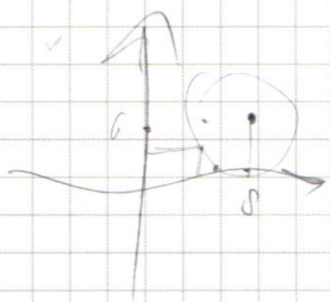
$\frac{2\pi}{T}$

$w_l \cdot t = w_ж \cdot t + 180°$

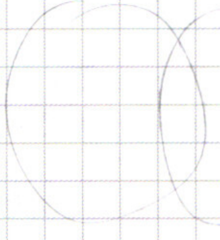
π

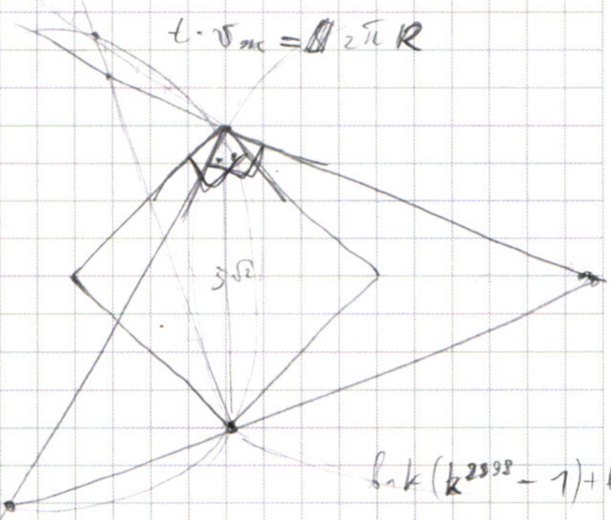
$t(w_l - w_ж) = \pi$

$t\left(\frac{5v_ж}{5 \cdot 2\sqrt{2}} - \frac{v_ж}{5 \cdot 2\sqrt{2}}\right) = t \frac{4 v_ж}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \pi$



$t \cdot v_ж = 2\pi R$





$b_1 k(k^{2999} - 1) + b_1(k^{3000} - 1)$

$S = \frac{b_1 k^{3000} - b_1 k + b_1 k^{2999} - b_1}{k-1} =$

$S = ? + \frac{b_1(k^{3000}-1)}{k^2-1}$

$x(x-1)(3x-4) \geq 2x^4 + 4$

$-8x^2 + 3x^2$

$-2x^2 + 3x^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Ответ:~~ $\left(-\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}; 5\sqrt{4+\sqrt{7}}\right); \left(-5\sqrt{4+\sqrt{7}}; -\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}\right);$
$\left(\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}; -5\sqrt{4+\sqrt{7}}\right); \left(5\sqrt{4+\sqrt{7}}; \frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}\right)$

Ответ: $\left(-\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}; 5\sqrt{4+\sqrt{7}}\right); \left(-5\sqrt{4+\sqrt{7}}; -\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}\right);$
$\left(\frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}; -5\sqrt{4+\sqrt{7}}\right); \left(5\sqrt{4+\sqrt{7}}; \frac{5\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2}\right)$

№ 2

Очевидно, что сумма геометрической прогрессии, состоящей из умноженных на 49 членов данной геометрической прогрессии с номерами, кратными 3, равна $10S - S$

$$9S = \frac{49b^{3000} - 49b_3}{k^3-1} = \frac{49b_1\cdot k^2(k^{2997}-1)}{k^3-1}$$

для данной последовательности $S = \frac{b_1(k^{2999}-1)}{k-1}$

а чтобы получить ~~ответ~~ требуемую сумму, нужно выразить через S дробь $\frac{b_1\cdot k(k^{2998}-1)}{k^2-1}$ (сумма геом прогрессии, состоящей из четных членов данной последовательности) и сложить ее с S.

$$S = \frac{(b_1k^{2999} - b_1)(k+1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{b_1k(k^{2998}-1)}{k^2-1} + \frac{b_1(k^{3000}-1)}{k^2-1}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^4-3x^3+7x^2-4x+4 \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 2 \\ 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geq 0 \end{cases}$

$2x^4-3x^3+3x^2+4x^2-4x+4 \geq 0$

$2x^4-3x^2(x+1)+4x(x-1)+4 \geq 0$

$2x^4+(x-1)\cdot x\cdot(4-3x)+4 \geq 0$

Преобразовать это уравнение не получается, построим график для него

x	2	3	4	5	6
y	32	136	420	1034	2248

Построив эти точки и пустив часть графика до 2 видно, что „горб" уже пройден и „после прохождения 2 y" увеличивается, и пересечения

$2x^4+3x^3-3x^2-2x^2-4(x-1) \geq 0$

$2x^2(x^2-1)+3x^2(x-1)-4(x-1) \geq 0$

$(x-1)(2x^2(x+1)+3x^2-4) \geq 0$

$x=1$

$x-1<0$, значит,

$2x^3+5x^2-4 \leq 0$

Делители -4: $\pm1; \pm2; \pm4$

$x=-2$ – подходит

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+5x^2-4 & x+2 \\ \hline -(2x^3+4x^2) & 2x^2+x-2 \\ x^2 & \\ -(x^2+2x) & \\ -2x-4 & \\ -(-2x-4) & \\ 0 & \end{array}$$

$2x^2+x-2=0$

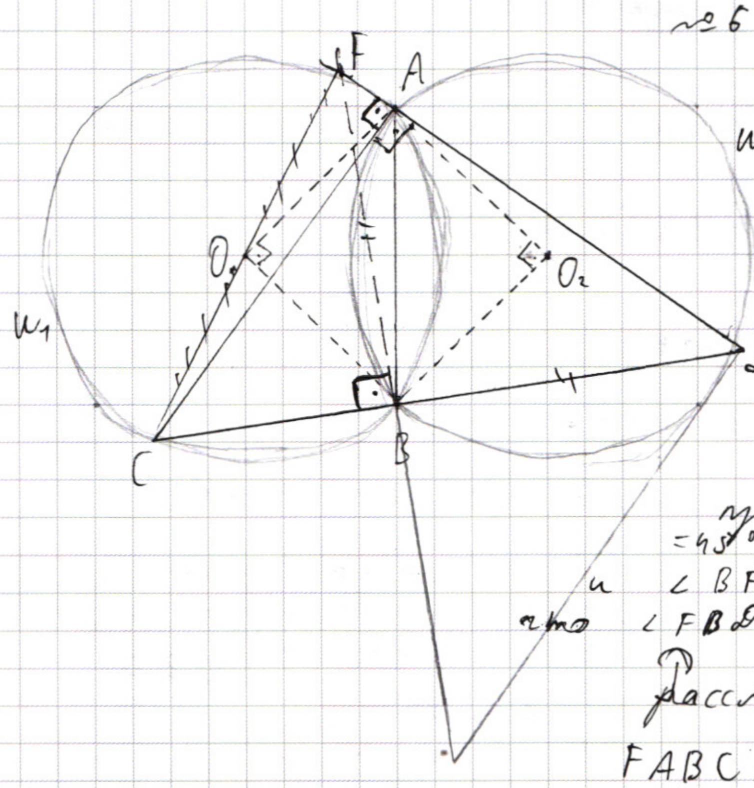
$D=1+16$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} < 2 \\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

$x = 1; -2; \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$

Ответ: $1; -2; \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}; \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

№6



т.к. $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одинаковые дуги и лежат на одинаковых окружностях, содержащих эти дуги, то $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ (т.к. $\angle CAD = 90^\circ$)
значит, $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$
значит, $AB = 5\sqrt{2}$

Очевидно, что F лежит на продолжении DA т.к. $\angle ADB = 45^\circ$, а ΔFBD - равнобедренный, и $\angle BFD = \angle BDA = 45 = \angle ADB$ (потому что $\angle FBD = 90^\circ$)

Рассмотрим четырехугольник FABC. В нем прямоугольные треугольники: ΔCBF и ΔCAF. Т.к. в прямоугольных треугольниках центр описанной окружности - это середина диагонали, ~~но~~ (а у этих треугольников общая диагональ) то окружность, ~~описан~~ описанная вокруг ΔCBF будет проходить и через точку A. Получается, ~~этот четырехугольник~~ все точки этого четырехугольника лежат на одной окружности. Вместе с этим, точки A, B и C лежат на окружности ω_1. Значит, четвертая точка F тоже лежит на ней. Тогда ~~диагональ~~ для ΔFAC радиус описанной окружности равен 5, тогда его диагональ $FC = 10$ (в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине диагонали)

~~Ответ: FC = 10~~ Если $BC = 6$, то $FB = 8$ (по т Пифагора)

$FB = BD = 8$, значит $FD = 8\sqrt{2}$ (по т. Пифагора)

$AC = AD = \frac{CB + BD}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$ (по т. Пифагора); Значит, $FA = FD - AD = \sqrt{2}$

$S_{CAF} = \frac{1}{2} AF \cdot CA = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 7$

Ответ: $CF = 10$; $S_{CAF} = 7$

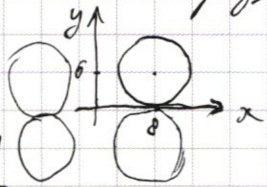
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

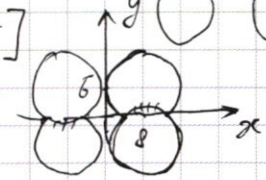
$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

← это отраженная окружность, ~~несколько~~

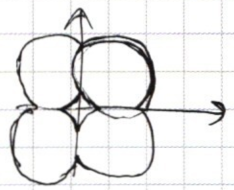
если $a \in [0; 6^2]$



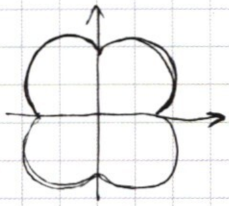
если $a \in (6^2; 8^2]$



если $a \in (8^2; 10^2]$



если $a \geq 10^2$



Фигуру, соответствующую второму уравнению, я не смогу построить :(