

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Разложим число 4900 на простые множители.

$$4900 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

Т.к. произведение цифр данного 8-ми значного числа в точности равно 4900, то отсюда следует что цифры этого числа не равны нулю и не делятся на 3 $\Rightarrow$ они принадлежат множеству $\{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$. Заметим, что цифра 8 не может быть в этом числе, т.к. в разложение числа 4900 "2" входит только во второй степени.

 $\Downarrow$ цифры принадлежат множеству $\{1; 2; 4; 5; 7\}$.Заметим, что в этом числе должно быть ровно две 7 и две 5 (т.к. оставшиеся цифры $\nmid 5$ и $\nmid 7$)

Тогда рассмотрим варианты:

$$\underbrace{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1}_{\text{есть "4"}} + \underbrace{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2}_{\text{есть две "2"}} = C_8^2 \cdot C_6^2 (C_4^1 + C_4^2) =$$

$$= \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \left(4 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \right) = 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (4 + 3 \cdot 2) = 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 =$$

$$= 10 \cdot 20 \cdot 21 = 210 \cdot 20 = 4200$$

Ответ: 4200 вариантов.

Задача №3

$$1) \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{10\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (x+10) \quad (\text{упрощение слагаемых})$$

$$2) \{ x^2 + 6x - 40 = (x-4)(x+10) \} \quad \text{по Т.Виета + Т.Безу}$$

найдем корни и разложим на скобки

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (x+10) (\sqrt{x^3 - 64x + 200}) = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4)(x+10)$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x - 4 \end{array} \right.$$

(сначала я решил уравнение,
а потом проверю подходят ли
корни под ОДЗ)

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ \sqrt{x \geq 4} \\ \frac{2}{16} \cdot (x^3 - 64x + 200) = x^2 - 8x + 16 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ \sqrt{x \geq 4} \\ x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ \sqrt{x \geq 4} \\ x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ \sqrt{x \geq 4} \\ (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -10 \\ \sqrt{x \geq 4} \\ x = 6 \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{2} \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4

$$4x^4 - x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 > 0$$

$$4x^4 + (x+2)^2 - 4x^2|x+2| - x^2|x+2| \geq 0$$

$$4x^2(x^2 - |x+2|) + |x+2|(|x+2| - x^2) \geq 0$$

$$(4x^2 - |x+2|)(x^2 - |x+2|) \geq 0$$

Заметим, что если $x^2 - |x+2| \geq 0$, то и $4x^2 - |x+2| \geq 0$,

т.к. $4x^2 - |x+2| = 3x^2 + x^2 - |x+2|$, а $3x^2 \geq 0$.

$$1) \begin{cases} x^2 - |x+2| \geq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - |x+2| < 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x^2 - |x+2| \leq 0 \end{cases}$$

Решим каждое из неравенств отдельно

$$1) x^2 - |x+2| \geq 0$$

$$I) x \leq -2, \text{ тогда}$$

$$x^2 + x + 2 \geq 0$$

$$\text{Заметим, что } D < 0 \quad (1^2 - 8 < 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \text{любое}$$

$$\boxed{x \leq -2}$$

и

$$II) x > -2$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \\ x \in [2; +\infty) \end{cases}$$

$$\leftarrow x \in (-2; -1] \cap [2; +\infty)$$

$$1) x \in (-\infty; -1] \cap [2; +\infty)$$

Задача №3

$$2) I) x \leq -2$$

$$x^2 + x + 2 < 0 \quad (D < 0 \text{ м.к. уже проверен выше})$$

$\Downarrow$
решений нет

$$II) x > -2$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow \boxed{x \in (-1; 2)}$$

$$2) x \in (-1; 2)$$

$$3) I) x \leq -2$$

$$4x^2 + x + 2 \leq 0 \quad (D < 0, \text{ м.к. } 1^2 - 8 \cdot 4 < 0)$$

$\Downarrow$
решений нет

$$II) x > -2$$

$$4x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$x \in \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right]$$

$$3) x \in \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \quad (\text{м.к. } 1 - \frac{\sqrt{33}}{8} > -1)$$

Возвращаемся к системе.

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cap [2; +\infty) \\ x \in (-1; 2) \\ x \in \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cap [2; +\infty) \\ x \in (-1; 2) \\ x \in \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cap [2; +\infty) \\ x \in (-1; 2) \\ x \in \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cap \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \cap [2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -10 \\ x = 6 \\ \sqrt{x} \geq 4 \\ x = 1 + \sqrt{13} \\ x = 1 - \sqrt{13} \end{array} \right.$$

Проверим ОДЗ: $x^3 - 64x + 200 \geq 0$

$$x(x-8)(x+8) \geq -200$$

подставим полученные значения.

$$-10 \cdot (-8) \cdot (-2) = +180 \cdot (-2) = -360 < -200 \Rightarrow x = -10 \text{ не подходит}$$

$$6 \cdot (-2) \cdot 14 = 84 \cdot (-2) = -168 \geq -200 \Rightarrow x = 6 \text{ подходит}$$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{13})(\sqrt{13} - 7)(\sqrt{13} + 9) &= 13 + 9\sqrt{13} - 7\sqrt{13} - 63 + 13\sqrt{13} + \\ &+ 9 \cdot 13 - 7 \cdot 13 - 63\sqrt{13} = 13 \cdot 3 - 63 - 48\sqrt{13} = -(24 + 48\sqrt{13}) = \\ &= -24(1 + 2\sqrt{13}) - (24 + 48\sqrt{13}) < -200 \\ &= -\sqrt{29952} < -176 \end{aligned}$$

$$\sqrt{29952} < 176$$

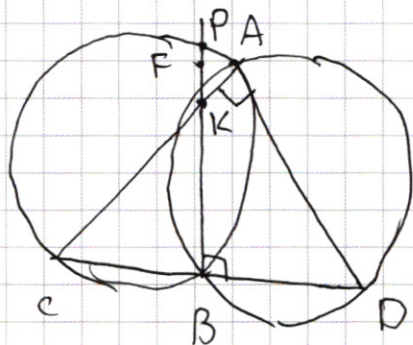
$$29952 < 30976$$

возведение в квадрат

$$-(24 + 48\sqrt{13}) < -200 \Rightarrow 1 + \sqrt{13} \text{ подходит}$$

Ответ: 6; $1 + \sqrt{13}$

Задача №6.



1) Пусть $AC \cap BF = K$. Тогда $ADBK$ - вписанный, т.к. $\angle KAD + \angle KBD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (если $K \in [AC]$), а если $K \in (AC)$, то $K \notin [AC]$, то, ~~то~~ $AKDB$ - вписанный, т.к. $\angle KAD = \angle KBD = 90^\circ$.

~~В~~ В противном случае посмотрим на точку K' такую, что $AD \cap BF = K'$ и тогда будет верно, что $K' \in [AD]$. А т.к. окружности одинакового радиуса, то без ограничения общности будем рассматривать первый случай.

$ADBK$ - вписанный



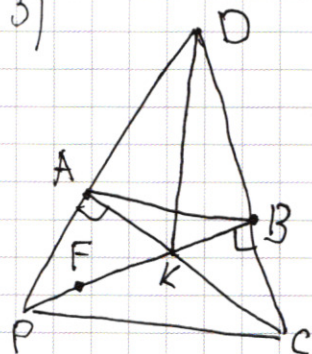
$K \in \omega_{ADB}$

Пусть $BF \cap (AD) = P$, тогда $CBAP$ - вписанный, т.к. $\angle CBP = \angle CAP = 90^\circ \Rightarrow P \in \omega_{CBA}$

2) Заметим, что $CP = 2R$, т.к. $\angle CBP = 90^\circ$ и $DK = 2R$, т.к. $\angle KAD = 90^\circ$.

Заметим, что $A \in [PD]$

3)



$\angle KAB = \angle KPC = \angle BPC$, т.к. $ABCP$ вписанный

Но тогда заметим, что в равных окружностях равные вписанные углы смотрят на равные дуги $\Rightarrow$ хорды стягивающие

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Эти дуги тоже равны. (очевидно из движения)
А значит $BK = BC$ (т.к. BK хорда в ω_{ABV} , а BC
хорда в ω_{ABC})

P.S. равными я называю фигуры переходящие друг в друга в результате полого-мгн. кон-во движений.

А значит: $\Downarrow$
Если у окружностей равные радиусы, то они равны.

$$н) CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BK^2 + BD^2} = DK = 2R = 2G$$

Пункт а) Ответ: 26

$$\begin{aligned} б) S_{CFK} &= S_{CFB} - S_{BCK} = \frac{BF \cdot BC}{2} - \frac{BC^2}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{CF^2 - BC^2} \cdot BC}{2} - \frac{BC^2}{2} = 5 \cdot \sqrt{676 - 100} - 50 = 5 \cdot 24 - 50 = \\ &= 120 - 50 = 70 \end{aligned}$$

~~Аналогично рас-е выше сказанным рассуждениям $AP = AK = X$~~

$$FK = BF - BK = BF - BC = 24 - 10 = 14$$

$\angle BKE = 45^\circ$, т.к. $\triangle KBC$ - равнобедренный

~~Аналогично выше сказанным рассуждениям $AP = AK = X$~~

$$CA \cdot AP = \frac{S_{PBC}}{2} = PB \cdot CD = \sqrt{26^2 - 10^2} (10 + 24) =$$

~~$\Rightarrow$~~
 Из пункта а $\Rightarrow P=F$ (м.к. $PC=26=CF$ и
 м.к. $\triangle FBC = \triangle PBC$ (по равенству и универсале))

$$S_{PFC} = \frac{CA \cdot AP}{2} = \frac{AP \cdot \sqrt{26^2 - AP^2}}{2}$$

$AK=AP$ по соображениям в пункте 3.

к

$$PK = PB - BK = PB - BC = \sqrt{26^2 - 10^2} - 10 = 14$$

$$2AP^2 = 14^2$$

$$AP = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$S_{PFC} = \frac{14 \cdot \sqrt{676 - 98}}{2\sqrt{2}} = 7\sqrt{338 - 49} = 7\sqrt{289} = 7 \cdot 17 = 119$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2 $b_3 + \dots + b_{3000} = S$

$4S = 39b_3 + 39b_6 + \dots + 39b_{3000}$

$2b_2 + 2b_4 + 2b_6 + \dots + 2b_{3000} = ?S$

$b_3 \cdot g^2 + b_3 \cdot g^5 + b_3 \cdot g^8 + b_3 \cdot g^{11} + \dots$

$b_3 \cdot g + b_3 \cdot g^4 + b_3 \cdot g^7 + \dots$

$gb_3(1 + g^2 + g^4 + \dots + g^{2998})$

$g^2 b_3(1 + g^3 + g^6 + \dots + g^{2997})$

$gb_3(g + g^4 + g^7 + \dots + g^{2999})$

$b_3(1 + g^3 + g^6 + \dots + g^{2997})$

$(g^3 - 1)$

$gb_3 \frac{g^{3000} - 1}{g^3 - 1} = \sum_{i=3}^{\dots}$

$b_2 \frac{g^{3000} - 1}{g^2 - 1}$

$(4x) \cdot (x)$

$\frac{1+32}{1 \pm \sqrt{33}}$

$\frac{g^2 + g}{g^2 + g + 1} = \frac{1}{g^2 + g + 1}$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$x^2 - |x+2| < 0$

$4x^2 - |x+2| \leq 0$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$4x^4 + 4x - 36 \geq 0$

$4x^4 - 9 + 4x$

$-36 + 12$

$4x^2(x^2 - |x+2| - x^2) \geq 0$

$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2|x+2| + 4x$

$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$|x+2|(|x+2| - 5x^2) + 4x$

$(2x^2)^2$

$1-8$

$$x=10 \quad N3$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{10\sqrt{2}}{4} \right) \frac{\sqrt{2}}{4} (x+10)$$

$$\begin{array}{r} 1056 \\ 3232 \\ 176 \\ \hline 30976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^4 \cdot 2^3 \\ 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 176 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x - 4$$

$$\frac{2}{16} (x^3 - 64x + 200) = x^2 - 8x + 16$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x^2(x-8) + 72 = 0$$

$$6 \quad 36(6-8) = 36 \cdot (-2)$$

288

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = x^3 - 2x^2 - 12x - 6x^2 + 12x + 72 = 0$$

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 2} \\ 36 \overline{) 6} \\ 16 \overline{) 16} \\ \hline 1056 \\ 1232 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x(x-8)(x+8)$$

$$-10 -18 -2$$

$$180 \cdot 2 =$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+12} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 150 \\ \times 64 \\ \hline 394 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ 100^2 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \\ 13 \\ \hline 6912 \\ 2304 \\ \hline 29952 \end{array}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$x = 6 \quad \checkmark$$

$$x = 10 \quad \text{не подходит}$$

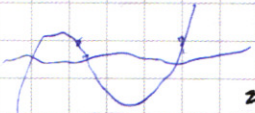
$$x = 1 - \sqrt{13} \quad \checkmark$$

$$083: x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$1000 - 640 + 200 \geq 0$$

$$136 - 384 + 200 = 436 - 384 \geq 0$$

$$|1 \pm \sqrt{13}| < 8$$



$$x(x-8)(x+8)$$

$$5 \quad -3$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$-15 \cdot 13 = -150 - 45$$

$$\begin{array}{r} 960 \\ 160 \\ -24 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 63 \\ -15 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\geq -176$$

$$2 - 13 - 63 = 15 - 63$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 63 \\ -39 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$176 \geq \sqrt{29952}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

a, b

$\neq 0$!

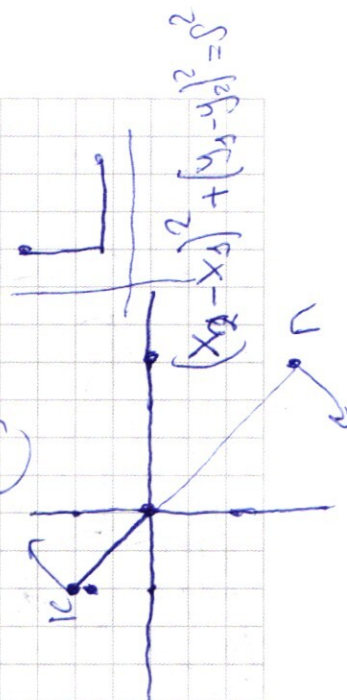
= 4900

1 2 3 4 5 6 7 8 9

4900 | 2-5
2-5
49 | 7
7 | 7
1 | 1

обязательно две 7.
две 5.

= 4900



7-7-2 $7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 4900$

7+7=14+7=21+21=42+7=49

нет

a - цифра числа

$a \neq 0$

1 2 4 5 7

$$C_5^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1 + C_5^2 + C_5^2 \cdot C_4^2$$

$$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \left(\frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \right) =$$

$$= (2 \cdot 5)^2 (4 + 6) = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ ответ}$$

N2

$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$

$b_i > 0$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\sum b = S$$

b_1

$$b_2 = g b_1$$

$$b_n = g^{n-1} b_1$$

$$b_1 (1 + g + g^2 + \dots + g^{2999}) =$$

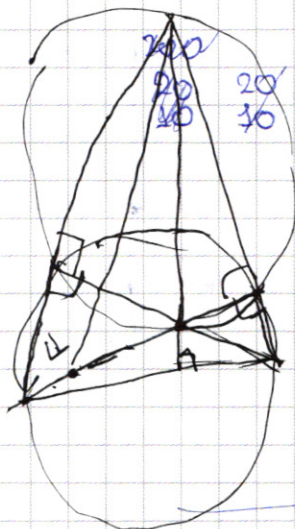
$$= b_1 \frac{g^{3000} - 1}{g - 1}$$

$$x+y+z=5$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$x^2 + 6x - 40 = (x + 10)(x - 4)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 0$$



$$\begin{array}{r} 200 \overline{) 8} \\ 40 \end{array}$$

$$40^3 = 64000 - 2880$$

$$x(x^2 - 64) = x(x - 8)(x + 8)$$

$$92$$

$$10 \cdot 2 \cdot 18 = 10 \cdot 36 = 360$$

$$\frac{82(x+5)}{2}$$

$$\frac{2(x^2 + 30x + 25)}{4} \cdot (x^3 - 64x + 200) = (x^2 + 20x + 100)(x^2 - 8x + 16)$$

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^3 + 36x^2 + 20x^3 - 160x^2 + 320x + 100x^2 - 800x + 1600 &= \\ = x^4 + 12x^3 - 44x^2 - 480x + 1600 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ 44 \end{array}$$

$$x^5 - 64x^3 + 200x^2 + 30x^4 - 640x^2 + 2000x + 25x^3 - 1600x + 5000 =$$

$$= x^5 + 30x^4 - 39x^3 - 440x^2 + 400x + 5000$$

$$\begin{array}{r} 534 \\ 64 \\ 25 \\ 39 \end{array}$$

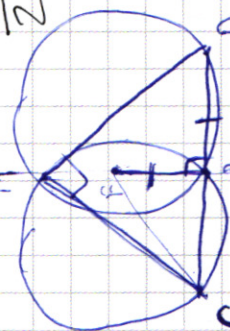
$$= 2x^5 + 24x^3 - 88x^2 - 960x + 3200$$

$$x^5 + 8x^4 - 63x^3 - 352x^2 + 1360x + 1800 = 0$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 24 \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ 40 \\ 82 \\ 352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1218 \\ 338 \\ 49 \\ 289 \end{array}$$

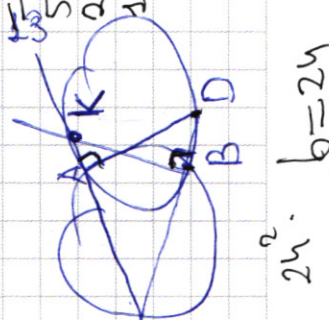
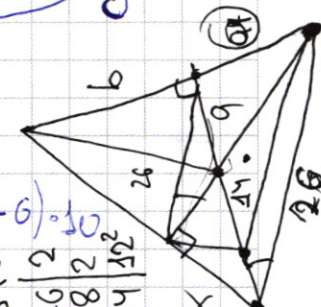


$$\sqrt{a^2 + b^2} = 26$$

$$32 \cdot 4 \cdot 20 = 48 \cdot 20$$

$$100 \cdot 16$$

$$\begin{array}{r} 50 \cdot 100 = 2 \cdot (-6) \cdot 10 \\ 576 \overline{) 2} \\ 288 \overline{) 2} \\ 144 \overline{) 12} \end{array}$$



$$2x \cdot b = 24$$

