

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть абсциссы — целое 8-знач. число, тогда $abcdefgh = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \Rightarrow$ какой цифр может быть следующие: 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7; 1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7.

Почти ка-во таких чисел будет $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 1680 + 840 = 2520$.

Ответ: 2520.

2. $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = S$, где $S = \frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1}$

$b_1 + b_2 + 50b_3 + \dots + 50b_{3000} = 10S$; $b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{2000} + 50(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = 10S - S$;
 $49(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = 9S$

$b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000} = \frac{9}{49}S$, заметим, что $b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$ также являются геом. прогрессией с данным прр. равным q^3 , тогда $\frac{b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}}{1000 \text{ членов}} =$
 $= \frac{b_3 \cdot (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{b_1 \cdot q^2 \cdot (q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q^2 + q + 1)}$, заметим, что $\frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{(q - 1)} = S \Rightarrow \frac{b_1 \cdot q^2 \cdot (q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} = \frac{S \cdot q^2}{q^2 + q + 1} = \frac{9}{49}S$

$\frac{q^2}{q^2 + q + 1} = \frac{9}{49}$; $49q^2 = 9q^2 + 9q + 9$; $40q^2 - 9q - 9 = 0$; $D = 81 + 40 \cdot 4 \cdot 9 = 9(9 + 160) =$

$= 9 \cdot 169 = 39^2$, тогда $\begin{cases} q_1 = \frac{9 + 39}{80} \\ q_2 = \frac{9 - 39}{80} \end{cases}$; $\begin{cases} q_1 = \frac{3}{5} \\ q_2 = -\frac{3}{8} \end{cases}$, $q = -\frac{3}{8}$ не подходит, т.к. все члены

прогрессии положительные $\Rightarrow q = \frac{3}{5}$, тогда $b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + \dots + 2b_{3000} =$

$= S + \underbrace{b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000}}_{1500 \text{ членов, } \text{дел} = q^2} = S + \frac{b_2 \cdot (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1) \cdot q}{(q - 1)(q + 1)} =$

$= \frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} \left(1 + \frac{q}{q + 1} \right) = S \cdot \left(1 + \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}} \right) = S \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 8} \right) = \frac{11}{8} S = 1,375 S$

Ответ: Она увеличится в 1,375 раз

$$3. \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$(x+6) \cdot \sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = (x+6)(x+4)$$

⇕

$$\begin{cases} x = -6 \\ x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases}$$

$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$, заметим, что $x=4$ является корнем уравнения,

тогда $x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = (x-4)(x^2 + 2x - 12)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \\ - (x^3 - 4x^2) \\ \hline 2x^2 - 20x + 48 \\ - (2x^2 - 8x) \\ \hline -12x + 48 \\ - (-12x + 48) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$D_4 = 1 + 12 = 13$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

⇕

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = 4 \\ x = -1 - \sqrt{13} \\ x = -1 + \sqrt{13} \end{cases}$$

$x^3 - 4x + 80 \geq 0$, проверим полученные корни подстановкой их в неравенство $x^3 - 4x + 80 \geq 0$:

$$(-6)^3 + 4 \cdot 6 + 80 \geq 0; -216 + 104 \geq 0; -112 \geq 0 \Rightarrow x = -6 - \text{не подходит}$$

$$4^3 - 4^2 + 80 \geq 0; 64 - 16 + 80 \geq 0; 128 \geq 0 \Rightarrow x = 4 - \text{подходит}$$

$$(-1 - \sqrt{13})^3 + 4(1 + \sqrt{13}) + 80 \geq 0; (1 + \sqrt{13})(-(1 + \sqrt{13})^2 + 4) + 80 \geq 0; -(1 + \sqrt{13})(10 + 2\sqrt{13}) + 80 \geq 0;$$

$$-(10 + 2\sqrt{13} + 10\sqrt{13} + 26) + 80 \geq 0; -36 - 12\sqrt{13} + 80 \geq 0; 44 - 12\sqrt{13} \geq 0; 44 \nlessapprox 12\sqrt{13} \Rightarrow x = -1 - \sqrt{13} - \text{не подходит}$$

$$(-1 + \sqrt{13})^3 + 4(1 + \sqrt{13}) + 80 \geq 0; (-1 + \sqrt{13})(14 - 2\sqrt{13} - 4) + 80 \geq 0; (-1 + \sqrt{13})(10 - 2\sqrt{13}) + 80 \geq 0; 12\sqrt{13} - 36 + 80 \geq 0; 12\sqrt{13} + 44 \geq 0 \Rightarrow x = -1 + \sqrt{13} - \text{подходит}$$

Ответ: $x = 4; -1 \pm \sqrt{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Найдём радиусы данных окр.-ей:

$$R_1 = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}$$

$$R_2 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}$$

$$v_2 = 2v_1, \text{ где } v_2 = \omega_2 \cdot R_2; v_1 = \omega_1 \cdot R_1$$

$$\omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot 2R_1$$

$$\omega_2 \cdot 4\sqrt{2} = \omega_1 \cdot 20\sqrt{2}$$

$$\omega_2 = 5\omega_1 = 7 \text{ т.к. угловая скорость}$$

водомерки в 5 раз больше угл. ск. шуха, то

когда шуха пройдёт круг, то водомерка - 5 = 7 раз.

точек с наиб. расстоянием будет 5 и будут

повторяться с периодом в $\frac{2}{5}\pi$ (72°). Также заметим, что отноше-

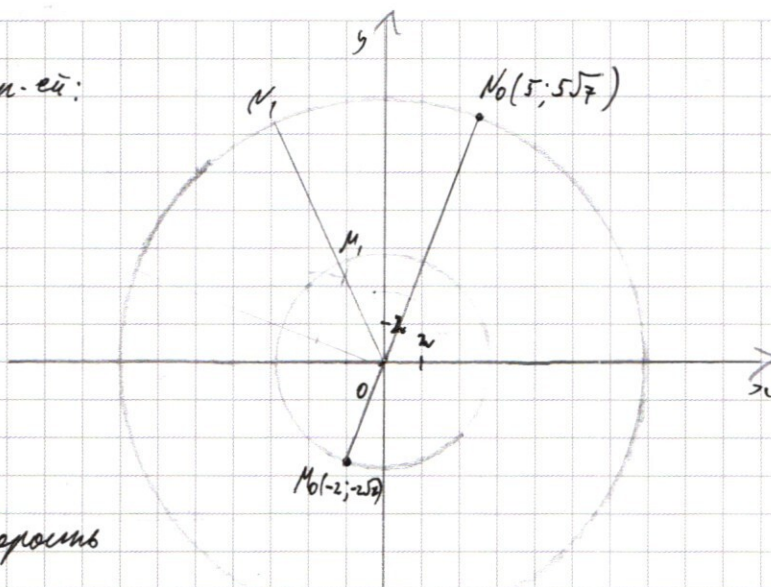
ния $\frac{y_1}{x_1}$ и $\frac{y_2}{x_2}$ равны тангенсам соответствующих углов, а также

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{-2\sqrt{7}}{-2} = \sqrt{7} \quad \text{и} \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{5\sqrt{7}}{5} = \sqrt{7} \quad \text{они равны, т.е. наши точки диаметрально}$$

противоположны ($\angle M_1 O M_2 = 180^\circ$). Найдём координаты точек, когда

$\angle M_1 O M_2 = 0^\circ$. Это произойдёт, когда $\omega_1 - \omega_2 = \frac{180^\circ}{t}$; $4\omega_1 = \frac{180^\circ}{t}$; $\frac{4}{t} \cdot \frac{-190^\circ}{t}$; $2 = 45^\circ \Rightarrow$

водомерка пройдёт угол в $45 \cdot 5 = 225^\circ$, а шуха 45° .



17 см на об

7. $\begin{cases} |y-x-6| + |y+x-6| = 12 & (\text{линейный}) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (4 \text{ окружности с центрами } (8;6), (8;-6), (-8;6), (-8;-6) \text{ и } R = \sqrt{a}) \end{cases}$

Есть $y-x \geq 6$ и $y+x \geq 6$; $y-x \leq 6$ и $y+x \geq 6$; $y-x \geq 6$ и $y+x \leq 6$; $y-x \leq 6$ и $y+x \leq 6$

$$2y = 24$$

$$y = 12$$

$$2x = 12$$

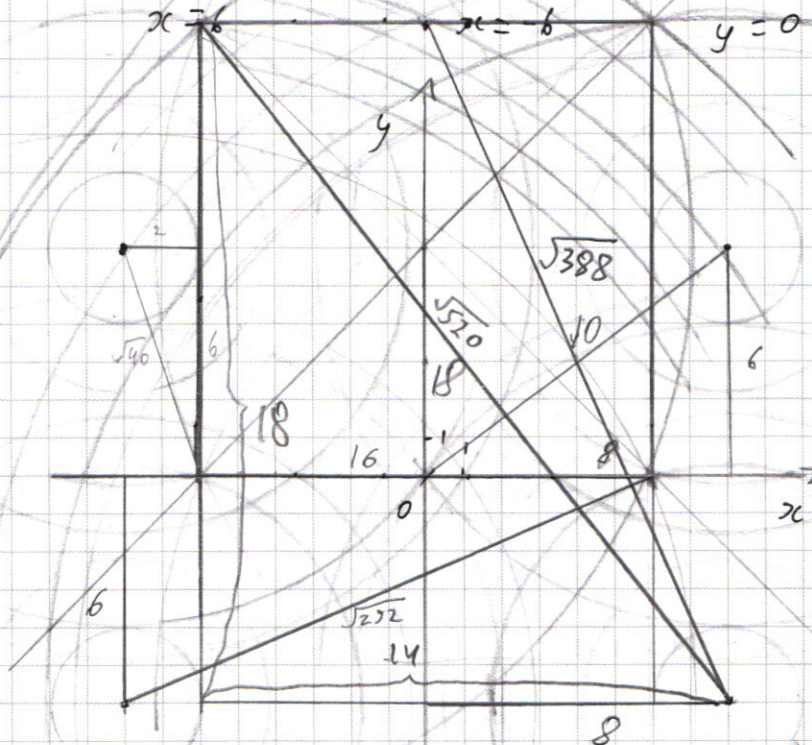
$$x = 6$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$



при $a \in (-\infty; 4)$ - 0 реш.

при $a = 4$ - 2 реш

при $a \in (4; 40]$ - 4 реш

при $a \in (40; 100)$ - 6 реш

при $a = 100$ - 4 реш

при $a \in (100; 292]$ - 6 реш

при $a \in (292; 388)$ - 4 реш

при $a = 388$ - 3 реш

при $a \in (388; 520)$ - 4 реш

Ответ: $a = 2; 520$.

при $a = 520$ - 2 реш

при $a \in (520; +\infty)$ - 0 реш.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4. \quad 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 \geq 0$$

$$\text{при } x \leq 2$$

$$x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^2 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0, \text{ заметим, что } x=1 \text{ хл.}$$

$$2x^4 - 3x^2 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

решением данного
многочлена, тогда

$$\text{Пусть } f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4,$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^2 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | x-1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ 5x^2 - 5x^2 \end{array}$$

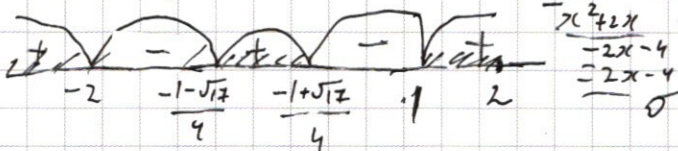
$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \quad | x-1 \\ \underline{2x^3 + 5x^2 - 4} \\ 5x^2 - 5x^2 \end{array}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

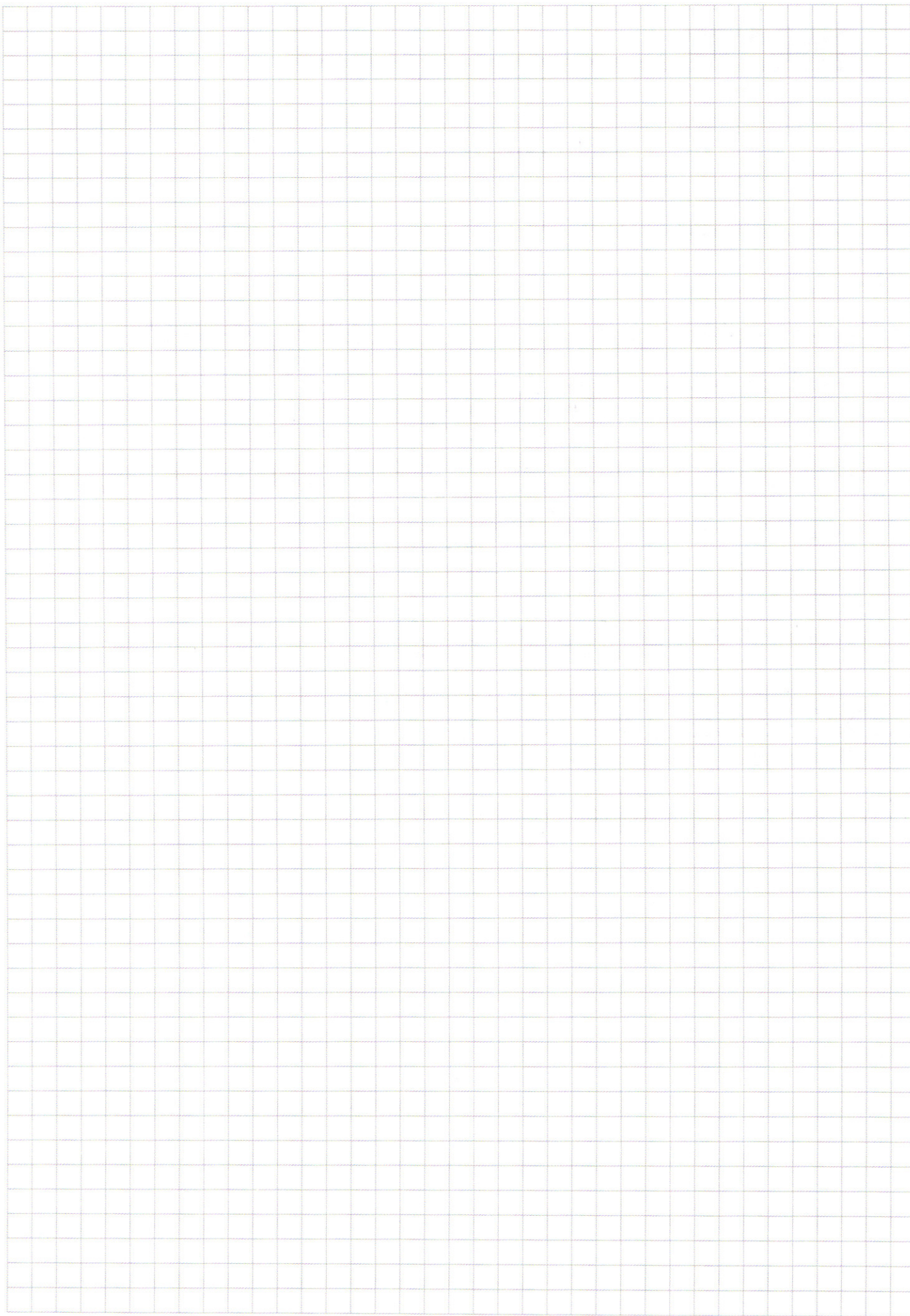
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 5x^2 \\ \underline{0 - 4x + 4} \\ -4x + 4 \\ \underline{-4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-1)(x+2)\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4 \quad | x+2 \\ \underline{2x^3 + 4x^2} \\ x^2 \end{array}$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}; -\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2]$$



$$4. 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$x \leq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + x(x-2) - 3x^2(x-2) - (x-2) \geq 0$$

$$x(x-2) + (x-2) + (x-3x^2-2)$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 2^3 + 2^2$$

$$2^5 - 3 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 2^3 + 2^2$$

$$2^2(2^3 - 3 \cdot 2 + 7 - 2 + 1) \quad 2^9 - 3 \cdot 2^6 + 7 \cdot 2^4 - 4 \cdot 4 + 4$$

$$8 - 6 + 7 - 1$$

$$512 - 1728 + 112 - 16 + 4$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{7}{4} - 2 + 4$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{7}{4} - 2 + 4 = 2 + 2,5$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{7}{4} + 2 + 4$$

$$4 + 28 = 32 = 4\sqrt{2}$$

$$25 + 47 = 10\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{2}$$

$$v_B = 2v_A$$

$$W_B = 2W_A = 10\sqrt{2}$$

$$W_B = 5W_A \quad 64 +$$

$$\sqrt{400 - 200\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} = 400$$

$$= 10\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = 20\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$-16 + 20 - 4 = 0$$

$$2 \ 3 \ 5$$

$$2 \ 5 \ 3$$

$$3 \ 2 \ 5$$

$$3 \ 5 \ 2$$

$$5 \ 2 \ 3$$

$$5 \ 3 \ 2$$

$$2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^1$$

$$2^2 \cdot 2^1 + 2^0$$

$$2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$3 \cdot 2 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

$$3 \cdot 1 - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть $abcdefgh$ - шестизначное число, тогда $abcdefgh = 700$
 $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \Rightarrow$ набор цифр может быть следующим:
 $1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7; 1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7 \Rightarrow$ всего вариантов будет:
 $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5 \cdot 6 \cdot 7 (8 + 4) = 360 \cdot 7 = 2520$

Ответ: 2520

2. $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = S$, где $S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$
 $b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{2999} + 50(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = 10S$
 $49(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = 9S$
 $b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000} = \frac{9}{49}S$
 $b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + b_7 + b_8 + \dots + b_{2999} = \frac{49}{49}S$
 $b_3 + b_3 \cdot q^3 + b_3 \cdot q^6 + \dots + b_3 \cdot q^{2997} = \frac{9}{49}S$
 $b_3 \frac{(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{9}{49}S$
 $b_3 \cdot q^2 \cdot \frac{(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{9}{49}S$

3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$
 $(x+3) \sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} = x^2 + 10x + 24$
 $(x+6) \sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} = (x+4)(x+6) \cdot x$
 $(x+4)^2 - \frac{x^3}{2} + 2x - 40 = 0$
 $2x^2 + 16x + 32 - x^3 + 4x - 80 = 0$
 $-x^3 + 2x^2 + 20x - 48 = 0$
 $x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$
 $x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \mid x-4$
 $x^3 - 4x^2$
 $2x^2 - 20x$
 $2x^2 - 8x$
 $-12x + 48$
 $-12x + 48$
 0
 $D_4 = 1 + 12 = 13$
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Ответ: $x = -1 + \sqrt{13}; 4; 6$.



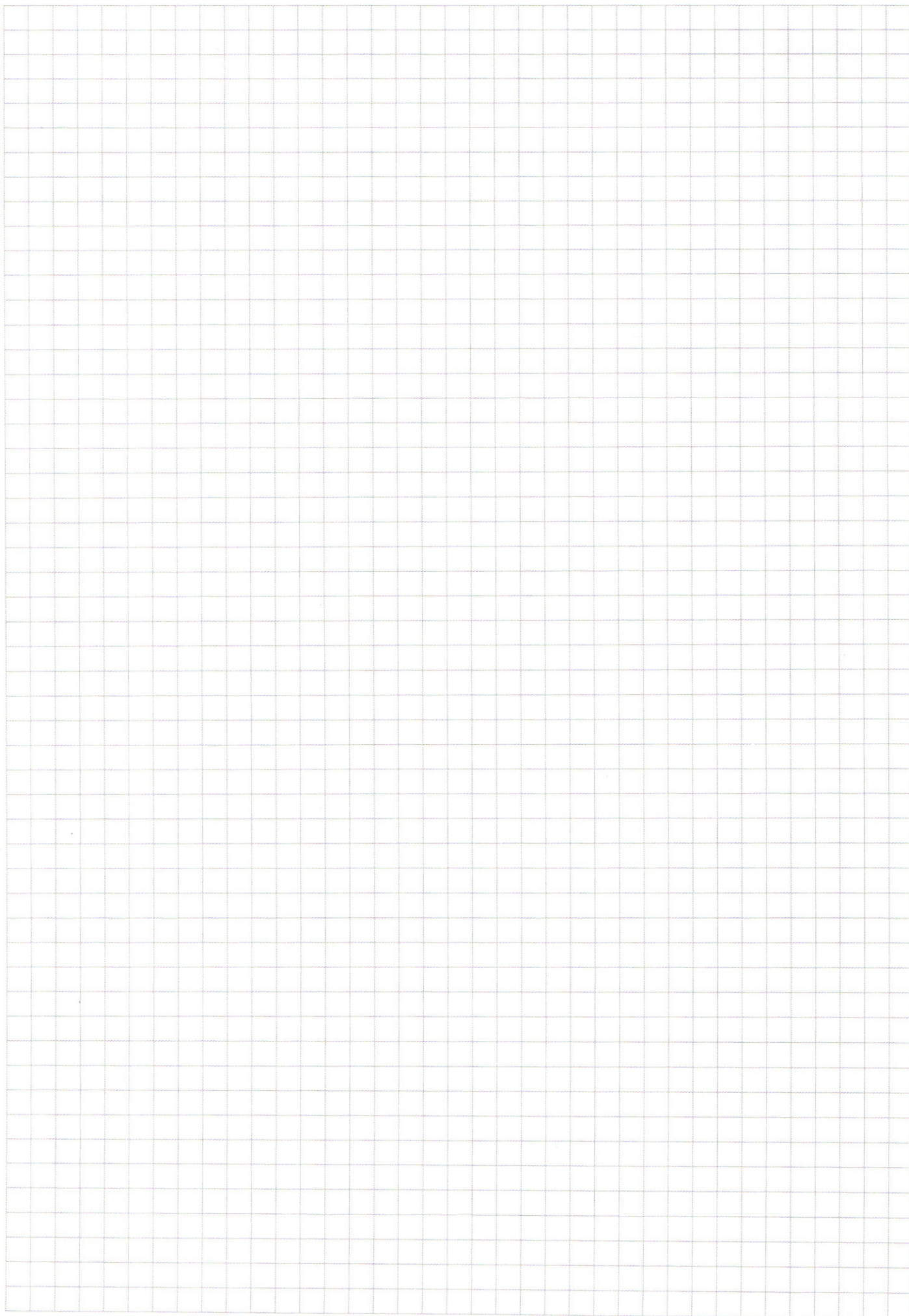
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)