

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2$$

Всего 4 вида возможных чисел с произведением 4900:

~~1) 1x1x2x5x2~~

кол-во	цифры
2	7
2	5
4	2

кол-во	цифры
2	7
2	5
2	4
2	1

кол-во	цифры
2	7
2	5
2	2
4	4
1	1

кол-во	цифры
2	7
2	5
1	8
1	2
2	1

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 60 \\ \hline 2520 \end{array}$$

Для первой группы.

$$1) C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6}{4} = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 28 \cdot 20 = 420$$

$$2) \text{Вторая группа} \quad C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8} = 20 \cdot 42 = 2520$$

$$3) C_8^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8} = 120 \cdot 42 = 5040$$

$$4) \text{Общее кол-во: } 5040 + 5040 + 5040 + 420 = 15540$$

$$S_1 = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 \cdot q^{2999} = \left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right) \cdot b_1$$

$$S_2 = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{2999} = S_1 + 39 q^2 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right) \cdot b_1$$

$$5S_1 = S_2$$

$$S_1 + 39 q^2 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right) b_1 = 5S_1$$

$$39 q^2 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \right) b_1 = 4S_1 = 4 \left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right) \cdot b_1$$

$$39 q^2 = (q^2 + q + 1) \cdot 4$$

$$35 q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$q_1 = \frac{2}{5} \quad q_2 = \frac{5}{4} \text{ (the second one is required)}$$

$$S_3 = b_1 + 3b_1 q + b_1 q^2 + \dots + 3b_1 q^{2999} = S_1 + 2b_1 q \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} \right)$$

$$kS_1 = S_3$$

$$kS_1 = S_1 + 2b_1 q \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} \right)$$

$$S_1(k-1) = 2b_1 q \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} \right)$$

$$\left(\frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \right) (k-1) \cdot b_1 = 2b_1 q \left(\frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} \right)$$

$$k-1 = \frac{2q}{q+1}$$

$$k-1 = \frac{0,8}{1,4} = \frac{4}{7}$$

$$k = \frac{11}{7}$$

Ответ: увеличился в $\frac{11}{7}$ раз

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt[3]{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt[3]{x^3 - 64x + 200} = \cancel{x^2 + 6x - 40} (x+10)(x-4)$$

~~при $x = 10$~~ при $x+10 \neq 0$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 - 64x + 200} \geq 0$
 $\begin{cases} (x+10)(x-4) \geq 0 \end{cases}$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt[3]{x^3 - 64x + 200} = \cancel{(x+10)(x-4)}$$

$$0 \cdot \sqrt[3]{(-10)^3 - 64 \cdot (-10) + 200} = 0$$

$$0 \cdot \sqrt{-1000 + 640 + 200} = 0$$

$$0 \cdot \sqrt{-260} = 0 \text{ (неверно)}$$

при $x+10 \neq 0$, мы можем разделить на эту

величину

$$\sqrt[3]{x^3 - 64x + 200} = x - 4$$

$$\frac{x^3 - 64x + 200}{8} = (x-4)^2$$

$$x^3 - 8x^2 + 42 = 0$$

$$(x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x = 6$$

$$\begin{cases} 6+10 > 0 \\ 6-4 > 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 64x + 200 = 416 - 384 > 0 \Rightarrow \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 42 & x-6 \\ \hline x^3 - 6x^2 & x^2 - 2x - 12 \\ \hline -2x^2 + 42 & \\ -2x^2 + 12x & \\ \hline -12x + 42 & \end{array}$$

$$x^2 - 2x + 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 52 =$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{2} = 1 + \sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{2} = 1 - \sqrt{13}$$

$$(1 + \sqrt{13})^3 - 64(1 + \sqrt{13}) + 200 = (1 + \sqrt{13})(1 + 2\sqrt{13} + 13) - 64 - 64\sqrt{13} + 200 =$$

$$1 + 2\sqrt{13} + 13 + \sqrt{13} + 26 + 13\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200 =$$

$$240 - 64 - 44\sqrt{13} = 176 - 44\sqrt{13} > 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{13} \text{ (yes ODS)} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \sqrt{13} > 4 \\ 1 + \sqrt{13} + 10 > 0 \end{array} \right.$$

$$3,9 > \sqrt{13}$$

$$176 - 44 \cdot 3,9 > 0 \Rightarrow 176 - 44\sqrt{13} > 0$$

$$1 - \sqrt{13} - 4 < 0$$

$$1 - \sqrt{13} + 10 > 0$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{13} \text{ (no yes ODS)}$$

$$\text{Answer } x = 6, \quad x = 1 + \sqrt{13}$$

14

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3(x+2) + 4 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \text{ при } x \geq -2 \\ 4x^4 + x^2 + 4x + 10x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0 \text{ при } x \leq -2 \end{array} \right.$$

$$1) 4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0 \text{ (при } x \leq -2)$$

Докажем, что при $x \leq -2$ это выполняется всегда

$$4x^4 + 11x^2 + 4 \geq 5x^3 + 4x$$

$$4x^4 > -5x^3$$

$$\text{при } \left\{ \begin{array}{l} x < -\frac{5}{4} \\ x > 0 \end{array} \right.$$

$$; \text{ так } -2 < -\frac{5}{4}, \text{ но } 4x^4 > -5x^3$$

$$11x^2 > -4x$$

$$\text{при } \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x < -\frac{4}{11} \end{array} \right.$$

$$; \text{ так } -2 < -\frac{4}{11}, \text{ но } 11x^2 + 4x > 0$$

$$\Rightarrow 4x^4 + 11x^2 + 4 + 5x^3 + 4x \geq 0 \text{ при любых } x \leq -2$$

$$x \in (-\infty, -2]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$ (при $x \geq -2$)

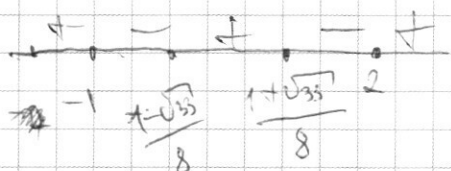
$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 33$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$



$$x \in [-2, -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2, +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2, +\infty)$

N5

R_k — радиус окружности катан

R_n — радиус окружности основания

$$R_k = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$V_k = 2,5 V_n$$

$$R_n = \sqrt{(2)^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6$$

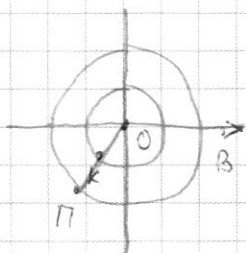
$$\left. \begin{aligned} V_k &= \omega_k \cdot R_k^2 \text{ (уловов катанов)} \\ V_n &= \omega_n \cdot R_n^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_k = 5\omega_n$$

ω_c — уловов катанов сбалансирован

$$\omega_c = \omega_k = \omega_n = 4\omega_n$$

Намеченное расстояние между краем и началом Будет, когда из ~~начальной~~ Будет точка на окружности Будет лежит на дуге прямой пропорцией углу начало координат:



$\angle BOA = \angle BOП$ (потому что намеченное расстояние между двумя точками на окружности равно $d = (r_1 + r_2)$, где d - расстояние между центрами r_1 и r_2 радиус окружности, если они не пересекаются)

Значит углы φ_k и φ_n углами будут равны (углом φ обозначим дуги образованной радиусом окружности и осью Ox, где по часовой стрелке)

П.к угловая точка края цилиндрической точки будет, то относительно начала координат, то между ними угол π

$$t_{\text{оборота}} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{4\omega_n} \Rightarrow t_{\text{оборота}} \cdot \omega_n = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{вектор умножит } \frac{\pi}{4} \text{ дуги (точка вернется)}$$

$$N_0(2, -4\sqrt{2}) = \sin \varphi_0 \cdot R_n, \sin \varphi_0 R_n$$

$$N_0 \left(\cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}) \cdot R_n, \sin(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}) R_n \right)$$

$$N_0 \left(\right.$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{2}{R_n} = \frac{1}{3}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{-4\sqrt{2}}{6} = \frac{-\sqrt{2}}{3} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}) = \cos \varphi_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \varphi_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sin \varphi_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos \varphi_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{-4 + \sqrt{2}}{8}$$

$$\sin(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}) = \sin \varphi_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \varphi_0 = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{6}$$

Значит координаты Будут: $N_0(-4 + \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

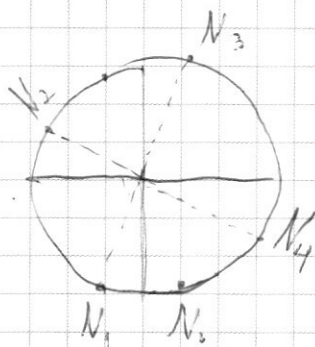
неудовольствие выражена прощанием при расставании:

$$t_{\text{встр}} = \frac{2\pi}{\omega_c} = 1$$

$$t_{\text{встр}} \cdot \omega_m = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

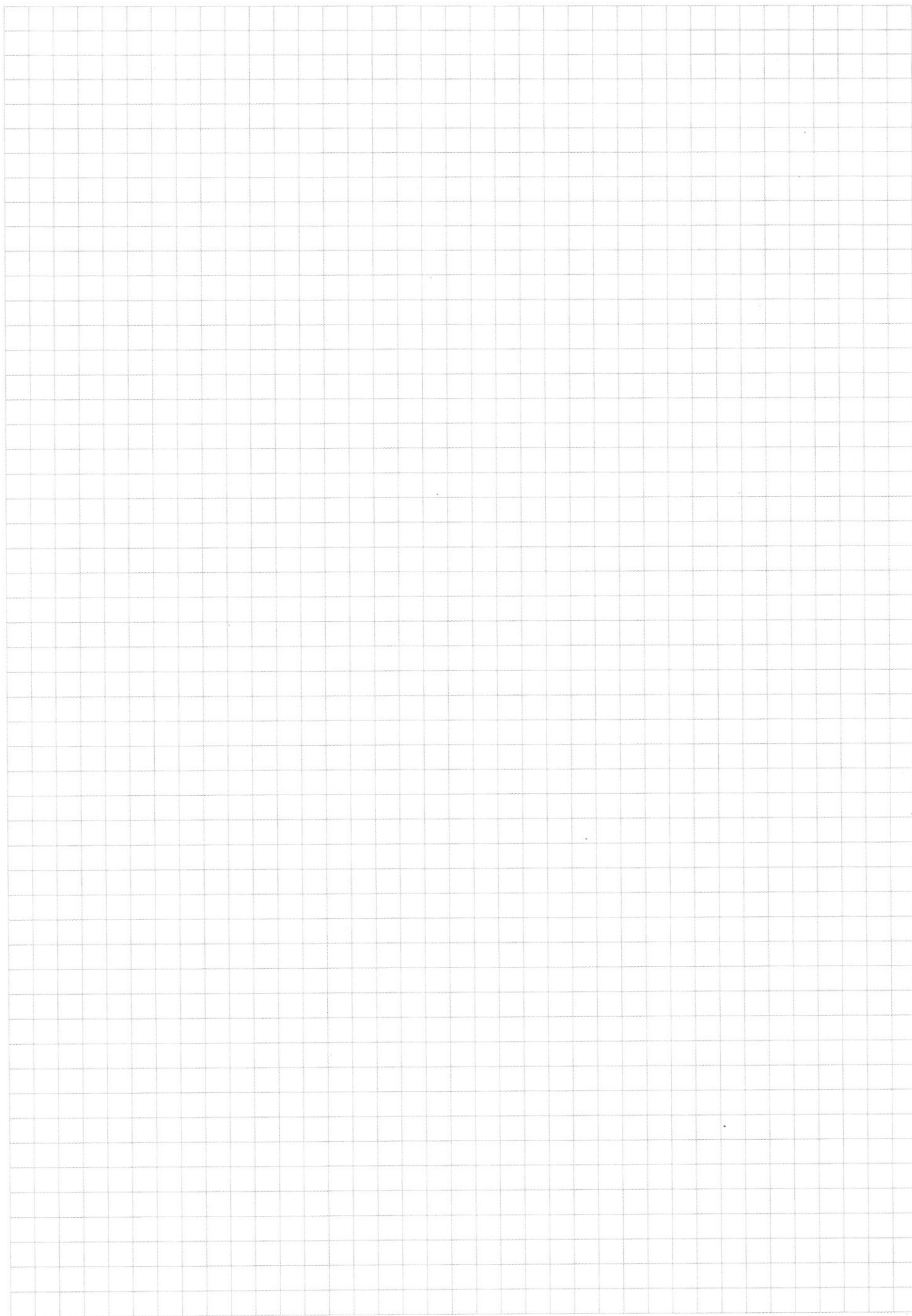
Значит, движение начнется будет продолжаться еще четверть круга.

Координаты $N_2(-\sqrt{2}, -4; 4-\sqrt{2})$, $N_3(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$, N_4



~~$N_4(4+\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$~~
 $N_4(4+\sqrt{2}, \sqrt{2}-4)$

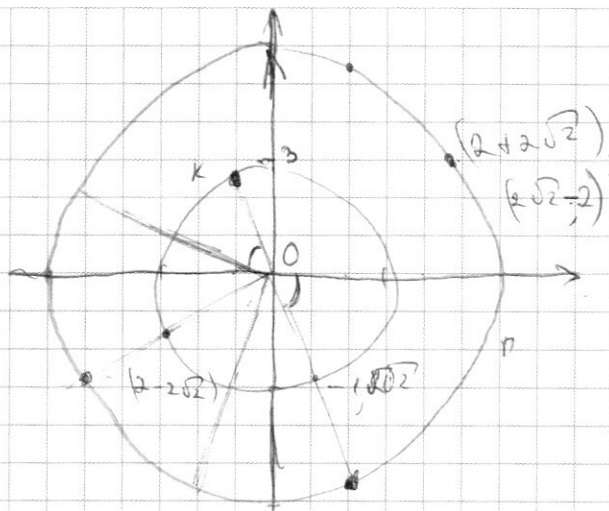
Ответ: $N_1(-4+\sqrt{2}, -\sqrt{2}-4)$; $N_2(-\sqrt{2}-4, 4-\sqrt{2})$; $N_3(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$
 $N_4(4+\sqrt{2}, \sqrt{2}-4)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$U_k = 2.5 U_n$$

$$U_k = \omega \cdot r$$

$$\omega_k = 5 \omega_n$$

$$U_n$$

$$\pi$$

$$4\omega_k t = 4\omega_n t = \pi$$

$$L_k$$

$$\frac{\pi}{k_k}$$

$$\frac{t_n}{t_k} = \frac{4}{9}$$

$$\pi$$

$$5\omega_n \cdot t = 5\omega_k \cdot t$$

$$2 \frac{t_n}{4}$$

$$t_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$$

$$\frac{t_n}{t_k} = \frac{4}{9}$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha \cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + (-1) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \leftarrow 2\sqrt{2}$$

$$4 - 2\sqrt{2}$$

$$t_k = \frac{2\pi}{\omega_k} \cdot 0.125$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -2\sqrt{2} - 2$$

$$-4 - 4\sqrt{2}$$

$$\frac{-2\sqrt{2} \cdot 1}{3}$$

$$5\omega_k = 5\omega_n$$

$$t_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$t_k = \frac{2\pi}{5\omega_n}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{6}$$

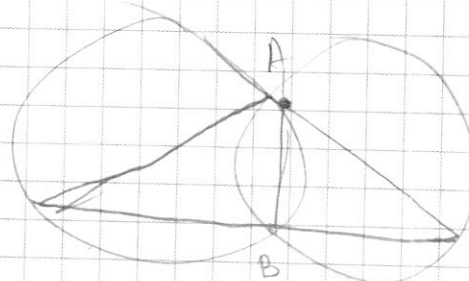
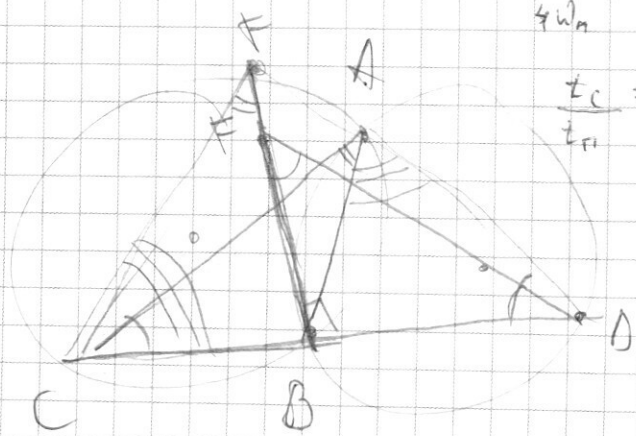
$$t_k = \frac{2\pi}{4\omega_n}$$

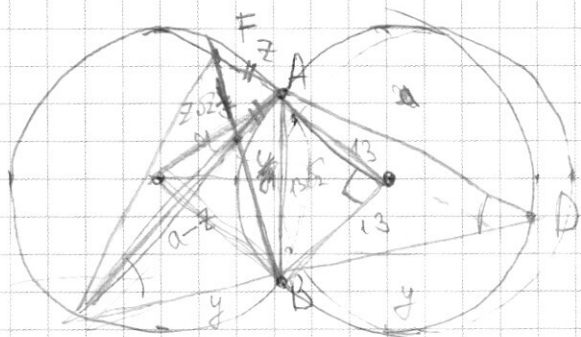
$$\frac{\pi}{4\omega_n} = \frac{t_k}{2} = \frac{t_n}{8}$$

$$\frac{t_k}{t_n} = \frac{1}{4}$$

$$\omega_n t_n = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$AC = AD$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4900 | $5^2 4^2 4^2$ $\approx 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $6 \cdot 36 \cdot 216 = 36$

$\frac{16}{8} = 128$ $b_2 = q \cdot b_1$ $q^2 b_1$ $q^4 b_1$

$(x-4)(x+10)$

$x+10 \geq 0$

$x^3 - 64x + 200$

$x^3 - 8x^2 + 42 = 0$

$9 \cdot 8$

$9 \cdot 8 \cdot 3 = 4 \cdot 9 \cdot 8$

$(x-9) = 0$

$366 - 8 \cdot 36 + 2 \cdot 36$

$2q | q^4 + q^2 + q^4 + q^{2998}$

$\frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} : \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$

$\frac{39}{q^3 - 1} = \frac{4}{q - 1}$

$4q^5 - 4 = 39q - 1$

$4q^5 + 4q - 39 = 0$

$4q^2 + 4q - 35 = 0$

$q^2 + q - 8 \frac{7}{5}$

$q_1 = \frac{4}{5}$ $q_2 = \frac{5}{2}$ (и др. корни)

$q^2 + q^5 + q^8 + q^{11} + q^{14} + q^{17} + q^{20} + q^{23} + q^{26} + q^{29} + q^{32} + q^{35} + q^{38} + q^{41} + q^{44} + q^{47} + q^{50} + q^{53} + q^{56} + q^{59} + q^{62} + q^{65} + q^{68} + q^{71} + q^{74} + q^{77} + q^{80} + q^{83} + q^{86} + q^{89} + q^{92} + q^{95} + q^{98} + q^{101} + q^{104} + q^{107} + q^{110} + q^{113} + q^{116} + q^{119} + q^{122} + q^{125} + q^{128} + q^{131} + q^{134} + q^{137} + q^{140} + q^{143} + q^{146} + q^{149} + q^{152} + q^{155} + q^{158} + q^{161} + q^{164} + q^{167} + q^{170} + q^{173} + q^{176} + q^{179} + q^{182} + q^{185} + q^{188} + q^{191} + q^{194} + q^{197} + q^{200} + q^{203} + q^{206} + q^{209} + q^{212} + q^{215} + q^{218} + q^{221} + q^{224} + q^{227} + q^{230} + q^{233} + q^{236} + q^{239} + q^{242} + q^{245} + q^{248} + q^{251} + q^{254} + q^{257} + q^{260} + q^{263} + q^{266} + q^{269} + q^{272} + q^{275} + q^{278} + q^{281} + q^{284} + q^{287} + q^{290} + q^{293} + q^{296} + q^{299}$

$a = q^3$

$\frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{3000}{q - 1} \cdot 4$

$\frac{2994}{24} = 124 \frac{6}{24}$

$\frac{35}{4}$

$$39q^2 \cdot \frac{1}{q^2+q+1} = 4$$

$$4q^2 + 4q + 1 = 39q^2$$

$$35q^2 - 4q - 1 = 0$$

$$q^2 - \frac{4}{35}q - \frac{1}{35} = 0$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{-10}{40} = -\frac{5}{35}$$

$$S_1 = qb_1 + b_1q + b_1q^2$$

$$b_1q^{2935} = b_1 \left(\frac{q^{3000}}{q-1} \right)$$

$$(x+3)^2 - x^2 = (x-4)(x+4)$$

$$S_2 = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 = S_1 + b_1 \cdot 39q^2 \cdot \frac{q^{3000}}{q^3-1} = 5S_1$$

$$4S_1 = 39q^2 \left(\frac{q^{3000}}{q-1} \right)$$

$$x^2 + 6x + 9 - 49$$

$$(x+3)^2 - x^2 = (x+3-x)(x+3+x)$$

$$(x-4)(x+4)$$

$$\frac{4 \cdot \frac{q^{3000}}{q-1}}{q-1} = 39q^2 \left(\frac{q^{3000}}{q^3-1} \right)$$

$$x^2 + 6x + 9 - 49 = x^2 - 16$$

$$\frac{q^3-1}{q-1} = \frac{39q^2}{4}q^2$$

$$q^2 + q + 1 = \frac{39q^2}{4}$$

$$\frac{35q^2}{4} + q + 1 = 0$$

$$q^2 - \frac{4}{35}q - \frac{4}{35} = 0$$

$$\frac{2}{5} - \frac{2}{5}$$

$$q_1 = \frac{2}{5} \text{ или } q_2 = \frac{2}{5} + \text{и др.}$$

0,4

$$S_3 = S_1 + b_1q \left(\frac{q^{3000}}{q^2-1} \right) = kS_1$$

$$(k-1) \left(\frac{q^{3000}}{q^2-1} \right) = \frac{q^{3000}}{q^2-1} \cdot q$$