МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1; 2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2; -4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16, \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$4900 = 2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$ $\cancel{7\cdot7}$

Заметим, что мы не можем объединить 2 и 5, 2 и 7, 5 и 7 и т.д. (всё кроме 2 и 2) в одно число, т.к. оно >9 => нет такой цифры.

① Используемые цифры: 2, 2, 5, 5, 7, 7
т.к. число 8-знач., то надо ещё две '1' =>

Расставим 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7 на 8 мест:

кол-во способов расставить все ← $\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 2520$

можем менять местами 1, 2, 5 и 7 => для каждой пары — $2! = 2$ вар.

② Исп. цифры: 4, 6, 5, 7, 7
всего 8 мест => еще 3 единицы

Расставим: $\frac{8!}{2!\,2!\,3!}$ = $8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$

8! => всего способов

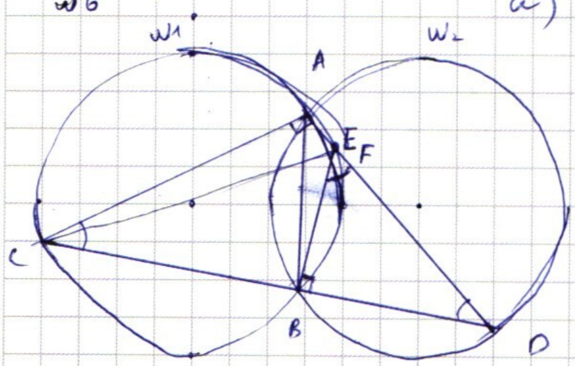
3! → меняем '1'

можем менять 5 и 7

Всего: $2520 + 1680 = 4200$

Ответ: 4200.

№6



а) w_1, w_2 – данные окр-сти.

$w_1 = w_2$ => дуги, соединяемые хордой AB в w_1 и в w_2 равны => $\angle ACB$, опир. на $\breve{AB}$ = $\angle ADB$, опир. на $\breve{AB}$ => $\angle C = \angle D = 45°$, т.к. $\angle CAD = 90°$

E – точка пересеч. перпенд. из B и AD. , $\angle ADB = 45°$, $\angle EBD = 90°$ => $BD = BE$ => $F = E$, т.к. $BF = BD$, $F \in (BE)$.

$\angle FAC = 90°$, $\angle FBC = 90°$ => AFBC – вписан =>
$F \in w_1$, т.к. $A, B, C \in w_1$ =>
$\angle FAC = 90°$, $F, C \in w_1$ => FC – диаметр. =>
$FC = r\cdot2 = 13\cdot2 = 26$.

Ответ: 26.

б) ~~$BC = 10$. $FC^2 = 676$ => $FB^2 = 676 - 100 = 576$ $BD^2 = FB^2 = 576$ $FD^2 = BD^2 + FD^2 = 1152$~~

~~$S_{ACF} = \frac{AF\cdot AC}{2}$ $AC = AD$, т.к. $\angle D = \angle C = 45°$, $FD + AF = AC$ $AF = AC - FD$ => $S = \frac{1}{2}(AC^2 - ACFD)$~~

~~$AC^2 + AF^2 = CF^2$ $AF^2 = 676 - AC^2$~~

№2

$b_1 = b$

$b_2 = db$

$b_3 = d^2 b$

$\vdots$

$b_{3000} = d^{2999} b$

$d > 0$, т.к. все положит.

$$S = b\left(\frac{d^{3000}-1}{d-1}\right)$$

$$S_3 = b_3 + \ldots + b_{3000} = bd^2 + bd^5 + \ldots + bd^{2999} =$$
$$= bd^2\left(1 + d^3 + \ldots + d^{2997}\right) =$$
$$= bd^2\left(\frac{d^{3000}-1}{d^3-1}\right)$$

$$\underset{\text{вычли то, что было}}{S - S_3} + \underset{\text{домножили каждый член суммы на 40.}}{40 S_3} = 5S$$

$$39 S_3 = 4S$$

$$39\cancel{b}d^2\left(\frac{\cancel{d^{3000}-1}}{d^3-1}\right) = 4\cancel{b}\left(\frac{\cancel{d^{3000}-1}}{d-1}\right)$$

$$39d^2(d-1) = 4(d^3-1)$$
$$39d^3 - 4d^3 - 39d^2 + 4 = 0$$
$$35d^3 - 39d^2 + 4 = 0$$

По схеме Горнера:

	35	-39	0	4
1	35	-4	-4	0

$\Rightarrow d = 1$ - корень, но это геом. пр. $\Rightarrow d \neq 1$.

$$35d^2 - 4d - 4 = 0$$
$$D = 16 + 4\cdot 35\cdot 4 = 36\cdot 16$$
$$d_1 = \frac{4+24}{35\cdot 2} = \frac{28}{70} = 0{,}4$$
$$d_2 = \frac{4-24}{70} < 0 \Rightarrow \text{не подходит} \Rightarrow \boxed{d = 0{,}4}$$

$$S_2 = b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000} = db + d^3 b + \ldots + d^{2999} b = db\left(1 + d^2 + \ldots + d^{2998}\right) =$$
$$= db\left(\frac{d^{3000}-1}{d^2-1}\right) = db\left(\frac{d^{3000}-1}{d-1}\right)\cdot\frac{1}{(d+1)}$$

~~$S_2 \vee S$:~~ ~~$S = b\left(d^{3000}-1\right.$~~

$$\frac{S_2}{S} = \frac{d\cancel{b}\,\cancel{\frac{d^{3000}-1}{d-1}}\cdot\frac{1}{d+1}}{\cancel{b}\,\cancel{\frac{d^{3000}-1}{d-1}}} = \frac{d}{d+1} = \frac{0{,}4}{1{,}4} = \frac{2}{7}$$

$$S_2 = \frac{2}{7}S \qquad S - S_2 + 3S_2 = S + \frac{4}{7}S = \frac{11}{7}S$$

Ответ: увел. в $\frac{11}{7}$ раз.

№6 б) $BC = 10$, $FC = 26$

$$\begin{cases} AF^2 + AC^2 = FC^2 \\ BC^2 + BF^2 = FC^2 \\ AC = AD \qquad FD + AF = AD \\ BD = FB \qquad AC^2 + AD^2 = CD^2 \\ FD^2 = FB^2 + BD^2 \end{cases}$$

$S_{AFC} = \frac{AF\cdot AC}{2} = ?$

~~$AF = a$, $AC = b$~~ $\quad a^2 + b^2 = 26^2$

$BF^2 = 26^2 - 10^2 = 576 = BD^2 \qquad FD^2 = BF^2 + BD^2 = 1152$

~~$\begin{cases} b = a + \sqrt{1152} \\ b^2 = 676 - a^2 \end{cases}$~~

~~$a^2 + 1152 + 2a\sqrt{1152} = 676 - a^2$~~

~~$2a^2 + 2a\sqrt{1152} + 476 = 0$~~

~~$D = 1152 - 8\cdot 476 = 800$~~

~~$a = \frac{-2\sqrt{1152} + \sqrt{800}}{4}$~~

$CD = BD + BC = \ldots$

$2AC^2 = CD^2 = \left(10 + \sqrt{576}\right)^2 = 676 + 20\sqrt{576} \quad \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{1}{2}\left(676 + 20\sqrt{576}\right)}$

$AF = 26^2 - AC^2 = 676 - \frac{1}{2}676 - 10\sqrt{576} = 338 - 10\sqrt{576}$

Ответ: $\quad S_{AFC} = \frac{\sqrt{338 - 10\sqrt{576}}\cdot\sqrt{338 + 10\sqrt{576}}}{2} = \frac{\sqrt{338^2 - 10^2\cdot 576}}{2} = \sqrt{141661}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

w5	К	П
скорость:	$2{,}5v$	v
угл. скорость:	$\omega_к$	$\omega_п$
радиус:	$r_к$	$r_п$
нач. угол:	$\alpha_к$	$\alpha_п$

$r_к = \sqrt{1+8} = 3$

$r_п = \sqrt{4+32} = 6$

$\omega_к = \frac{2{,}5v}{r_к} = \frac{2{,}5v}{3}$

$\omega_п = \frac{v}{6}$

$\omega_п = \omega \Rightarrow \omega_к = 5\omega$

$\cos\alpha_к = -\frac{1}{3}$ $\quad \sin\alpha_к = \frac{\sqrt8}{3}$

$\cos\alpha_п = \frac{1}{3}$ $\quad \sin\alpha_п = -\frac{\sqrt8}{3}$

$x_к(t) = 3\cos(\alpha_к - 5\omega t)$ $\quad x_п(t) = 6\cos(\alpha_п - \omega t)$

$y_к(t) = 3\sin(\alpha_к - 5\omega t)$ $\quad y_п(t) = 6\sin(\alpha_п - \omega t)$

$D^2 = (x_к - x_п)^2 + (y_к - y_п)^2 =$

$= (3\cos(\alpha_к - 5\omega t) - 6\cos(\alpha_п - \omega t))^2 + (3\sin(\alpha_к - 5\omega t) - 6\sin(\alpha_п - \omega t))^2 =$

$= 1 + 1 - 2\cdot3\cdot6\cdot\cos(\alpha_к - 5\omega t)\cdot\cos(\alpha_п - \omega t) + 2\cdot3\cdot6\sin(\alpha_к - 5\omega t)\sin(\alpha_п - \omega t) =$

$= 2 + 36(\cos(\alpha_к - 5\omega t - \alpha_п + \omega t)) =$

$= 2 + 36\cdot\cos(\alpha_к - \alpha_п - 4\omega t) =$

$= 2 + 36\cdot(\cos(\alpha_к - \alpha_п)\cos 4\omega t + \sin(\alpha_к - \alpha_п)\sin 4\omega t) =$

$= 2 + 36\cdot((\cos\alpha_к\cos\alpha_п + \sin\alpha_к\sin\alpha_п)\cos 4\omega t +$

$+ (\cos\alpha_п\sin\alpha_к - \cos\alpha_к\sin\alpha_п)\sin 4\omega t) =$

$= 2 + 36\left(\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{\sqrt8}{3}\frac{\sqrt8}{3}\right)\cos 4\omega t + \left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt8}{3} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt8}{3}\right)\sin 4\omega t\right) =$

$= 2 + 36\left(-\frac{1}{9} - \frac{8}{9}\right)\cos 4\omega t = 2 - 36\cos 4\omega t$

$D^2 = 2 - 36\cos 4\omega t \to \min \Rightarrow \cos 4\omega t \to \max \Rightarrow$

$\cos 4\omega t = 1.$

$4\omega t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$t = \frac{\pi}{8\omega} + \frac{2\pi n}{4\omega} =$

$= \frac{\pi + 4\pi n}{8\omega}$

$x_п(t) = 6\cos\left(\alpha_п - 5\omega\left(\frac{\pi + 4\pi n}{8\omega}\right)\right) = 6\cos\left(\alpha_п - 5\left(\frac{\pi + 4\pi n}{8}\right)\right) =$

$= 6\cdot\cos\alpha_п\cos\left(\frac{5}{8}(\pi + 4\pi n)\right) + 6\sin\alpha_п\sin\left(\frac{5}{8}\left(\frac{\pi + 4\pi n}{8}\right)\right) =$

$= 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{5}{8}\pi - 6\frac{\sqrt8}{3}\sin\frac{5}{8}\pi = 2\cos\frac{5\pi}{8} - 2\sqrt8\sin\frac{5\pi}{8}$

$y_п(t) = 6\sin\left(\alpha_п - 5\omega\left(\frac{\pi + 4\pi n}{8\omega}\right)\right) = 6\sin\alpha_п\cos\left(\frac{(\pi + 4\pi n)5}{8}\right) - 6\sin\frac{5}{8}\left(\frac{\pi + 4\pi n}{1}\right)\cdot\cos\alpha_п =$

$= -6\frac{\sqrt8}{3}\cos\frac{5}{8}\pi - 6\frac{1}{3}\sin\frac{5\pi}{8} = -2\sin\frac{5\pi}{8} - 2\sqrt3\cos\frac{5\pi}{8}$

Ответ: $\left(2\cos\frac{5\pi}{8} - 2\sqrt8\sin\frac{5\pi}{8};\ -2\sin\frac{5\pi}{8} - 2\sqrt3\cos\frac{5\pi}{8}\right)$.

№7 $\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16\\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$

① $|y+x+8|=y+x+8$, $|y-x+8|=y-x+8 \Rightarrow y+x+8\geq 0$, $y-x+8\geq 0$

$y+x+8+y-x+8=16 \quad 2y+16=16 \quad y=0$, x - любое.

② $|y+x+8|=y+x+8$, $|y-x+8|=x-y-8 \Rightarrow y-x+8<0\leq y+x+8$

$y+x+8+x-y-8=16$

$2x=16 \Rightarrow x=8$, y - любое

③ $|y+x+8|=-y-x-8$, $|y-x+8|=-x+y+8 \Rightarrow y+x+8<0\leq y-x+8$

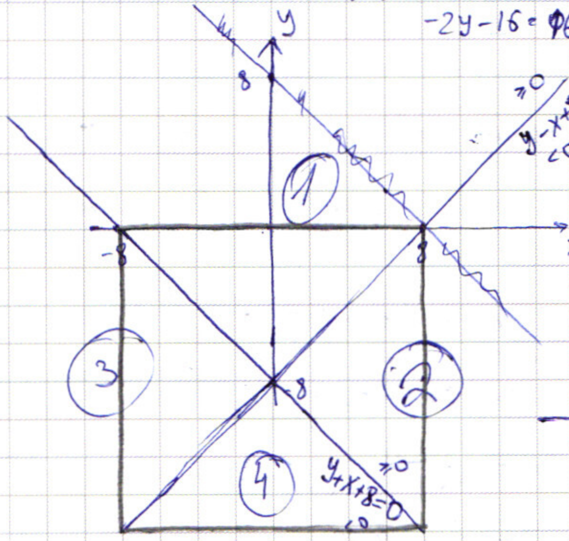
$-y-x-8+y+8-x=16$

$-2x=16 \quad x=-8$, y - любое

④ $|y+x+8|=-y-x-8$, $|y-x+8|=-y+x-8 \Rightarrow y+x+8<0$, $y-x+8<0$

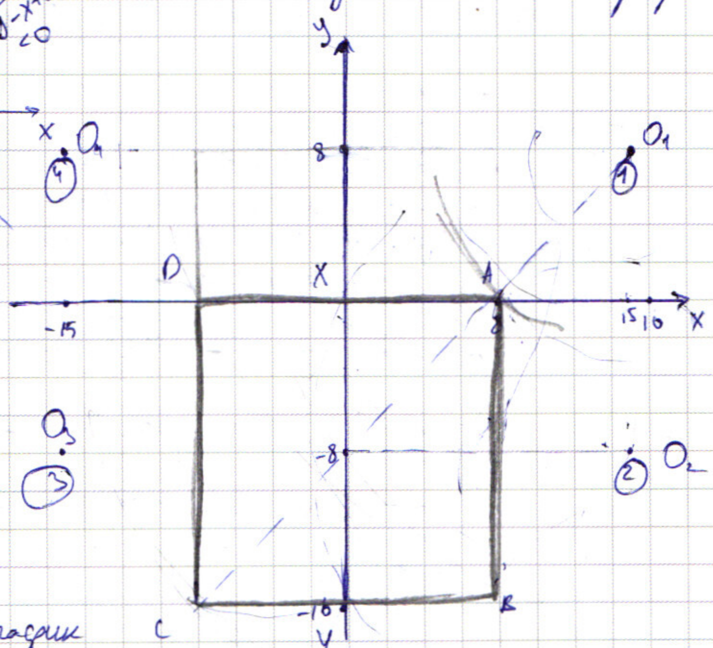
$-y-x-8+x-y-8=16$

$-2y-16=16 \Rightarrow y=-16$, x - любое.



гр.1.

——— - получившийся график



гр.2

$(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a$ - график в виде 4 окр-стей с центрами в точках, что $|y_0|=8$, $|x_0|=15$ и радиусом $\sqrt{a}$.

На гр.2 указаны номера центров. ~~Если 1 и 4 пересек. квадрат,~~ Если 1 пер. квадрат, то 4 тоже. Если 2 пер. квадрат, то 3 тоже $\Rightarrow$ либо у 1 и 4 по одной точке пер., либо у 2 и 3 по одной точке пер.

У 1 и 4 по одной т.п.: $a=O_1A$ или O_1C. Если $a=O_1A$, то окр-сти 2 пересек. квадрат. $\Rightarrow a=O_1C=\sqrt{19^2+24^2}=\sqrt{937}$.

У 2 и 3 по одной т.п. или они совпадают: 1) по одной $\Rightarrow a=3$; 2) совп. $\Rightarrow a=O_2X=\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17 \Rightarrow$ 1 и 4 тоже пересекут квадрат, в других местах $\Rightarrow$ не подходит

Ответ: $\sqrt{937}$ или 3.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4900 = 7\cdot7\cdot10\cdot10 = 7\cdot7\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5$

$2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1$

$\frac{8!}{2^4} = 6\cdot7\cdot5\cdot4\cdot3 = 210\cdot12$

$d^{3^{n-1}} = d^{2997}$

$d^{3^n} - 1 = (d^3 - 1)$

$d^n - 1 = (d-1)\cdot(d^{n-1} + d^{n-2} \ldots + 1)$

$3(n-1) = 2997+3$, $n = 1000$

$ad, ad^2, \ldots ad^n$

$= a(d + \ldots + d^n)$

$a(1 + \ldots + d^{n-1}) = a\left(\frac{d^n - 1}{d-1}\right)$

$b_1 \ldots b_{3000}$

$b_0, db_0, d^2b_0 \ldots d^{3000}b_0$

$S = b_0\left(\frac{d^{3000}-1}{d-1}\right)$

$S_2 = 5S$

$b_0, db_0, 40d^2b_0, \ldots \quad 40(b_0d^2 + b_0d^5 + b_0d^8 + \ldots + b_0d^{2999}) =$

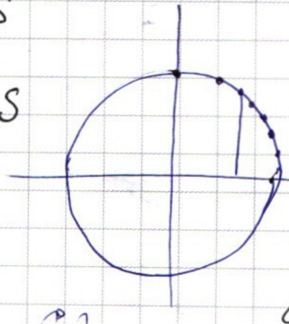
$= 40b_0(d^2 + d^5 + \ldots + d^{2999}) =$

$= 40b_0d^2(1 + d^3 + \ldots + d^{2997}) =$

$= 40b_0d^2\left(\frac{d^{3000}-1}{d^3-1}\right)$

$S_2 = S + 39b_0d^2\left(\frac{d^{3000}-1}{d^3-1}\right) = 5S$

$39b_0d^2\left(\frac{d^{3000}-1}{d^3-1}\right) = 4S$



$210 \times 12 = 420$, 121, 2520

$210 \times 8 = 1680$, $\times 2520$, 4200

225×64, 29

17×17, 119, 17

19×19, 171, 19, 1361

$-2y = 32$, $y = -$

$12 + 12 + 4 = 35$

$8 - 8 + 8 = 0$

$8 - 8 + 8 \le 0$

338, 240, 98, $338 - 10 \cdot 24$

24×24, 96, 48, 576

$576 + 361 = 937$

$y = x - 8$

$x = 8$, $y = -8$

$y = x - 8$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{x}{2\sqrt2}+\frac{5\sqrt2}{2}\right)^{\sqrt2}\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt2}\cdot\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40 \quad \uparrow^2$$

$$\frac{x^2+2x+100}{4\cdot2}\cdot\left(x^3-64x+200\right)=x^4+36x^2+40^2+2\left(6x^3-40x^2-240x\right)= \quad |\cdot 8$$

$$=x^4+12x^3-44x^2-480x+1600$$

$$(x^2+2x+100)(x^3-64x+200)=8(x^2+6x-40)^2$$

$$x^5-64x^3+200x^2+2x^4-128x^2+400x+100x^3-6400x+20000=$$

$$=x^5+2x^4+36x^3+72x^2-6000x+20000=$$

$$=8x^4+96x^3-352x^2-3360x+12800$$

$$x^5-6x^4-60x^3+424x^2-2640x+7200=0$$

$$x^4(x-6)-60x^2(x-6)+64x^2-2640x+7200=$$

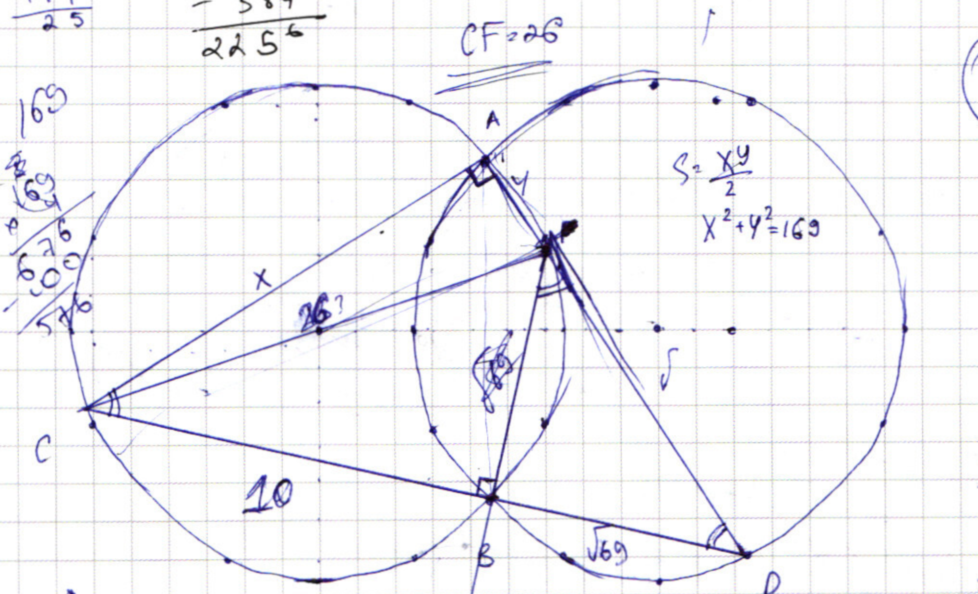
	1	-6	-60	424	-2640	7200
6	1	0	-60	64	2256	

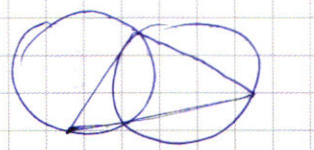
$13^2=12^2+5^2$

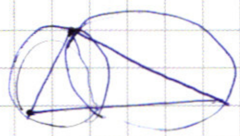
$169-144=25$

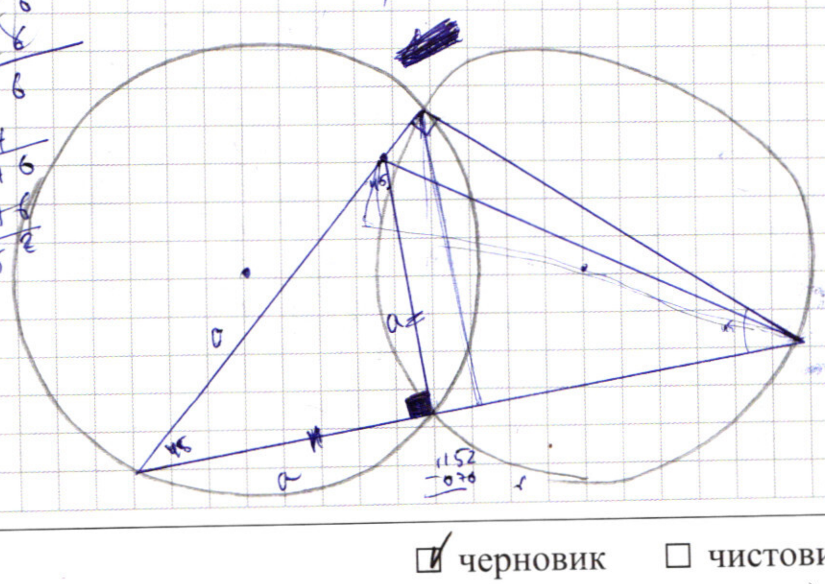
$2640-384=2256$

$CF=26$









$476\cdot 8=3808$

$1152\cdot 4=4608$

$4608-3808=800$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

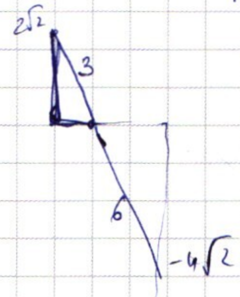
$|y+x+8|^2 + |y-x+8|^2 + 2|(x+y+8)(y-x+8)| =$

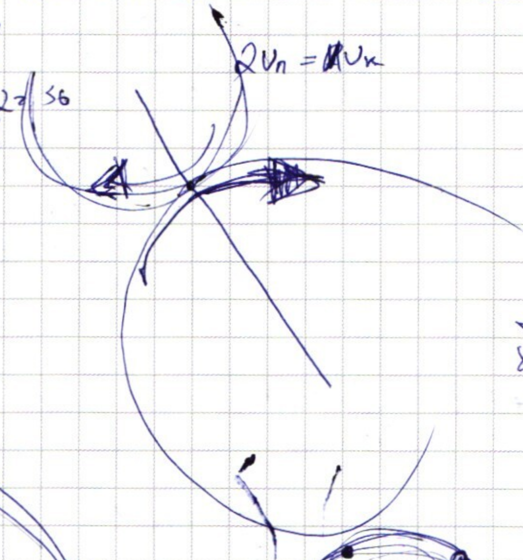
$= y^2+x^2+64+2(xy+8x+8y)+y^2+x^2+64+2(8y-8x-xy)+2\,|(y+8)^2-x^2|$

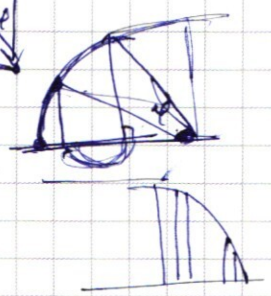
$1^2+4\cdot 2^2$

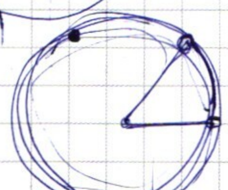
$4+16\cdot 2 = 36$

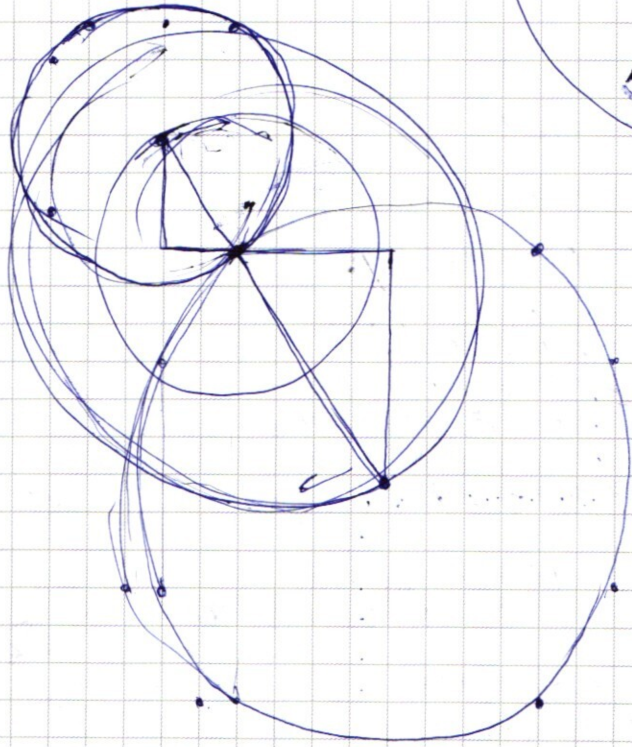
$2v_n = v_k$











x_0

y_0

$t\omega$ ~~сколько~~

$vt = 2\pi r$

$2\pi r \qquad 2\pi r = v\cdot T_0$

$\cancel{vt = \frac{vT_0}{t}}$

$2\pi = \omega T_0$

$\omega = \frac{v}{r} \qquad S(t) = tv$

$S = vt$

$\varphi = \omega t = \frac{v}{r}t$

$x_0 =$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

9

1) $x\geq 2$

$4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4=$

$=4x^4-5x^3-8x^2+4x+4=$

$= \cancel{4x^4}$

$4x^4-8x^2+4$

$(2x^2-2)^2-5x^3+4x=$

$=4(x^2-1)-5x^3+4x=$

$=4(x^2-1)-4x(x^2-1)-x^3=$

$=(x^2-1)(4-4x)-x^3=$

$=(x^2-1)(1-x)\cdot 4-x^3$

$4(x^2-1)(1-x)-x^3$

$4(x-1)(x+1)(1-x)-x^3\geq 0$

$4(x-1)(x+1)(1-x)\geq x^3$

$-4(x+1)(x-1)^2\geq x^3\geq 0$

<0 !

③ $4\cdot 3^4+3^2+4\cdot 3-5\cdot 9\cdot 5+4=$

$324+9+12-25\cdot 9+4=$

$=9\cdot 9+9+16-25\cdot 9<0$

2) $x\leq 2$

$4x^4+x^2+4x+5x^3+10x^2+4\geq 0$

$\cancel{4x^4+5x^3}$ $4x^4+5x^3+$

$4x$

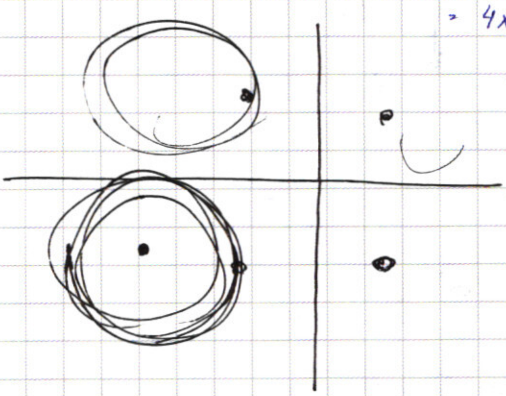
$4x^4-5x^3-4x^2-5x^2+4x+4=$

$=4x^2(x^2-1)+5x^4(x^2+1)+4(x+1)=$

$(4x^2(x-1)+4)(x+1)+5x(x^2+1)=$

$=(4x^3-4x^2+4)(x+1)$

$4(x^3-x^2+1)(x+1)+5x(x^2+1)$



$\cancel{4x^4-5x^3-4x^2-5x^2+4x+4}=$

$5x+1$

$\cancel{=x^2(4x^2-5)-x}$

$4x^4+x^2$ $\quad 4x^4+4x+4\geq 5x^3+9x^2$

$4(x^4+x+1)\geq 5x^2(x+1)+4x^2$

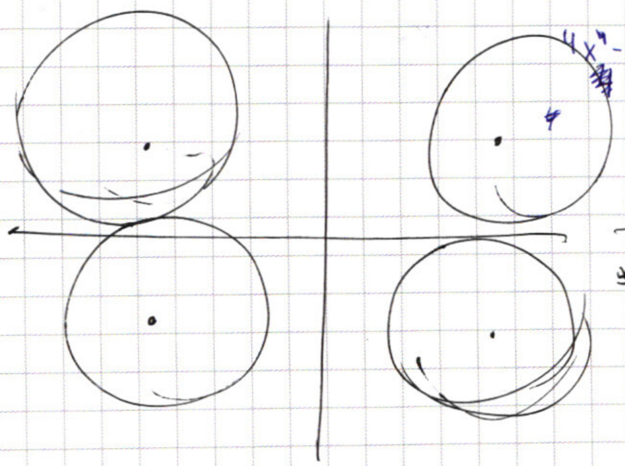
$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0$

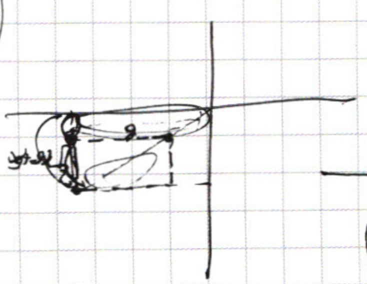
$9=5+4$? и что...

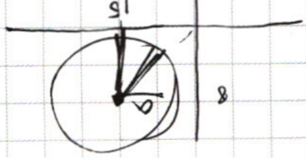
$\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{3}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{1}=\frac{5}{6}$

$\frac{8}{6}\cdot\frac{4}{3}=$







$|x|-15$

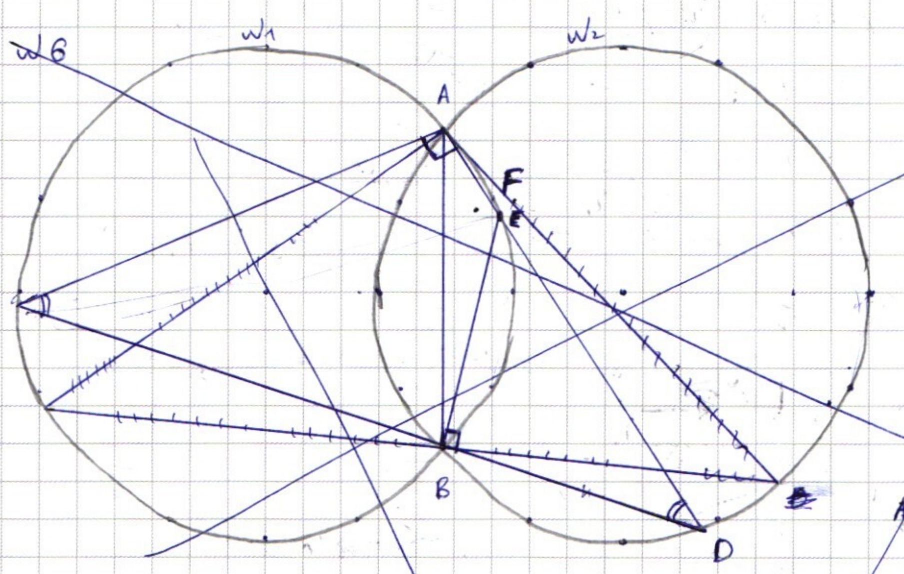
$|8+x-h|+|8+x+h|=16$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



w_1, w_2 – данные окр-сти
O_1, O_2 – их центры.
$r_1 = r_2 = 13$ – радиусы
$\triangle O_1AB = \triangle O_2AB$, т.к.
AB - общ, $r_1 = r_2$ =>
$\angle BO_1A = \angle BO_2A$ =>
$\overset{\smile}{AB}$ в w_1 = $\overset{\smile}{AB}$ в w_2. =>
=> $\angle ACB$, опир. на $\overset{\smile}{AB}$ в w_1 =
$\angle ADB$, опир. на $\overset{\smile}{AB}$ в w_2.
$\angle ACB = \angle ADB = 90°/2 = 45°$

Пусть E - точка пересеч. AD и w_1.

№4 $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

(1) $x \geq 2 \Rightarrow |x+2| = (x+2)$

$4x^4 - 5x^3 + x^2 - 10x^2 + 4x + 4 = 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 4x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 5x^2 + 4x + 4 =$

$b_1, db_1 \ldots d^{2999}b_1$

$S = b_1\left(\frac{d^{3000}-1}{d-1}\right)$

$d^2b_1 + \ldots + d^{2999}b_1 = d^2b_1\left(\frac{d^{3000}-1}{d^3-1}\right)$

$S + 39d^2b_1\left(\frac{d^{3000}-1}{d^3-1}\right) = 5S$

$39d^2b_1\left(\frac{d^{3000}-1}{d^2-1}\right) = 4b_1\left(\frac{d^{3000}-1}{d-1}\right)$

$\frac{39d^2}{d^2-1} = \frac{4}{d-1}$

$39d^3 - 39d^2 = 4d^2 - 4$

$39d^3 - 43d^2 + 4 = 0$

	39	-43	0	4
1	39	-4	-4	0

$39x^2 - 4x - 4 = 0$

$D = 16 + 16 \cdot 39 = 16 \cdot 40$

$x_1 = \frac{4 + 4\sqrt{40}}{39 \cdot 2} = \frac{2 + 2\sqrt{40}}{39}$

$x_2 < 0$ $d = \frac{2+2\sqrt{40}}{39}$

$d^{3000} - 1 =$

$d^{3n} - 1 = (d^3 - 1)(d^{3(n-1)} + d^{3(n-2)}$

$AF = \sqrt{676}$

$d = 1$:

$676 - AC^2 =$

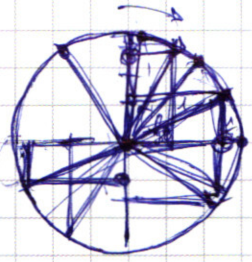
338×338: 2704, 1014, 1014, 114244

114244 − 57600 = 56644

56644 : 4 = 14161

141661 : 7

676 : 2 = 338



$\alpha = \omega t$

$x = \cos(\alpha + \varphi_0)$

$y = \sin(\alpha + \varphi_0)$

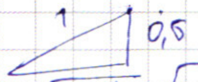
$S = vt$ ~~$= 2\pi r \cdot 2$~~

~~$v = \omega r$~~

$v T_0 = 2\pi r$

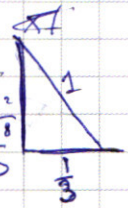
$\omega T_0 = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$

п	к
$2r$	r
v	$2{,}5v$
$\omega = \frac{v}{2r}$	$\omega_к = \frac{2{,}5v}{r} = 5\omega$
β	α



$\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varphi_0 - \alpha$



$\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$

~~$\cos(30) =$~~

$x(t) = \cos(\varphi_0 - \alpha) =$

$= \cos(\varphi_0 - \omega t)$

$\cos(240) = \frac{1}{2}$

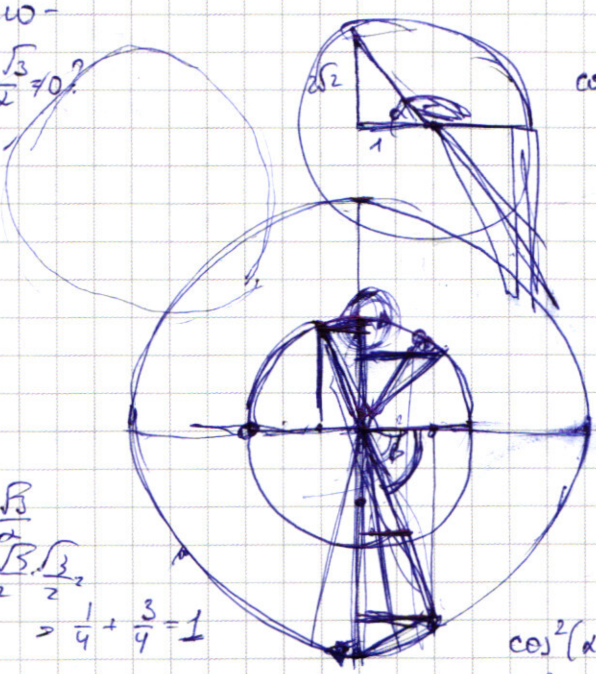
$\cos(30 + 210) =$ ~~$\cos(240)$~~

$y(t) = \cos(\varphi_0 - \omega t)$

$\cos(\alpha + \beta) = ?$

$= \cos 30 \sin 240 -$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0 ?$



$\sin t \cos \beta$

$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ ~~$\sin\alpha =$~~ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$\cos\beta = \frac{1}{3}$ $\sin\beta = -\frac{\sqrt{8}}{3}$

$x_к(t) = \cos(\alpha - 5\omega t)$

$y_к = \sin(\alpha - 5\omega t)$

$x_п = \cos(\beta - \omega t)$

$y_п = \sin(\beta - \omega t)$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$D = (\cos(\alpha - 5\omega t) - \cos(\beta - \omega t))^2 +$

$+ (\sin(\alpha - 5\omega t) - \sin(\beta - \omega t))^2 \to \min$

$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\cos^2(\alpha - 5\omega t) + \sin^2(\alpha - 5\omega t) - \ldots$

$-2\cos(\alpha - 5\omega t)\cos(\beta - \omega t) +$

$+ 2\sin(\alpha - 5\omega t)\sin(\beta - \omega t)) =$

~~$\cos\alpha + c$~~

$\cos(\alpha + \beta) =$

$\cos(30° + 60°) = (0) =$

~~$= \cos\alpha\cos\beta - \cos\sin\alpha\sin\beta ? =$~~

~~$\cos 30 \sin 60 - \sin 30 \cos 60 =$~~

$= \frac{1}{2} \ldots$ $= 0$

$D = 2(1 - \cos..\cos - \sin\cdot\sin) \to \min$

$\cos\beta\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$

~~$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta$~~ $- \sin\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha - \beta =$

$= \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta +$

$\sin 90 = 1$

$2\cos(\alpha - 5\omega t) = \cos\alpha\cos(-5\omega t) - \sin\alpha\sin(-5\omega t) +$

$4\cos(\beta - \omega t) = \cos\beta\cos(-\omega t) - \sin\beta\sin(-\omega t)$

$2\cdot\left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\cos(-5\omega t) - \frac{\sqrt{8}}{3}\sin(-5\omega t)\right)($

$\sin(90 - 60) =$

$\cos(90 - 60) = \cos(30) = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(60 - 30) = \frac{1}{2}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\beta + \sin\alpha\beta$

$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)