

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$4300 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7)$$

Т.е. есть два варианта разбить число на множители так, чтобы каждой из них было ≤ 9 (т.е. цифрой). Значит ~~ответ~~ ответ это количество перестановок обоих вариантов: $8! + 8!$. Но некоторые из чисел будут повторяться, поэтому надо разделить количество из обоих вариантов на число повторений в разбегении каждой цифры (т.е. т.к. 4 в 1-ом варианте встречается 2 раза, то мы делим $8!$ на 2, аналогично для других цифр и вариантов).

$$\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{8!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 5880$$

Ответ: 5880.

N4.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 / (x+2) + 4 \geq 0$$

$$1) x \geq -2, 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 4x^3 - 9x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

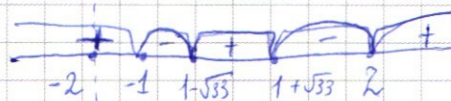
$$(x+1)(4x^3 - 8x^2 - x^2 + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(4x^2(x-2) - (x+2)(x+2)) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\right)$$



$$x \in [-2, -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2, +\infty)$$

$$2) x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2(4x^2 + 5x + 4) + (4x^2 + 4x + 4) \geq 0$$

$$x^2 \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} D_1 = 25 - 64 < 0 \\ \Rightarrow 4x^2 + 5x + 4 > 0 \\ (1) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} D_2 = 16 - 16 \cdot 4 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x^2 + 4x + 4 > 0 \\ (3) \end{array} \right.$$

Из п. 6 (1), (2) и (3) $\Rightarrow x^2(4x^2 + 5x + 4) + (4x^2 + 4x + 4) \geq 0$ при любых $x \Rightarrow x \in (-\infty; -2)$.

$$\text{Итого: } \begin{cases} x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)}_{\text{Ответ.}}$$

N3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \quad | \cdot \sqrt{8}$$

$$(x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = 8(x+10)(x-4), \quad x \neq -10, \text{ т.к. левая часть будет } < 0$$

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 8(x-4), \text{ возведем в квадрат, } x \geq 4$$

(остаточное значение проверим на ОДЗ подстановкой, когда найдем их)

$$x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 72 = 0$$

$$x^2(x-6) - 2(x-6)(x+6) = 0$$

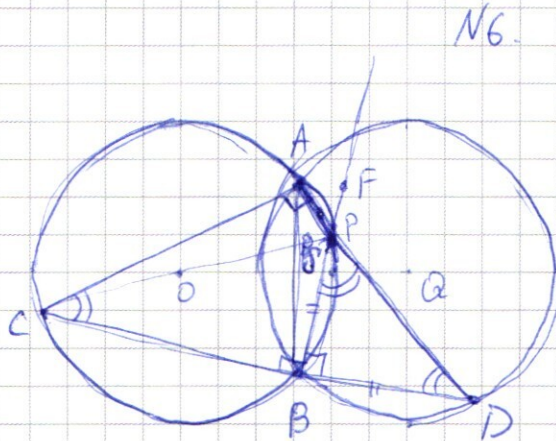
$$(x-6)(x^2 - 2x - 6) = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \\ x \geq 4 \\ x^3 - 64x + 200 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

Ответ: $x = 6$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



a) Пусть ~~AB = 2R~~ Пусть $AD \cap BF = P$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ADB \quad \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$\angle ACB + \angle ADB + \angle CAD = 180^\circ$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$\text{В } \triangle BPD: \angle BPD = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle BPD - \text{равнобедренный} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BP = PD \Rightarrow \text{ор } \text{от } F$$

$$\angle CBP = 90^\circ \Rightarrow CF = D = 2R = 26$$

Ответ: а) $CF = 26$.

N 2.

$$S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}; \text{ Пусть сумма членов с нечетными номерами: } 3 = P$$

$$P = b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = b_1 q^2 + b_1 q^5 + \dots + b_1 q^{2999}$$

Подставим в формулу при $b_1' = b_1 q^2$; $q' = q^3$; $n' = 1000$:

$$P = \frac{b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

Аналогично для суммы членов с четными номерами:

$$b_1'' = b_1 q; q'' = q^2; n'' = 1500; N = \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

По улу: ~~8220~~ $(S - P) + 40P = 5S$

$$39P = 4S$$

$$\frac{39 b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{4 b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \neq 0 \\ q \neq 1 \\ q \neq 0 \\ q \neq -1 \end{array} \right.$

$$39q^2(q-1) = (q^3-1) \cdot 4$$

~~$$39q^2(q-1) = (q^3-1) \cdot 4$$~~

~~$$39q^2 = 4(q^2 + q + 1)$$~~

~~$$39q^2 = 4q^2 + 4q + 4$$~~

~~$$35q^2 - 4q + 4 = 0$$~~

~~$$q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{35} = \frac{2 \pm 12}{35}$$~~

т.к. все члены $> 0 \Rightarrow q > 0 \Rightarrow$

~~$$\Rightarrow q = \frac{2+12}{35} = \frac{14}{35}$$~~

~~$$39q^2(q-1) = 4(q^3-1)$$~~

~~$$39q(q^2-1) = 4(q^3-1)$$~~

~~$$39q(q+1) = 4(q^2+q+1)$$~~

~~$$39q^2 + 39q = 4q^2 + 4q + 4$$~~

~~$$35q^2 + 35q - 4 = 0$$~~

~~$$q_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 + 4 \cdot 4 \cdot 35}}{40} = \frac{-35 \pm \sqrt{35 \cdot 51}}{40}$$~~

т.к. все члены > 0 , то

~~$$q = \frac{\sqrt{35 \cdot 51} - 35}{40}$$~~

Если S увеличится в m раз, то: $(S - N) + 3N = mS$

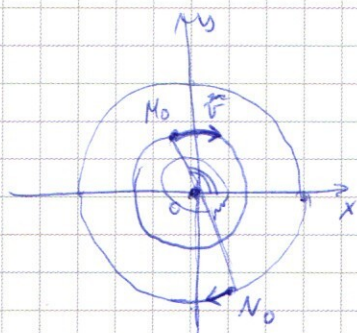
$$m = 1 + 2 \frac{N}{S} =$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{\frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}}{\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}} = 1 + 2 \frac{q(q-1)}{q^2 - 1} = 1 + 2 \frac{q}{q+1} =$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{\frac{14}{35}}{\frac{14}{35} + 1} = 1 + 2 \cdot \frac{14}{49} = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N5.

Из уравнений следует: $(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2 = R_k^2$

$R_k = 3$

Аналогично $R_n = 6$

уравнения для к-ой:
$$\begin{cases} y_k = 3 \sin(-2,5t + \arccos(-\frac{1}{3})) \\ x_k = 3 \cos(-2,5t + \arccos(-\frac{1}{3})) \end{cases}$$

уравнения для n-ой:
$$\begin{cases} y_n = 6 \sin(t - \arccos(-\frac{1}{3})) \\ x_n = 6 \cos(t - \arccos(-\frac{1}{3})) \end{cases}$$

Р-ие в момент времени t : $\sqrt{(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2}$ (1)*

Получаем минимальное расстояние это $|R_n - R_k| = 3$

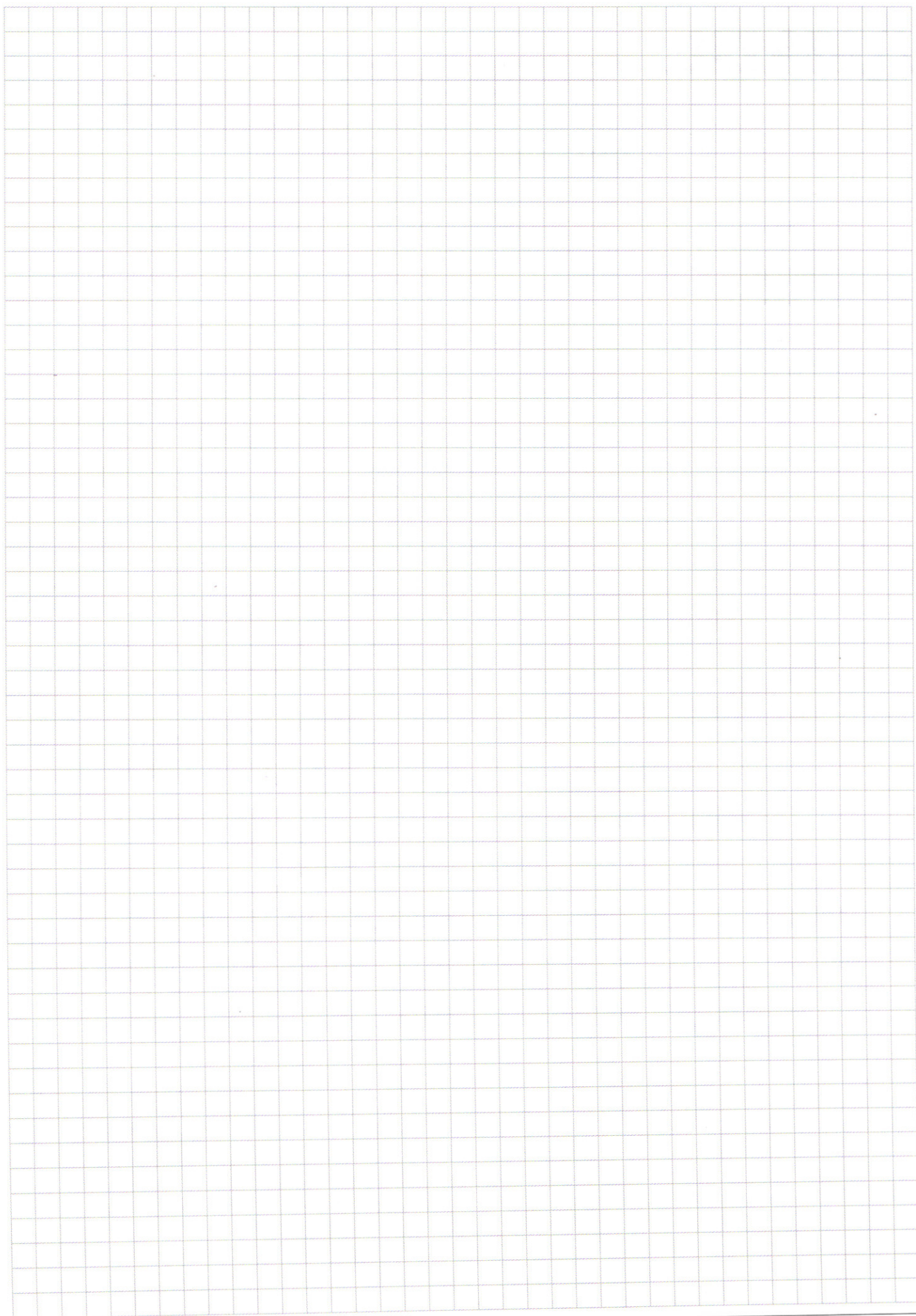
Ответом будут $y_n(t_n)$ и $x_n(t_n)$, где t_n - время, когда
когда $\frac{d}{dt} \sqrt{(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2} = 0$

N4.

первое уравнение - квадрат с центром в $(0; -8)$

второе уравнение при $a < 0$ - ничего, $a = 0$, точка $(15, 8)$ и

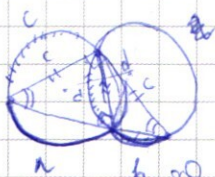
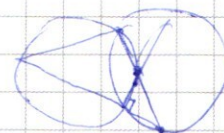
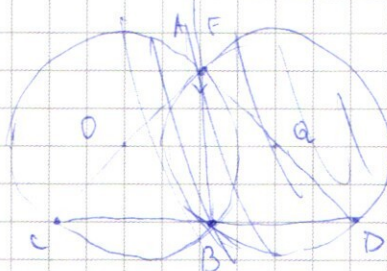
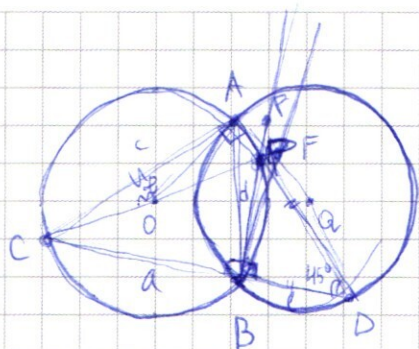
$a > 0$ - несколько склеенных дуг окружностей.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$CF = 26$$

$$a + c + d = 360^\circ$$

$$d + b = c$$

$$a + b + 2d = 360^\circ$$

$$2a + 2b = 360^\circ = a + b + 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$a + b = 2d$$

$$(a+b)^2 = 2c^2$$

$$a+b = \sqrt{2}c$$

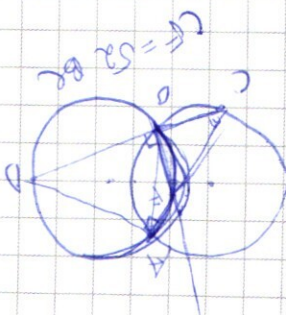
$$d^2 = c^2 + a^2 - 2ac = c^2 + b^2 - 2abc$$

$$a^2 - b^2 = -\sqrt{2}bc + \sqrt{2}ac$$

$$(a-b)\sqrt{2}c = \sqrt{2}c(a+b)$$

$$a^2 = 2b^2 - \sqrt{2}bc + \sqrt{2}ac$$

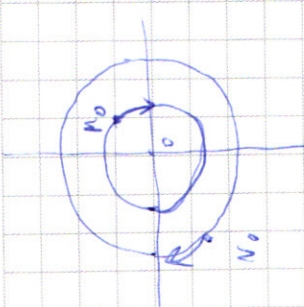
$$\sqrt{2}b^2 = \sqrt{2}c$$



с. 10

$$\begin{aligned}
 & \text{2993} \quad p = b_1 q^2 + b_2 q^3 + \dots + b_8 q^8 \\
 & \text{2994} \quad p = b_1 q^2 (1 + q + q^2 + \dots + q^6) \\
 & \text{2995} \quad p - p = b_1 q^2 (1 + q + q^2 + \dots + q^6) - p \\
 & \text{2996} \quad 0 = b_1 q^2 (1 + q + q^2 + \dots + q^6) - p
 \end{aligned}$$

$R = 3$
 $M_0 \hat{e}(-1; i\sqrt{2}) \times \frac{25}{35} R$
 $N_0 + 2i4\sqrt{2} \prod_{i=1}^R v$



$1 + 4\sqrt{2} = R$
 $35(35+16) = 35 \cdot 51$
 $35 \sin 2.5t$
 $35 \cos 2.5t$
 $6 \sin t$
 $6 \cos t$

$35 \sin 2.5t - 6 \sin t + (3 \cos 2.5t - 6 \cos t)^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $4900 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

$x^2 - 2x + 6 = 8$

$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 10 \rightarrow x^2$

$D = 33$

$D = \sqrt{33}$

$\sqrt{121 - 64} = \sqrt{57}$

$5 \cdot 6 \cdot 7 (12 + 16) = 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 28 = 30 \cdot 196 = 5880$

$16x^3 + 15x^2 + 22x + 4 = 0$

$x < -2$

$4x^3 - 9x^2 + 4 = 0$

$4 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 4 = 0$

$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$8 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 96$

$3 \cdot 8 + 44 - 8 + 4 \geq 0$

$2 \cdot 8 + 48 \geq 0$

$4x^4 + 11x^2 + 4 \geq 5x^3 + 4x$

$4x^4 + 11x^2 + 4 \geq 5x^3 + 4x$

$\sqrt{5x(x^2 + (\frac{2}{\sqrt{5}})^2)}$

$\frac{-11 \pm \sqrt{57}}{8}$

$4x^3 - 64x + 200 \geq 0$

$x(x^2 - 64) + 200 \geq 0$

$x(x-8)(x+8) + 200 \geq 0$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$4x^4 + 4x^3 - 8x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$4x^3(x+1) - 4x^2(x+1) + 4(x+1) \geq 0$

$(x+1)(4x^3 - 4x^2 + 4) \geq 0$

$(x+1)(4x^3 - 8x^2 - x^2 + 4) \geq 0$

$(x+1)(4x^2(x-2) - (x-2)(x+2)) \geq 0$

$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$121 - 100 = 21$$

21

$$x^2(4x^2 + 5x + 4) + (11 - a)x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$D_1 = 25 - 16a \leq 0 \quad D_2 = 16 - 16(11 - a) \leq 0$$

$$25 - 16a \leq 0$$

$$1 - 11 + a \leq 0$$

$$25 \leq 16a$$

$$a \leq 10$$

$$a \geq \frac{25}{16}$$

4

$$\frac{x^2(4x^2 + 5x + 4)}{>0} + \frac{4x^2 + 4x + 4}{>0} \geq 0$$

$$D_1 = 25 - 16 \cdot 4 < 0$$

$$D_2 = 16 - 16 \cdot 4 < 0$$

112

56

$$224 = 56 \cdot 4 = 8 \cdot 4 \cdot 4$$

$$-1000 + 600 + 200$$

$$600 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

-6

-40

-10

4

$$(x+10)\sqrt{x^3-64x+200} = 202(x+10)(x-4), \quad x \neq -10 \quad 100 \div 2 = 50$$

$$x^3 - 64x + 200 = x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 + 10x + 100)$$

$$= 8(x^2 - 8x + 16) \quad x^3 - 64x + 200 = 8x^2 + 160x + 800$$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \quad x^3 - 8x^2 - 224x - 600 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 - 224x - 600 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 42 = 0 \quad x^3 - 8x^2 - 8(28x + 125) = 0$$

$$x^3 - 8x^2 = 0 \quad x^2(x - 8) - 8(28x + 125) = 0$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^3 - x^2 + 9 = 0 \quad -16 \cdot 12 = -192$$

$$216 + 200 =$$

$$24 - 36 + 9 = 0$$

$$x = 6 \quad x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 42 = 0$$