

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 \quad \text{№ 3}$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4) \quad \text{~~№ 3~~}$$

$$1) 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2} = \sqrt{x^3 - 64x + 200} \quad 2) x+10=0$$

$$OD3: 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2} \geq 0$$

$$x = -10 \notin OD3$$

$$x \geq 4$$

Возведем обе части ур-ния в квадрат:

$$8x^2 - 64x + 128 = x^3 - 64x + 200$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

Методом подбора найдем, что при $x=6$ уравнение обращается в верное равенство $0=0$, поэтому, ~~разложив~~ разложив левую часть на множители, получим:

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0$$

$$x=6 \in OD3, \quad x=1-\sqrt{13} \notin OD3, \quad x=1+\sqrt{13} \in OD3.$$

$$\text{Ответ: } 6; 1+\sqrt{13}.$$

№ 7.

Рассмотрим графики уравнений, входящих в систему

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16, \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = \alpha; \end{cases}$$

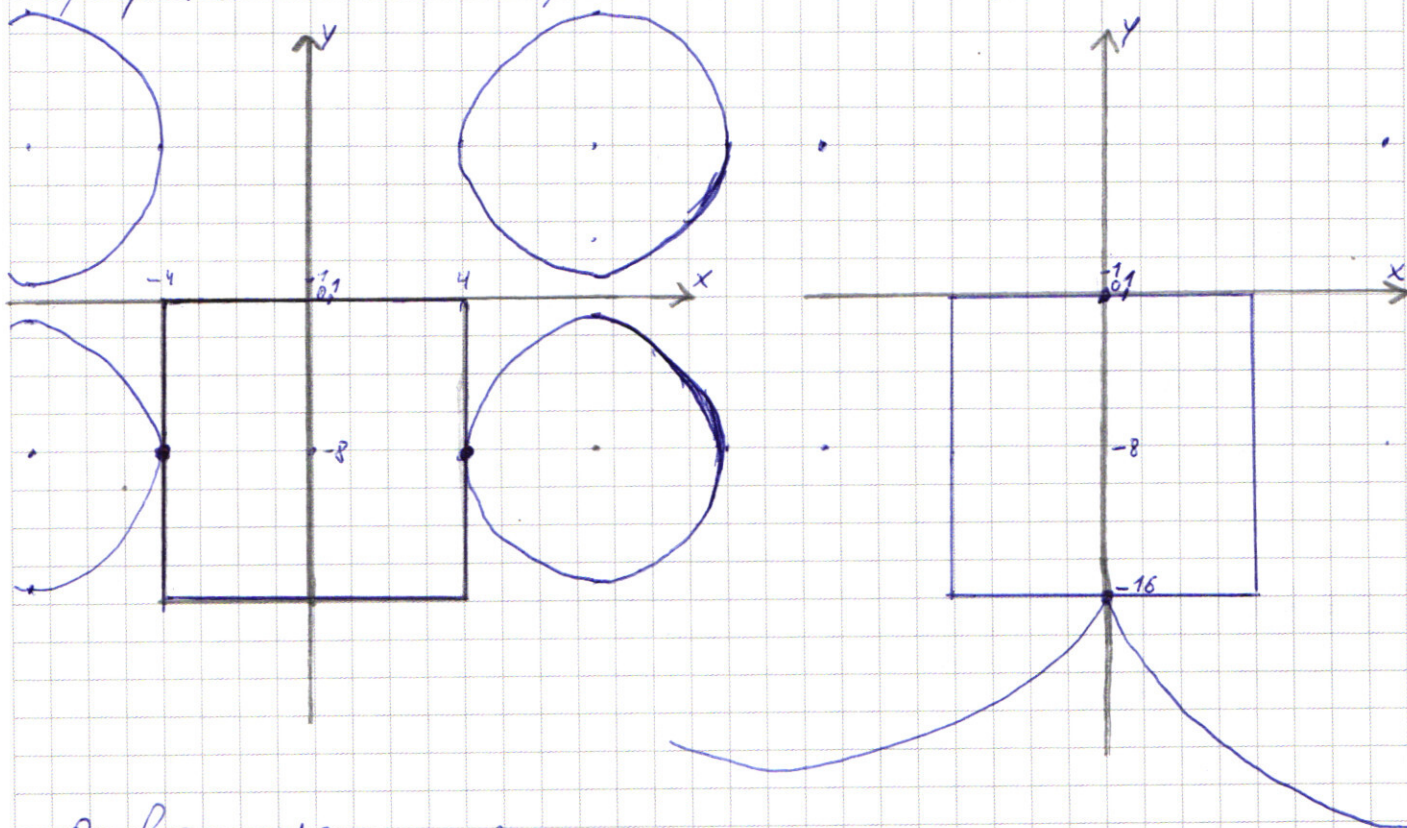
1) Первому уравнению удовлетворяет квадрат

с вершинами в $(-8; 0), (8; 0), (-8; -16)$ и $(8; -16)$.

2) Второму — симметричное отображение во все 4 четверти плоскости части круга с вершиной в $(15; 8)$ и радиусом $\sqrt{a}$, расположенной в I четверти.

Количество решений системы	значение a
0	$(-\infty; 49)$
2	49
4	$[49; 289)$
2	289
0	$(289; +\infty)$

Графики ~~уравнений~~ ^{уравнений} при $a=49$ и $a=289$:



Ответ: 49; 289.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 |x+2| + 4 \geq 0 \quad \text{раскроем модуль:}$$

$$\begin{cases} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0, & x < -2, \\ 4x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 \geq 0, & x \geq -2; \end{cases}$$

1) при $x < -2$ первое ~~неравенство~~ ^{неравенство} всегда верно;
доказательство:

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 = 4|x|^4 - 5|x|^3 + 11|x|^2 - 4|x| + 4, \text{ т.к. } x < -2,$$

теперь рассмотрим: а) $4|x|^4 - 5|x|^3$; выражение > 0 при $|x| > \frac{5}{4}$, $\Rightarrow > 0$ при $x < -2$

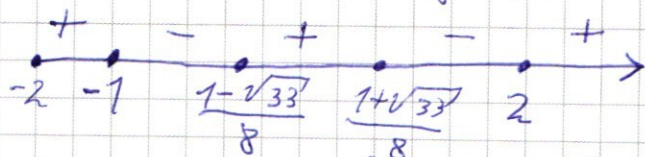
б) $11|x|^2 - 4|x|$; выражение > 0 при $|x| > \frac{4}{11}$, $\Rightarrow > 0$ при $x < -2$.

выражение а) > 0 , выражение б) > 0 , $4 > 0$, $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ их сумма > 0 .

2) Методом подбора найдём корни -1 и 2 у
~~второго уравнения. Разложим левую часть~~
уравнения $4x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$.

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) = 0$$



второе неравенство верно при $x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.

- 1) Радиус траектории караса равен 3, радиус оной у пескаря равен 6.

Пусть скорость пескаря равна $1x$. Тогда скорость караса — $2,5x$.

Глобальная скорость пескаря равна $\frac{1x}{6}$, а караса — $\frac{5x}{6}$.

Кратчайшее расстояние между рыбами будет при совпадении их угловых координат.

- 2) Заметим, что $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$ и $\alpha = \beta$ (α — угол караса, β — угол пескаря), поэтому α и β диаметрально противоположны, угол между ними равен π .

- 3) Первое совпадение угловых координат:

$$\frac{5}{6}x = \pi + \frac{1}{6}x$$

$$x = \frac{6\pi}{4} = 1,5\pi \text{ (относительно начального положения караса)}$$

Координаты пескаря Φ при угле $1,5\pi - \alpha$ будут $(-4\sqrt{2}; -2)$.

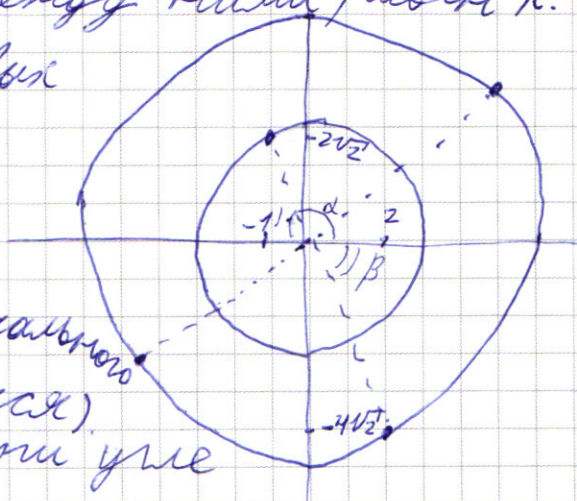
- 4) Второй раз совпадение будет, когда ~~пес~~ карась обгонит пескаря на круг:

$$\frac{5}{6}x = 2\pi + \frac{1}{6}x$$

$$x = 3\pi \text{ (отн. первого совпадения)}$$

Координаты пескаря при угле $1,5\pi - \alpha + 3\pi$ будут $(4\sqrt{2}; 2)$.

- 5) Каждое следующее совпадение будет через $3\pi k$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

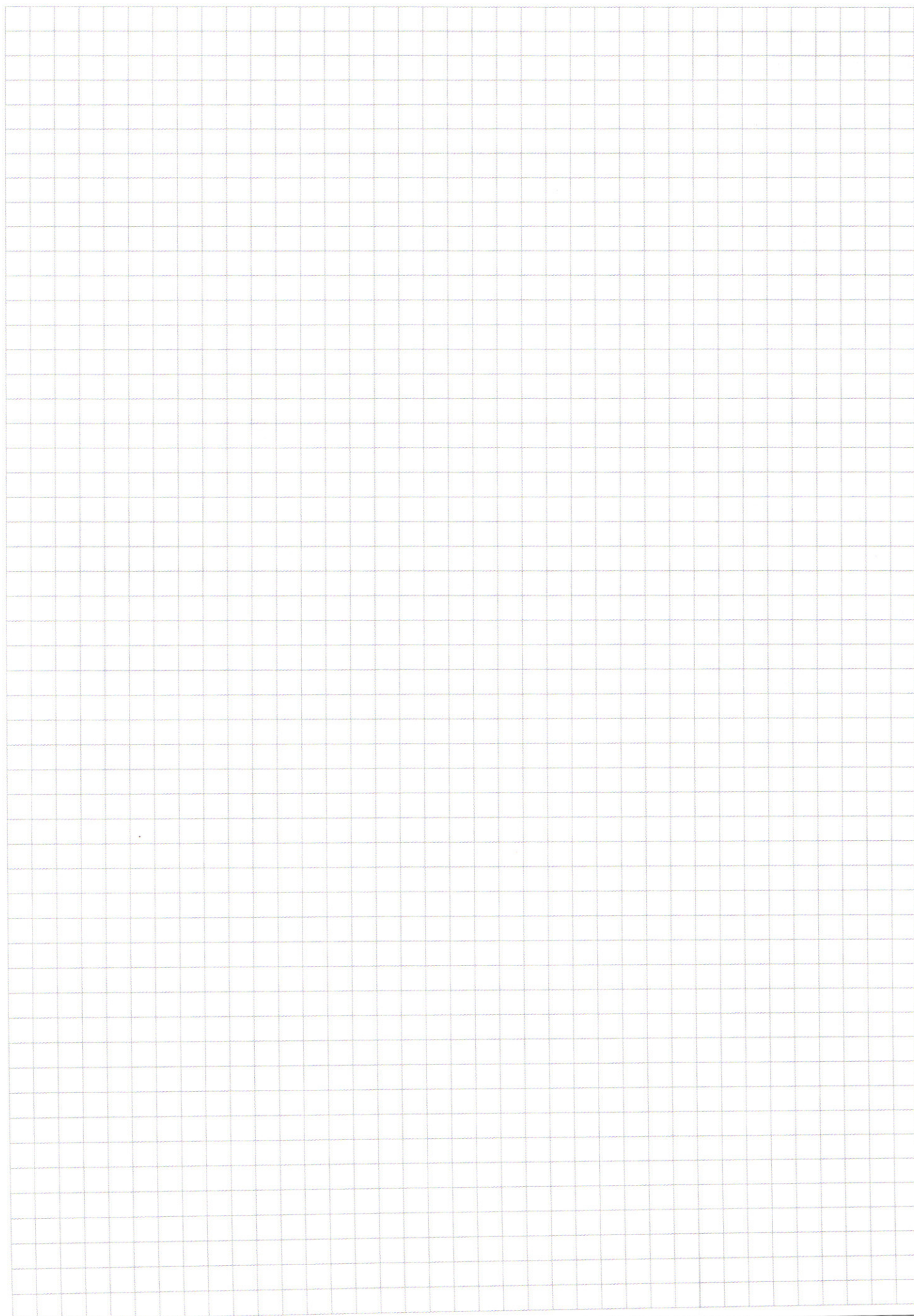
($k \in \mathbb{N}$), значит, Φ пересечь будет в одной из этих двух координат.

Ответ: $(-4\sqrt{2}; -2); (4\sqrt{2}; 2)$.

№1

$4800 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, поэтому указанное восьмизначное число будет содержать или цифры 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7, или цифры 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7 (в любом порядке).

Первых наборов цифр возможно 2304
(посчитано при помощи дерева комбинаций).



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

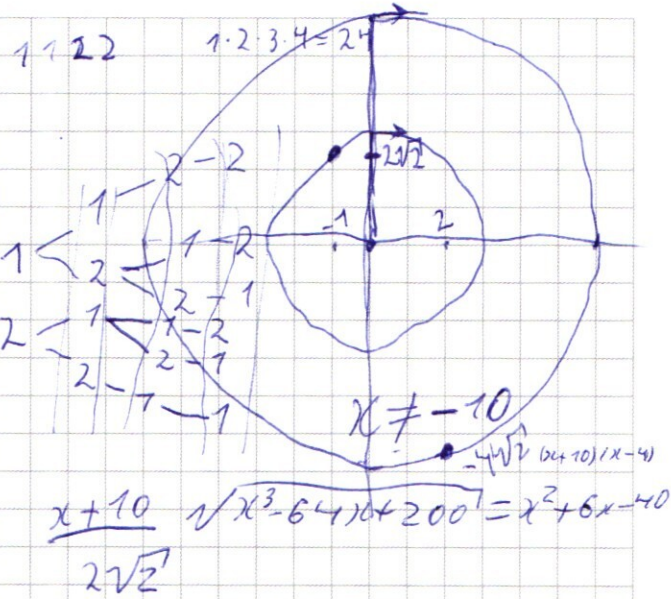
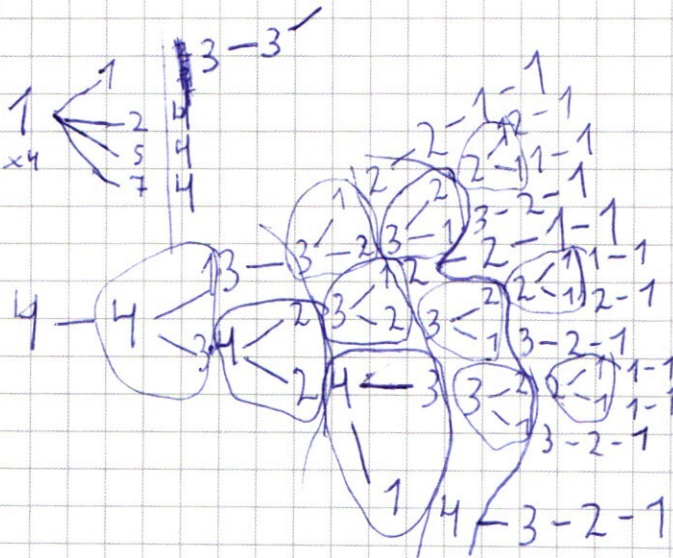
Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

1) нет 0 2) 4 3) остальные - 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad 8!$$



$$2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2} = \sqrt{x^3 - 64x + 200}$$

$$8x^2 - 64x + 128 = x^3 - 64x + 200$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52 = 13 \cdot 4$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{2} = 1 - \sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{2} = 1 + \sqrt{13}$$

$$4 \cdot 13 \cdot 7$$

$$39 \cdot (x^3 + x^4 + \dots + x^{3000}) = 45$$

$$x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^{3000} = 5$$

$$2(x^3 + x^4 + \dots + x^{3000}) = ?$$

1	2	2	11	48	14	10
1	3	2	2	96	22	13
2	1	3	2	48	26	23
1	2	2	2	96	32	27
3	2	2	2	96	38	36
2	3	2	2	96	40	45
1	4	3	2	792	48	54
2	3	2	2	288	52	62
1	4	3	2	792	56	66
2	3	2	2	792	58	70
1	4	3	2	792	64	73
2	3	2	2	792	69	78
1	4	3	2	792	70	80
2	3	2	2	792	73	80
1	4	3	2	792	78	80
2	3	2	2	792	80	80

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4 \cdot 16 - 58 + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0, x < -2$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0, x > -2$$

$$(x+1)(x-2)(1+\sqrt{33})(1-\sqrt{33})$$

$$76x^3$$

$$-4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \quad | \quad x+1$$

$$4x^2 - x - 2 \quad D = 1 + 32 = 33 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$y = -x - 8$$

$$y = x - 8$$

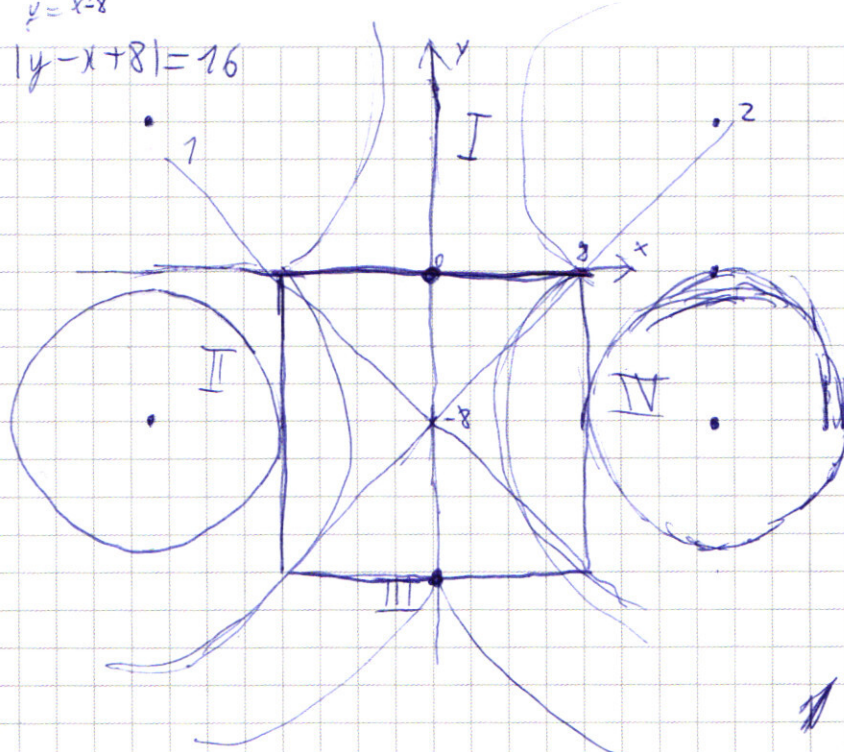
$$|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$$

$$I \quad y = 0$$

$$II \quad y = -16$$

$$III \quad x = 8$$

$$IV$$



$$49 + 64 = 113$$

$$225 + 64 = 289 = 17^2$$



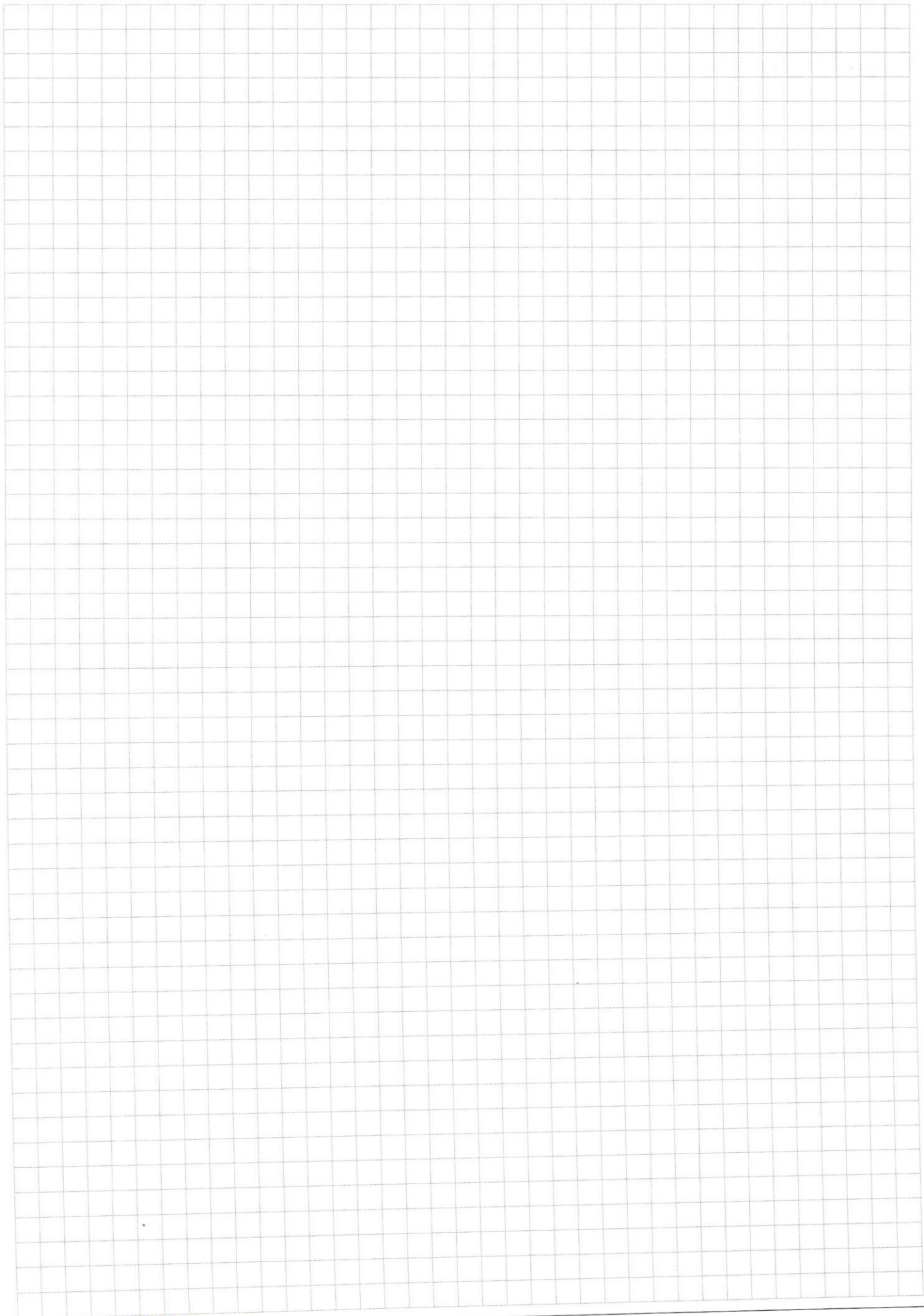
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)