МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC=6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y-6-x|+|y-6+x|=12,\\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $\overline{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$

$a_7 \cdot a_6 \cdot a_5 \cdot a_4 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 = 700$

разложим число 700 на произведение восьми чисел от 1 до 9 :

1) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 700$

2) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 700$

больше вариантов разложения быть не может, т.к. $2 \cdot 5 = 10 > 9$

$5 \cdot 5 = 25 > 9$ $2 \cdot 7 = 14 > 9$

$5 \cdot 7 = 35 > 9$

Найдем количество 8-ми знач. чисел, которые можно составить, используя цифры, указанные в 2-х случаях.

1) $\dfrac{8!}{3!\,2!\,2!} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 1680$

2) $\dfrac{8!}{4!\,2!} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$

Тогда количество 8-ми значных чисел, произведение цифр которых $= 700$, равно $1680 + 840 = 2520$.

Ответ: 2520.

4 $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$

а) 2 б) x

б) $x \geqslant 2$

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geqslant 0$

$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$

если $2x^4 - 3x^3 > 0$ и $7x^2 - 4x > 0 \Rightarrow$

$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 > 0$

$2x^4 + 3x^3 > 0$

$x^3(2x-3) > 0$

$\begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$

$7x^2 - 4x > 0$

$x(7x-4) > 0$

$\begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{4}{7} \end{cases}$

следовательно, при $x > \frac{3}{2}$ $\quad 2x^4 - 3x^2 + 7x^2 - 4x + 4 > 0$

но мы рассматриваем промежуток $x \in [2; +\infty)$ $\Rightarrow$

$$2x^4 - 3x^2 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0 \quad \text{при} \quad x \geq 2$$

а) $x < 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

несложно подобрать корень $x = 1$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 & x - 1 \\ -\underline{2x^4 - 2x^3} & \overline{2x^3 + 5x^2 - 4} \\ \qquad 5x^3 - 5x^2 & \\ \quad -\underline{5x^3 - 5x^2} & \\ \qquad\quad 0 \quad -4x + 4 & \\ \qquad\qquad -\underline{-4x + 4} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$$

$$x = -2$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 5x^2 - 4 & x + 2 \\ -\underline{2x^3 + 4x^2} & \overline{2x^2 + x - 2} \\ \qquad x^2 & \\ \quad -\underline{x^2 + 2x} & \\ \qquad -2x - 4 & \\ \quad -\underline{-2x - 4} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ (x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0 \end{cases}$$

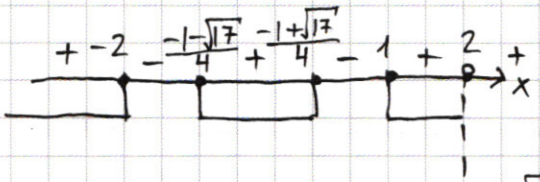
нули: $x = 1 \quad x = -2 \quad x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \quad x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

$2x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ $\quad \cancel{x_2 = }$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$



$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$

$$\left[\begin{array}{l} а) \\ б) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2) \\ x \in [2; +\infty) \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.

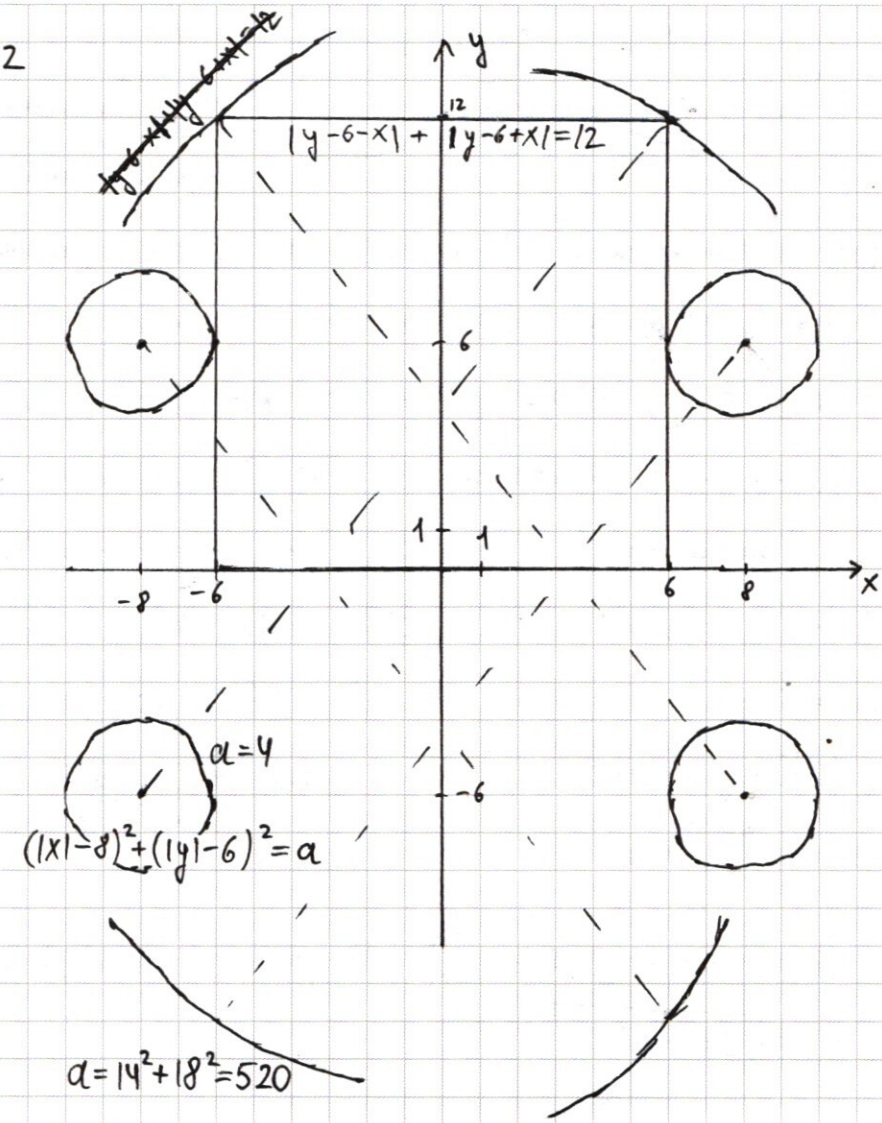
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 $\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2 = a \end{cases}$

$|y-6-x|+|y-6+x| = 12$

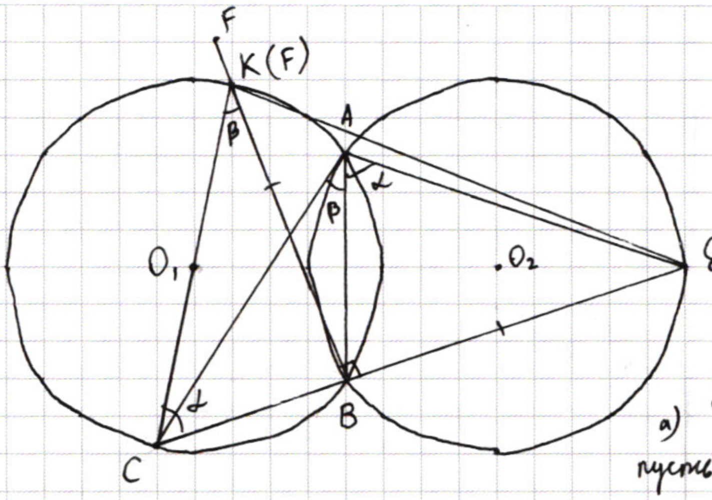
$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geqslant x+6 \\ y \geqslant -x+6 \\ y = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} y \geqslant x+6 \\ y < -x+6 \\ x = -6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x+6 \\ y \geqslant -x+6 \\ x = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x+6 \\ y < -x+6 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$



Ответ: $a=4$; $a=520$.

6



Дано: $r=5$ $\angle CAD=90°$

$FB \perp CD$ $BF=BD$.

Найти: а) CF

б) S_{ACF} $BC=6$

Решение:

а) пусть $\angle BAD=\alpha$; $\angle CAB=\beta \Rightarrow \alpha+\beta=90°$

$BF \cap$ 1-ю окруж = т. K ; $\angle CBK=90° \Rightarrow CK$ – диаметр

$\angle CAB=\angle CKB=\beta$ $\angle CBK=90° \Rightarrow \angle KCB=\alpha$

$r_1=r_2=5$; $\angle KCB=\angle BAD=\alpha \Rightarrow KB=BD$, но по условию $FB=BD \Rightarrow$

~~т. K и т.~~ т. F совпадает с т. K и лежит на 1-й окружности $\Rightarrow$

CF – диаметр ($\angle CBK=90°$) $\Rightarrow CF=2r=10$.

б) т. A $\in DK$ т.к. $\angle CAD=\angle CAK=90°$ ($\angle CAK=90°$ т.к. $CK=d$)

$BC=6$; $CK=10 \Rightarrow KB=8=BD \Rightarrow CD=14$

$DK=\sqrt{KB^2+BD^2}=8\sqrt{2}$ $\frac{DK}{\sin\alpha}=\frac{DC}{\sin\angle CKD} \Rightarrow \sin\angle CKD=\frac{\sin\alpha\, DC}{DK}=$

$\sin\alpha=\frac{BK}{CK}=0{,}8$ $=0{,}7\sqrt{2}$

$\sin\angle CKD=\sin\angle CKA=\frac{AC}{CK} \Rightarrow AC=CK\sin\angle CKA=7\sqrt{2} \Rightarrow$

$AK=\sqrt{CK^2-AC^2}=\sqrt{2}$

$S_{ACF}=S_{ACK}=\frac{1}{2}AK\cdot AC=7$

Ответ: $CF=10$; $S_{ACF}=7$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 1 1 2 2 5 5 7
1 1 1 1 4 5 5 7

1 $\overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ $a_7 \cdot a_6 \cdot a_5 \cdot a_4 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 = 700$

$700 = 10 \cdot 10 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow$ кол-во $= \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2^3 \cdot 3} =$

$= 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 240 \cdot 7 = 1680$ + ещё

$\frac{8!}{4!\,2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}$

$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$
$= 120 \cdot 7 = 840$

$240 \times 7 = 1680$

$1680 + 840 = 2520$

2 $b_1 \ldots b_{3000}$ $\sum_{k=b_1}^{b_{3000}} k = S$ $S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q}$

$S > 0 \Rightarrow$

$b_3 = b_1 \cdot q^2$ $b_6 = b_1 \cdot q^5$ $b_6 = b_3 q^3$

$S_1 = \frac{b_3(1-(q^3)^n)}{1-(q^3)^n} = \frac{b_3(1-q^{3000})}{1-q^3}$

S_2

S_3

Разложим число 700 на произведение 8 цифр

7 $\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$

1) $y-6-x\geqslant 0$ $y-6+x\geqslant 0$

$y\geqslant x+6$ $y\geqslant -x+6$

$2y-12=12$

$y=12$

2) $y-6-x\geqslant 0$ $y-6+x<0$

$y\geqslant x+6$ $y<-x+6$

$y-6-x-y+6-x=12$

$x=-6$

3) $y-6-x<0$ $y-6+x\geqslant 0$

$y<x+6$ $y\geqslant -x+6$

$-y+6+x+y-6+x=12$

$x=6$

4) $y-6-x<0$ $y-6+x<0$

$y<x+6$ $y<-x+6$

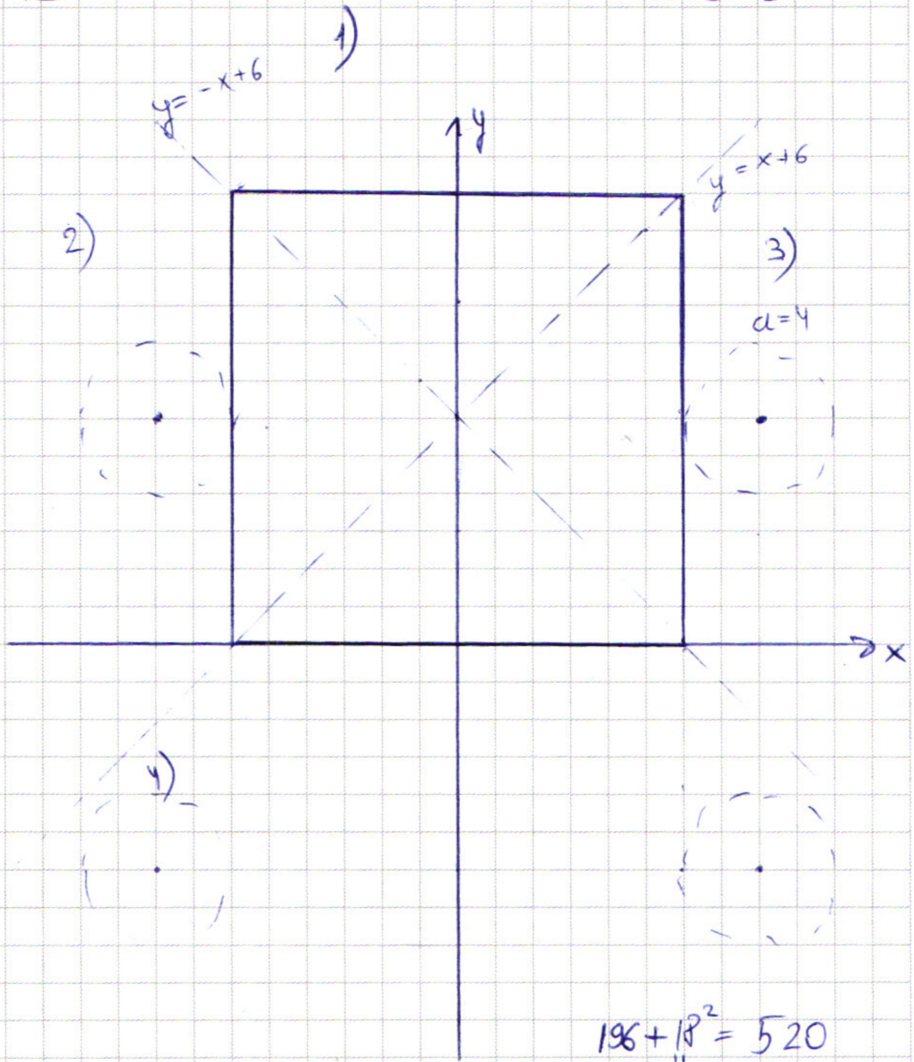
$-y+6+x-y+6-x=12$

$y=0$

$a=4$

~~$256+36=292$~~

$196+36=232$



$196+18^2=520$

324

18
18
144
18
324
$+196$
520

$a=4$ $a=520$

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geqslant 0$

$D=9-8=1$

$x=\frac{1}{2}$ $x=1$

$-\frac{3}{2}$

$-\frac{27}{4}+\frac{45}{4}-4=\frac{18}{4}-4$

$x\geqslant 2$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geqslant 0$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geqslant 0$

$2x^4-3x^3+x^2+6x^2-4x+4\geqslant 0$

0 1 2 3

4 6 32

$2x^4-3x^3$ $7x^2-4x$

$x=2$ 8 14

$x=3$ 81 59

$x=4$

$x^3(2x-3)$ $7x^2-4x$

$2x-3>0$ $x(7x-4)$

$x>\frac{3}{2}$ $7x-4>0$

$x>\frac{4}{7}$

на ~~по~~ отрезке $2..+\infty$

x – любое

$x<2$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geqslant 0$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geqslant 0$

$-\frac{5}{4}$

$-\frac{125}{32}+\frac{125}{16}$

$\frac{1}{32}+\frac{5}{16}=\frac{11}{32}$

$\frac{27}{32}+\frac{45}{16}=\frac{117}{32}$

$2x^4+3x^3-5x^2 \mid x-1$

$2x^4-2x^3$ → $2x^3+5x^2$

$5x^3-5x^2$

$5x^3-5x^2$

0

$(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geqslant 0$

$2x^3+5x^2-4 \mid x+2$

$2x^3+4x^2$ → $2x^2+x-2$

x^2-4

x^2+2x

$-2x-4$

$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geqslant 0$

$x=1$ $x=-2$ $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $D=1+16=17$

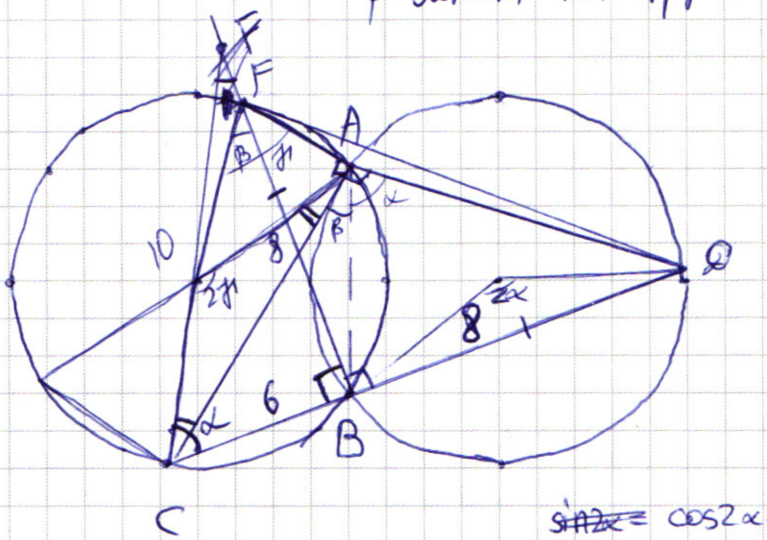
-2 1 $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

$+$ -2 $-$ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ $+$ $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $-$ 1 $+$

2

III

F лежит на окруж



CF-? Т.A ∈ ÐF

$FÐ = 8\sqrt{2}$

$CF = 2R = 10$

$BÐ = 8$

$\sin\alpha = 0{,}8$

$\frac{BÐ}{\sin\alpha} = 10$ $\sin\alpha = \frac{BÐ}{10} = \frac{x}{10}$

$\sin\beta = 0{,}6$

$\cancel{\sin 2\alpha} = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \cancel{1-\frac{x}{5}}\, 1 - \frac{x^2}{50}$

$\sin\beta = \frac{CB}{10}$ $CB = y$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = 1$

$\frac{x}{10}\frac{\sqrt{100-y^2}}{10} + \frac{\sqrt{100-x^2}}{10}\frac{y}{10} = 1$

$\cancel{x^2 = 50 - 50\left(1-\frac{x^2}{50}\right)}$

$x\sqrt{100-y^2} + \sqrt{100-x^2}\,y = 100$

$\frac{CÐ}{\sin CFÐ} = \frac{FÐ}{\sin\alpha}$ $\sin CFÐ = \frac{CÐ\sin\alpha}{FÐ} = \frac{14\cdot 0{,}8}{8\sqrt{2}}$

$\frac{1{,}4}{\sqrt{2}} = 0{,}7\sqrt{2}$

$x+y = 10\sin\alpha + 10\sin\beta = 10(\sin\alpha + \sin\beta) = 10\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 20\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{2}}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$= \frac{20}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 10(\cos\beta + \sin\beta)$

$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right) = \cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ $\cos(45-\beta) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta =$

$x^2 = 50 - 50\cos 2\alpha$

$\cancel{\cos\beta + \sin\alpha}$ $x^2 = 50 - y^2 + 50$

$x^2 + y^2 = 100$

$\alpha + \beta = 90°$ $\sin\alpha = \cos\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \cancel{\cos}\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cos^2\beta = 1 - 2(1 - \sin^2\beta) =$

$= 1 - 2 + 2\sin^2\beta =$

$2\sin^2\beta - 1 =$

$= \frac{y^2}{50} - 1$

$\cancel{100 - y^2 = 100 - (100 - x^2) = x^2}$

$\times 49$
$\ 2$
98

$BC = 6 \Rightarrow FB = 8$

$\sqrt{100 - 98} = \sqrt{2}$

ACF

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА