

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

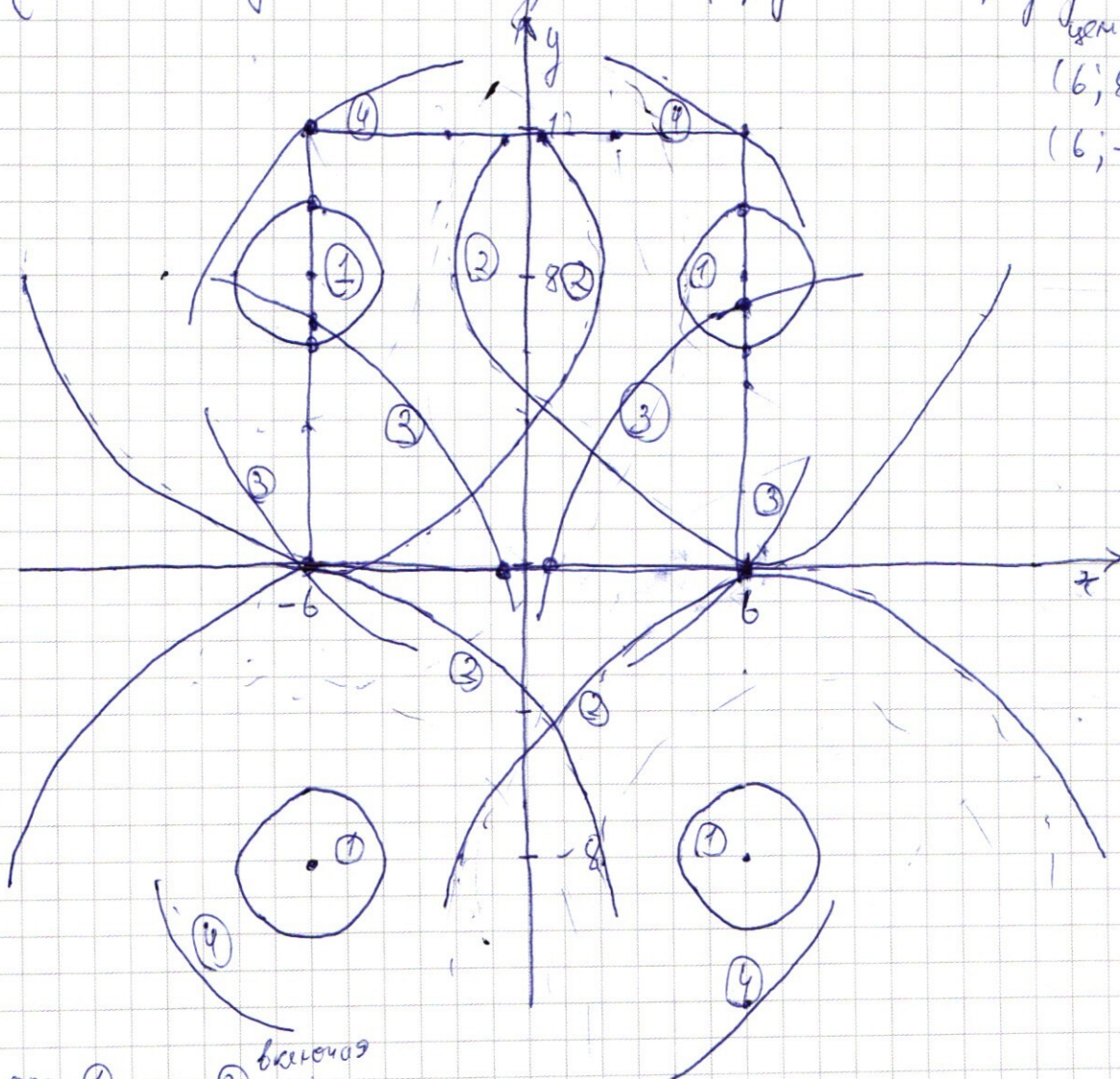
имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & \text{— уравнение квадрата со сторонами 12 и с} \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a & \text{— уравнение окружностей с радиусом } \sqrt{a} \text{ и с} \end{cases}$$

центрами в $(0,6)$
 $(6,8); (-6,8);$
 $(6,-8); (-6,-8)$



от ① до ② — 4 реш.
от ② до ③ — 8 реш.
в ③ — 6 реш.

от ③ до ④, не включено — 4 реш.
в ④ — 2 реш.
от ④ — 0 реш.

$$\begin{aligned} \text{в } ④ \quad a &= r^2 \\ a &= 20^2 + 12^2 = 544 \end{aligned}$$

Ответ: при $a=544$ — 2 решено

N1

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1^4 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

мабери цифр

- 1) 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7 → кол-во перестановок $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$
- 2) 1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7 → кол-во перестановок $\frac{8!}{4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 840$

$$1680 + 840 = 2520$$

Ответ: 2520 разных восьмизначных чисел

т.к. повторяются одинаковые цифры
аналогичное удвоили

N3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = 2(x+6)(x+4)$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 24 = 1$$

$$\begin{cases} x+6=0 \\ \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)\sqrt{2} \rightarrow x \geq -4 \quad (1) \end{cases}$$

$$x = -5 \pm 1 = \begin{cases} -4 \\ -6 \end{cases}$$

ОДЗ:
 $x^3 - 4x + 80 \geq 0$

$$x = -6 \text{ не подходит по ОДЗ}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x = -6 \text{ не подходит по ОДЗ}$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \rightarrow x \text{ может быть равен } \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 6 \pm 8 \pm 12 \pm 16$$

по схеме Горнера

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -20 & 48 \\ 4 & & & & \\ \hline & 1 & 2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -6 \text{ не подходит по ОДЗ} \\ (x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 12 = 13$$

$$x = -1 \pm \sqrt{13} = \begin{cases} -1 - \sqrt{13} \\ -1 + \sqrt{13} \end{cases} \text{ не подходит по условию (1)}$$



Ответ: $x = 4$

$$x = \sqrt{13} - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \geq 0$$

Пусть $|x-2| = a, a \geq 0$

$$a^2 - 3x^2a + 2x^4 \geq 0$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$a = \frac{3x^2 \pm x^2}{2} = \begin{cases} 2x^2 \\ x^2 \end{cases}$$

$$(|x-2| - 2x^2)(|x-2| - x^2) \geq 0$$

$$(2x^2 - |x-2|)(x^2 - |x-2|) \geq 0$$

$$I \quad x < 2$$

$$(2x^2 + x - 2)(x^2 + x - 2) \geq 0$$

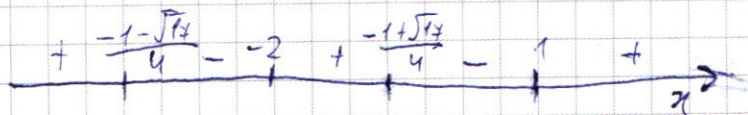
$$D = 1 + 16$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$D = 1 + 8$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)(x+2)(x-1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}] \cup [-2; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup [1; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}] \cup [-2; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup [1; +\infty)$

$$II \quad x \geq 2$$

$$(2x^2 - x + 2)(x^2 - x + 2) \geq 0$$

$$D = 1 - 16 = -15 < 0 \quad D = 1 - 8 =$$

к. отрицательна $\leftarrow = -7 < 0$

$$\Downarrow \\ x \geq 2$$

$$\begin{cases} S = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} \\ 10S = 50(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) + (b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{2998} + b_{2999}) \\ 9S = 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = \frac{49b_3(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} \quad b_3 = b_1 q^2 \end{cases} \quad | -$$

$$\begin{cases} 9S = \frac{49b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} \\ S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \end{cases} \quad | :$$

$$9 = \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} \Leftrightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \quad \text{— не подходит } q > 0 \text{ по условию}$$

Пусть k — во сколько раз увеличится сумма, если увеличить в 2 раза члены на четных местах

$$\begin{cases} k \cdot S = 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) + (b_1 + b_3 + \dots + b_{2999}) \\ S = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} \end{cases} \quad | -$$

$$(k-1)S = b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = \frac{b_2(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{(q^2 - 1)(q + 1)}$$

$$\begin{cases} (k-1)S = \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{(q - 1)(q + 1)} \\ S = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \end{cases} \quad | :$$

$$k-1 = \frac{q}{q+1}$$

$$k = \frac{2q+1}{q+1} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 1} = \frac{11}{8}$$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

37

$$(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2$$

$$x_m(t) = x_{m0} + \sin \omega t$$

$$x_n(t) = x_{n0} + \sin \omega t$$

$$(x_{m0} \quad x_{m0} \sin \omega t)$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x^2 - 2)^2 \geq 3x^2|x-2|$$

$$(2x^4 + (x^2 - 2)^2)x^2 \geq (3x^2)^2(x-2)^2$$

$$(2x^4 - 3x$$

$$|x-2| = a$$

$$a \geq 0$$

$$2x^4 + a^2 \geq 3x^2a$$

$$2x^4 - 3x^2a + a^2 \geq 0$$

$$\Delta = 9a^2 - 8x^4$$

$$x = \frac{3a \pm a}{4} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}a \end{cases}$$

$$x = \sqrt{|x-2|}$$

$$x = -\sqrt{|x-2|}$$

$$x = \sqrt{\frac{|x-2|}{2}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{|x-2|}{2}}$$

$$a^2 - 3x^2a + 2x^4$$

$$\Delta = 9x^4 - 8x^4$$

$$a = \frac{3x^2 \pm x^2}{2} = \begin{cases} 2x^2 \\ x^2 \end{cases}$$

$$|x-2| = 2x^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4x^4$$

$$4x^4 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$64 - 4x$$

$$(|x-2| - 2x^2)(|x-2| - x^2) \geq 0$$

$$x \leq 2$$

$$(-2x^2 - x + 2)(2 - x - x^2) \geq 0$$

$$(2x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) \geq 0$$

$$\Delta = 1 + 16$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

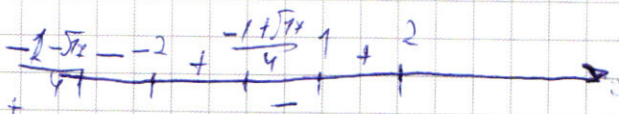
$$\Delta = 1 + 8$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$(2x^2 - x + 2)(x^2 - x + 2) \geq 0$$

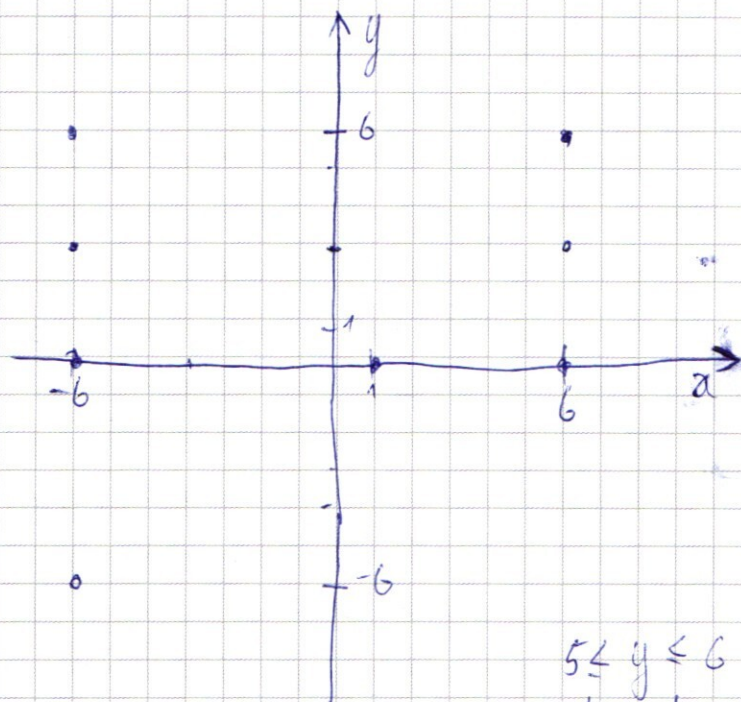
$$\Delta \neq 0 \quad \Delta < 0$$

↓



$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}] \cup [-2; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x-3| + |3+x| = 12$$

$$x < -3 \quad x < -3$$

$$3-x-3-x$$

$$3-x-3-x$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$3-x+3-x$$

$$-12 \leq x \leq 12$$

$$5 \leq y \leq 6$$

$$|y-7| + |y-5| = 12$$

$$y < 5$$

$$|6+x| + |x-6| = 12$$

$$-x-6-x+6 = 12$$

$$-y+7-y+5 = 12$$

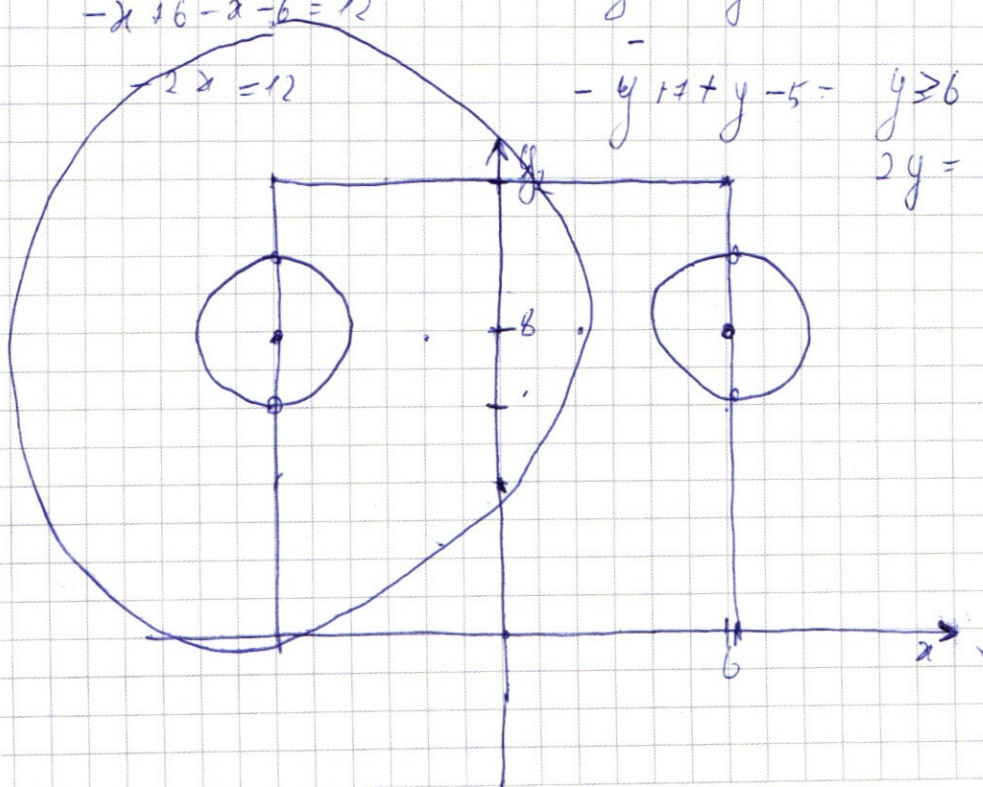
$$-y+7+y-5 = y \geq 6$$

$$2y =$$

$$|x-8| + |x+6| = 12$$

$$-x+6-x-6 = 12$$

$$-2x = 12$$



$$700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 1^3 \quad 11122557 \rightarrow$$

$$700 = 7 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 1^4 \quad 11114557$$

$$\left(x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$25 - 24$$

$$x = -5 \pm 1$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$-64 + 16 + 80$$

$$-120 + 20 + 80$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+6)(x+4)$$

$$(x+6) (\sqrt{x^3 - 4x + 80} - \sqrt{2} (x+4)) = 0$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+4)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

~~181~~

$$1 \quad -2 \quad -20 \quad +48$$

-2

$$1 \quad -4 \quad -12 \quad 48$$

$$64 - 32 - 80 + 48$$

1

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 6 \pm 8 \pm 12 \pm 24 \pm 16 \pm 48$$

$$1 \quad -2 \quad -20 \quad +48$$

(9)

$$1 \quad 9 \quad -12 \quad 48$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad 4 \quad 4$$

$$\pm 1 \pm 2$$

$$2 \quad -1 \quad 6 \quad 10$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad 4 \quad 4$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad 4 \quad 4$$

-1

-2

$$2 \quad -5 \quad 12 \quad -8$$

$$2 \quad -7 \quad 21$$

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$\frac{8!}{3!2!2!1!} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 210$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2|x-2| + (x+2)^2 \geq 0$$

$$2x^4 + (x+2)^2 \geq 3x^2|x-2|$$

$$(2x^4 + (x+2)^2 - 3x^2|x-2|) \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4$$

$$2(x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D) \geq 0$$

$$x \geq -4$$

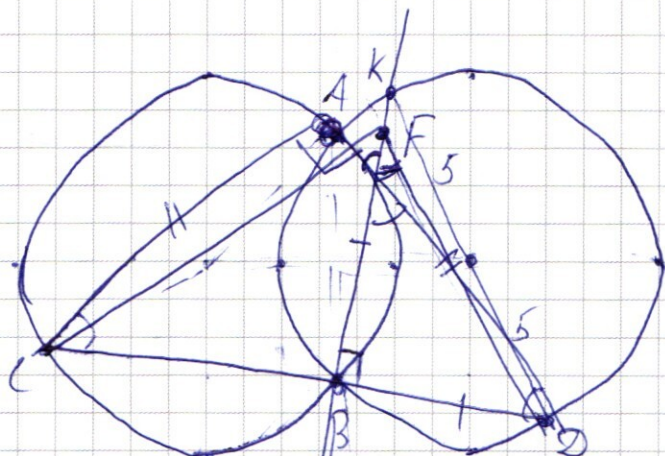
$$A + C = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 > |x-2| \quad B + D + AC = \frac{7}{2}$$

$$x^2 > (x-2)^2 \quad AD + BC = 2$$

$$(x^2 - x + 2) \quad BD = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$112$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 211 \end{array}$$

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

CF-?

$$\begin{array}{r} 1122 \\ 1212 \\ 2121 \\ 2211 \\ 2112 \\ 1221 \end{array}$$

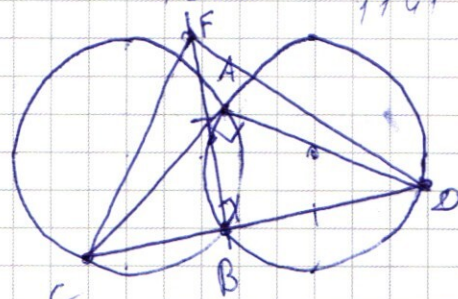
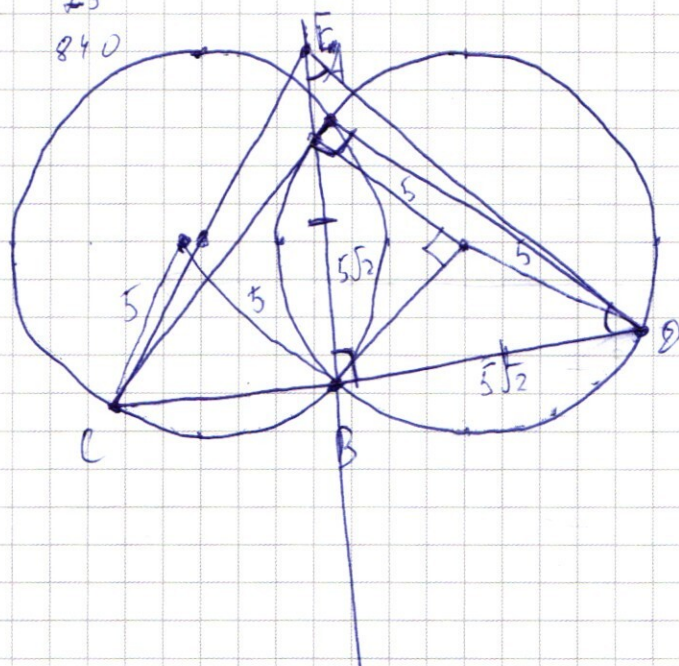
$$\frac{4!}{2!2!} =$$

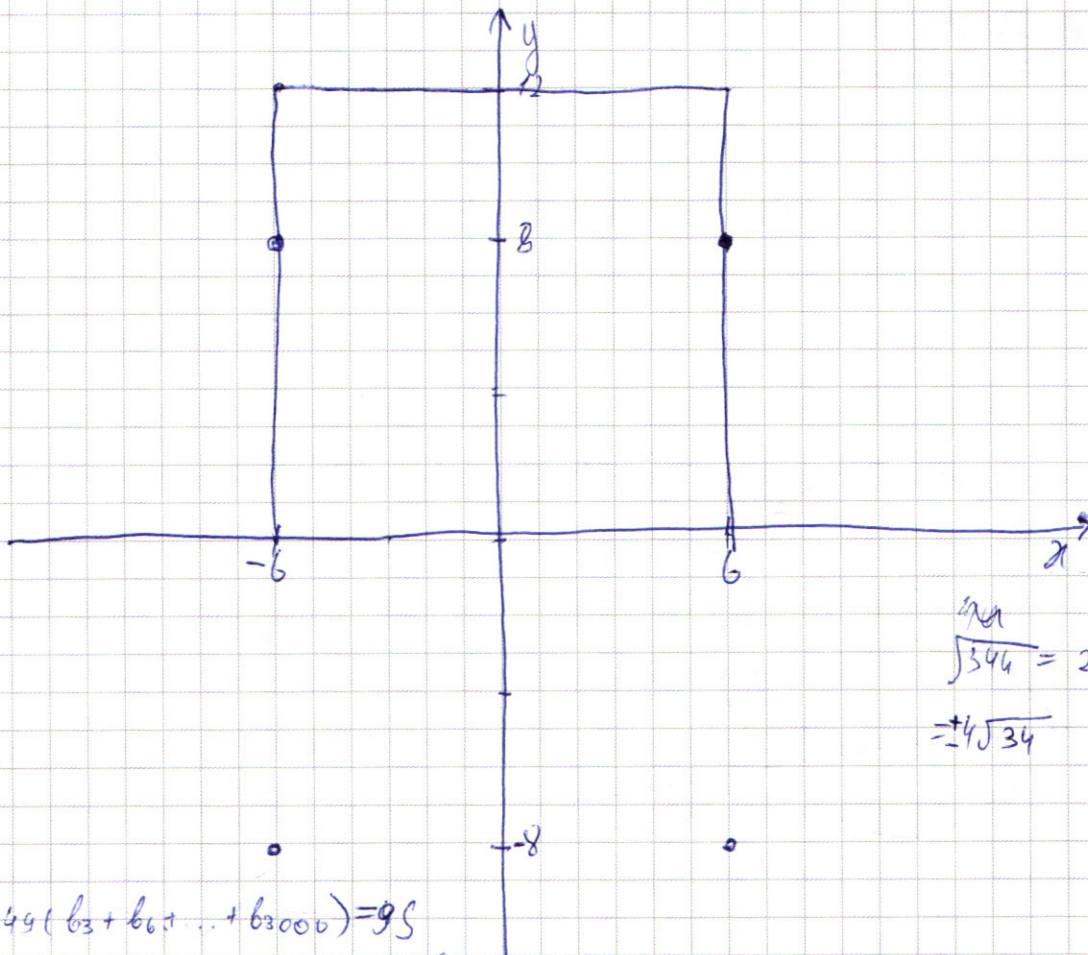
$$\begin{array}{r} 4111 \\ 1116 \\ 1411 \\ 1141 \end{array}$$

$$\frac{5!}{3!} =$$

$$\begin{array}{r} \times 210 \\ 8 \\ 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 56 \\ 90 \\ 25 \\ 840 \end{array}$$



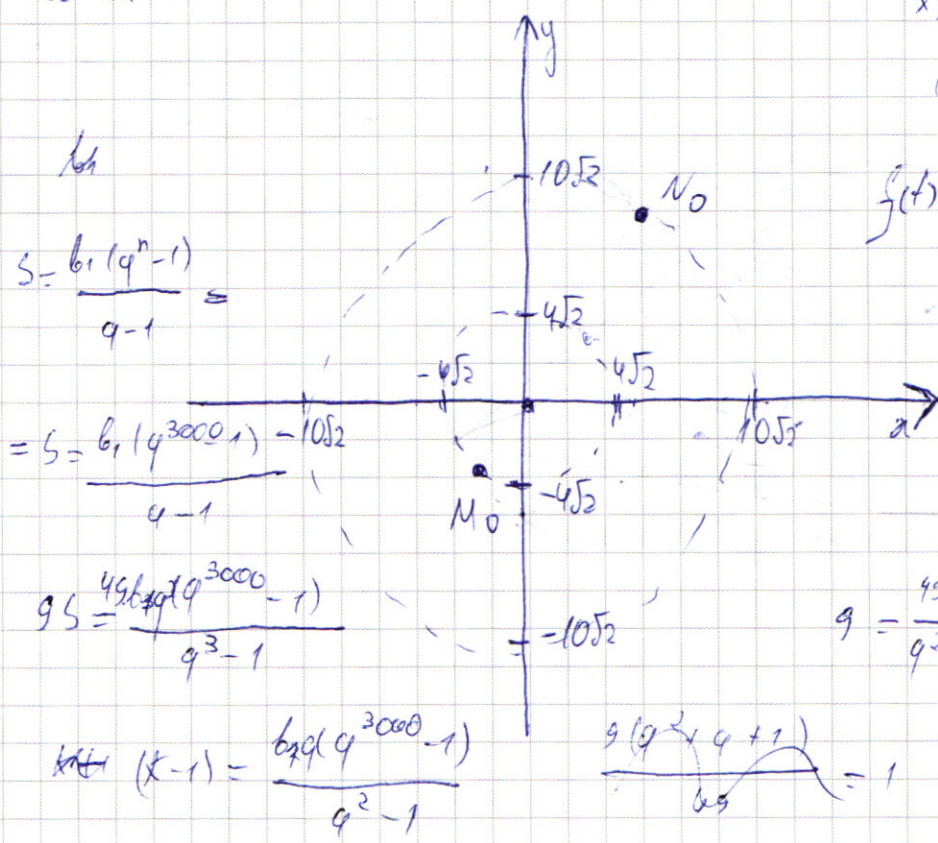


$2x^4$

$$\sqrt[4]{344} = 2\sqrt[4]{136} = \pm 4\sqrt[4]{34}$$

$$49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = 9S$$

$$b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = (k-1)S$$



39×39

$$(40-1)^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$$

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 1052$$

$$9S = \frac{49b_1(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$(k-1) = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$q = \frac{49q^2}{q^2 + q + 1}$$

$$49q^2 - q^2 - q - 9 = 0$$

$$48q^2 - q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 1440$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{40} = \frac{24}{20} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$