МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Заметим, что тогда в состав числа могут входить только числа 1, 2, 4, 5, 7. (3, 6 и 9 не могут быть 700 ⋮̸ 3, 0 не может быть (иначе произведение было бы равно 0), 8 не может быть 700 ⋮̸ 8)

Какие тогда числа там могли быть? Это обязательно одна 7; две 5; либо две 2, либо одна 4; остальные – единицы.

1) 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1

2) 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1

Таким образом, всего возможно 2 случая.

Посчитаем кол-во вариантов переставить числа в 1) случае. Предположим, что все цифры разные (как будто). Тогда вариантов 8!

Теперь вспоминаем про то, что есть и одинаковые цифры. Получается, мы нашли больше вариантов, чем было нужно. Во сколько раз? Считая, что 5-ки различные, мы в каждом варианте их переставляли. Переставить 2 числа можно 2! способами. Значит, из-за того, что 5 одинаковые на самом деле мы нашли в 2!

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики) раз больше чисел. Из-за того, что 2-ки одинаковые, мы нашли ещё в 2! раз больше чисел. И, из-за того, что единицы одинаковые, мы нашли в 3! раз больше чисел. Значит, на самом деле, чисел, состоящих из цифр 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7 столько:

$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}$. Аналогичными рассуждениями

получаем, что во втором случае чисел, состоящих из цифр 1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7 столько:

$\frac{8!}{2!\cdot 4!}$ (2 пятерки и 4 единицы)

Посчитаем, сколько всего: $\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}+\frac{8!}{2!\cdot 4!}=$

$=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{2\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}=$

$=840+840=1680$

Ответ: 1680.

№2.

$S=b_1+b_2+\ldots+b_{3000}$

Пусть каждое следующее число в последовательности получается домножением предыдущего на q.

Тогда: $S=b_1+q^1b_1+q^2b_1+q^3b_1+\ldots+q^{2999}b_1$

$S=b_1(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})+qb_1(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})+$
$+q^2b_1(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})$

$10S=b_1(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})+qb_1(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})+$
$+50q^2b_1(1+q^3+q^6+\ldots+q^{2997})$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Разделим второе равенство на первое.

$$\frac{10S}{S}=\frac{b_1+qb_1+50q^2b_1}{b_1+qb_1+q^2b_1}=\frac{1+q+50q^2}{1+q+q^2}=10$$

$$1+q+50q^2=10+10q+10q^2$$

$$40q^2-9q-9=0$$

$$D=81+4\cdot9\cdot40=1521$$

$$q_{1,2}=\frac{9\pm39}{80}=\left[\begin{array}{l}-\frac{3}{8}\\0,6\end{array}\right.$$

Очевидно, что x и $\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot x$ разного знака. Значит, одно из этих чисел отрицательно, значит, $q\neq-\frac{3}{8}$, ведь тогда одно из каких-то 2-ух последовательных чисел в прогрессии будет отрицательным, что по условию невозможно.

Значит $q=0,6$.

$$S=b_1(q^0+q^2+\ldots+q^{2998})+b_1q(q_0+q^2+\ldots+q^{2998})$$

$$KS=b_1(q^0+q^2+\ldots+q^{2998})+2b_1q(q_0+q^2+\ldots+q^{2998})$$

K надо найти.

$$K=\frac{KS}{S}=\frac{b_1+2b_1q}{b_1+b_1q}=\frac{1+2q}{1+q}=\frac{1+2\cdot0,6}{1+0,6}=\frac{2,2}{1,6}=\frac{11}{8}$$

Ответ: сумма увеличилась в $\frac{11}{8}$ раз.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=(x+6)(x+4)$$

$x=-6$ – корень.

Теперь считаем, что $x\neq -6$ и сокращаем на $(x+6)$.

$$\sqrt{\frac{x^3}{2}-2x+40}=x+4$$

Если возвести обе части в квадрат, то никакие корни не исчезнут, могут только добавиться лишние.

$$\frac{x^3}{2}-2x+40=x^2+8x+16$$

$x^3-2x^2-20x+48=0$, $x^3-2x^2-20x+48=(x-4)(x^2+2x-12)$

$(x-4)(x^2+2x-12)=0$

$x=4$ – корень (подходит, т.к $32-8+40\geq 0$)

$x^2+2x-12=0$

$D=4+4\cdot 12=52$

$$\frac{-2\pm 2\sqrt{13}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$$

Вариант $(-1-\sqrt{13})$ не подходит, т.к. из под корня должно выходить число ≥ 0, а $-1-\sqrt{13}+4<0$ (ведь $\sqrt{13}>3$). Проверим вариант $(\sqrt{13}-1)$. $40>2(\sqrt{13}-1)$, т.к. $\sqrt{13}<4 \Rightarrow 2(\sqrt{13}-1)<6$, значит $\frac{(\sqrt{13}-1)^3}{2}-2(\sqrt{13}-1)+40\geq 0$. также $\frac{(\sqrt{13}-1)^3}{2}\geq 0$ Подходит.

Ответ: $x_1=-6$, $x_2=4$, $x_3=(\sqrt{13}-1)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2| \cancel{\geq} +4\geq 0$

1) $x\geq 2$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0.$

$2x^4-3x^3\geq 0 \quad (x\geq 2)$, ведь:

$\underset{(x\geq 2)}{2x\geq 3} \Rightarrow \underset{(x\geq 2)}{2x^4\geq 3x^3} \Rightarrow \underset{(x\geq 2)}{2x^4-3x^3\geq 0.}$

$7x^2-4x\geq 0 \quad (x\geq 2)$, ведь:

$\underset{(x\geq 2)}{7x\geq 4} \Rightarrow \underset{(x\geq 2)}{7x^2\geq 4x} \Rightarrow \underset{(x\geq 2)}{7x^2-4x\geq 0}$

$4\geq 0.$

Значит при любых $x\geq 2$ данное выражение ($2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4$) $\cancel{\geq}$ больше либо равно 0.

2) $x<2.$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geq 0$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4=(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)$

$2x^2+x-2=0$

$D=1+16=17$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4=(x-1)(x+2)\,2\left(x-\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\right)\times$

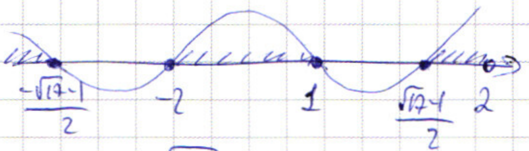
знагок «умножить» (не буква)

умножить $\times\left(x-\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\right).$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < -2$ $\left(\text{т.к. } -\sqrt{17} < -4 \Rightarrow -1-\sqrt{17} < -5 \Rightarrow\right.$

$\left.\Rightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < -2{,}5 \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < -2\right)$

$\frac{\sqrt{17}-1}{2} > 1$ $\left(\text{т.к. } \sqrt{17} > 4 \Rightarrow \sqrt{17}-1 > 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2} > 1{,}5 > 1\right)$



$2 > \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, $\left(\text{т.к. } \sqrt{17} < 5 \Rightarrow \sqrt{17}-1 < 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2} < 2\right)$

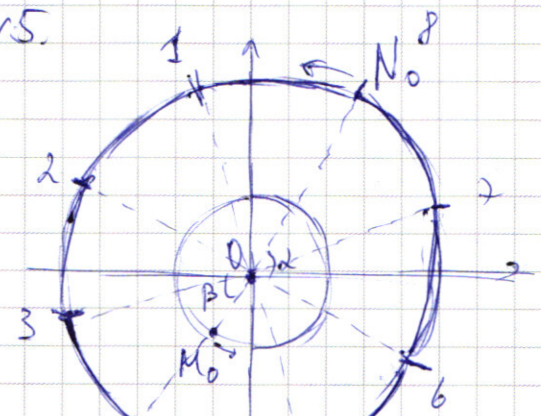
На графике штриховкой выделены подходящие области.

$x \in \left(-\infty; \frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right] \cup [-2; 1] \cup \left[\frac{\sqrt{17}-1}{2}; 2\right) \cup [2; +\infty)$

$x \in \left(-\infty; \frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right] \cup [-2; 1] \cup \left[\frac{\sqrt{17}-1}{2}; +\infty\right)$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{-\sqrt{17}-1}{2}\right] \cup [-2; 1] \cup \left[\frac{\sqrt{17}-1}{2}; +\infty\right)$.

№5.



Найдем радиусы окружностей. $R_M^2 = (-2)^2 + (-2\sqrt{7})^2 =$
$= 4 + 28 = 32 \Rightarrow R_M = 4\sqrt{2}$.
$R_N^2 = (5)^2 + (5\sqrt{7})^2 = 25 + 25\cdot 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow R_N = 5\cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

Докажем, что M_0, N_0 и центр окружностей лежат на одной прямой. Для этого посчитаем $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{5} = \sqrt{7}$. $\operatorname{tg}\beta = \frac{-2\sqrt{7}}{-2} = \sqrt{7}$.
α и β острые, их тангенсы равны $\Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$
$\Rightarrow M_0, N_0$ и центр окружностей лежат на одной прямой. ~~Введем~~ $\frac{R_N}{R_M} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Будем проводить линию из т. O (центр окружностей) и т. M_0 (которая движется).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Каждый раз будем отмечать точку пересечения этой прямой и большей окружностью через M_1. Посмотрим, как быстро перемещается M_1. Пусть т. M_0 прошла какое-то расстояние x. Тогда M_1 за это время пройдет расстояние $\frac{5}{2}x$. (ведь радиусы окружностей относятся именно так $\frac{R_M}{R_N} = \frac{5}{2}$). Точка N_0 за то время, за которое M_0 проходит расстояние x, проходит расстояние $\frac{x}{2}$ (водомерка в 2 раза быстрее жука). Значит M_1 движется в 5 раз быстрее N_0. Заметим, что расстояние между водомеркой и жуком минимально, когда они находятся на одной прямой с центром окружностей, при этом центр окружностей не принадлежит отрезку M_0N_0. В момент, когда расстояние между водомеркой и жуком минимально, M_1 совпадает с N_0. Посмотрим, когда это происходит. Разделим круг на 8 ~~частей~~ равных дуг, как показано на рисунке. Тогда, когда M_1 проходит $\frac{5}{8}$ круга, N_0 проходит $\frac{1}{8}$ и они оказываются в точке 1. Затем M_1 проходит $\frac{10}{8}$, N_0 проходит $\frac{2}{8}$ и они оказываются вместе в точке 3. Затем в точке 5, затем в точке 7 и снова в точке 1. Затем опять последует 3 точка, 5, 7 ...

Значит всего они будут встречаться в 4 точках, осталось найти их координаты.

Найдем координаты 7 точки.

$\cos\alpha = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$\cos(\alpha - 45^\circ) = \cos\alpha\cos 45^\circ + \sin\alpha \sin 45^\circ = \frac{1+\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$

$\frac{1+\sqrt{7}}{4} = \frac{x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}}$

$x^2+y^2 = (10\sqrt{2})^2 = 200$

$y^2 = 200 - \frac{25(1+\sqrt{7})^2}{2} = 200 - \frac{25\cdot 8 + 2\sqrt{7}}{2} = 100 - \cancel{}\, 25\sqrt{7}$

$y = 5\sqrt{4-\sqrt{7}}$ $T_7\left(\frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}};\ 5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$

Отсюда найдем координаты остальных 3-ёх точек.

$T_3\left(-\frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}};\ -5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$

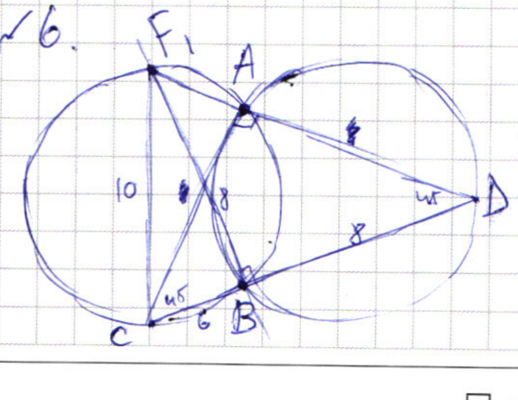
$T_5\left(5\sqrt{4-\sqrt{7}};\ -\frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}}\right)$

$T_1\left(-5\sqrt{4-\sqrt{7}};\ \frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}}\right)$

Мы можем так сделать, т.к. $\angle T_1OT_7 = \angle T_7OT_5 = \angle T_5OT_3 = \angle T_3OT_1 = 90^\circ$.

Ответ: $T_1\left(-5\sqrt{4-\sqrt{7}};\ \frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}}\right)$; $T_3\left(-\frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}}; -5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$; $T_5\left(5\sqrt{4-\sqrt{7}}; -\frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}}\right)$; $T_7\left(\frac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}}; 5\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)$.

№6.



$\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на равные дуги в равных окружностях $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ (т.к. $(180^\circ - 90^\circ)/2 = 45^\circ$)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть перпендикуляр к CD, проходящий через т. B пересекает окружность в т. F_1. $\angle AF_1B = \angle ACB$ (опир. на одну дугу) $\Rightarrow \angle AF_1B = 45°$. Следовательно в четырехугольнике DBF_1A ~~угол~~ $\angle F_1AD = 180°$ (из суммы углов) $\Rightarrow$ на самом деле этот „четырёхугольник" – треугольник $\triangle F_1DB$, причем $F_1B = BD$ (равнобедренный) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ та точка F из условия – это наша F_1. Итак мы доказали, F лежит на одной из окружностей.

~~$\angle CBF$~~ = Теперь F_1 обозначаем как F.

$\angle CBF = 90° \Rightarrow CF$ – диаметр. $CF = 2R = 10$.

б) $BC = 6$, $CF = 10 \Rightarrow$ по т. Пифагора $BF = 8$ $(\sqrt{10^2 - 6^2} = 8)$ $\Rightarrow BD = 8$ (т.к. $BF = BD$).

~~$AC = AD =$~~

$$\left.\begin{array}{l} AD^2 + AC^2 = 14^2 = 196 \\ AD = AC \end{array}\right| \Rightarrow AD = AC = 7\sqrt{2}$$

$FD = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$.

$AF = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

$S_{AFC} = \frac{AF \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 7$.

Ответ: 7.

~~AG~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№7.

$$\begin{cases} |y-6+x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

Рассмотрим 4 случая:

1) $y+x \geq 6$, $y-x \geq 6$ 2) $y+x \geq 6$, $y-x < 6$ 3) $y+x < 6$, $y-x \geq 6$ 4) $y+x < 6$, $y-x < 6$

1) $y+x \geq 6$
$y-x \geq 6$

$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

$y-6-x+y-6+x = 2y-12 = 12 \Rightarrow \underline{y=12}$

$\underline{-6 \leq x \leq 6}$

2) $y+x \geq 6$
$y-x < 6$

$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

$-y+6+x+y-6+x = 2x = 12$

$\underline{x=6}$

$\underline{0 \leq y < 12}$

3) $y+x < 6$
$y-x \geq 6$

$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

$y-6-x-y+6-x = -2x = 12$

$\underline{x=-6}$

$\underline{0 \leq y < 12}$

4) $y+x < 6$
$y-x < 6$

$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$

$-y+6+x-y+6-x = \cancel{-2y=12}\ 2y+12 = \cancel{10}\ 12$

$\underline{y = \cancel{-6}\ 0}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Теперь заметим, что~~

~~$-6 < x < 6$~~

Теперь заметим, что если брать противоположные числа (на место x), то $|x|$ будет одинаковым.

Если на место y брать числа вида $(6+k)$ и $(6-k)$, то $(|y|-6)^2$ будет одинаковым.

Тогда, если $y=12$, а $x_1=-k$, $x_2=k$, то при $y=0$ $x_1=-k$ и $x_2=k$ также подходят. Значит вариантов ответа будет 4. Не подходит.

Значит, если $y=12$, то $x=0$. Тогда $y=0$ также подходит. $a=36+64=100$.

Если $x=6$, а $y_1=-m$, $y_2=m$, то при $x=-6$ $y_1=6-m$ и $y_2=6+m$ также подходят. Тогда будет 4 варианта. Не подходит.

Значит $y=6$. Тогда подходит также $x=-6$.

$a=(6-8)^2+(6-6)^2=4$.

Для $x=-6$ и $y=0$ получаем те же рассуждения, что и для $x=6$, $y=12$ соответственно. И те же ответы.

Ответ: $a=100$ или $a=4$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1$ $\quad + \; 8!/2!\cdot 2!\cdot 3!$

$4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1$ $\quad 8!/2!\cdot 4!$

$b_1, qb_1, q^2b_1 \ldots \quad q^{2999}\cdot b_1 \quad = b_1(q^0+q^1+\ldots+q^{2999}) = S$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{q^0+q^1+q^2+\ldots+q^{2999}}{q^0+q^1+50q^2+\ldots+50q^{2999}} = 10$$

$S = b_1(q^0+q^3+q^6+\ldots+q^{2997}) +$

$+ b_1q(q^0+q^3+\ldots+q^{2997})$

$+ b_1q^2(q^0+ \ldots q^{2997})$

$\begin{array}{r} \times 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array}$

$S = a + qa + q^2a$

$10S = a + qa + 50q^2a$

$$\frac{1}{10} = \frac{1+q+q^2}{1+q+50q^2}$$

$10 + 10q + 10q^2 = 1 + q + 50q^2$

$9 + 9q = 40q^2$

$40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 4\cdot 9\cdot 40 = 1440 + 81 = 1521$

$\begin{array}{r} \times 36 \\ 4 \\ \hline 1440 \\ + 81 \\ \hline 1521 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} \times 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ +117 \\ \hline 1521 \end{array}$ $\quad 2\cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$\cancel{9 \pm \sqrt{1521}}$ $\quad \frac{9\pm 39}{80} = \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{8} \quad \times \\ 0{,}6 \quad ✓ \end{array}\right.$ $\quad \frac{48}{80} = \frac{6}{10}$ $\quad \frac{1{,}6}{2{,}2} = \frac{8}{11}$

$S = b_1(q^0+q^2+\ldots+q^{2998})$

$+ b_1q(q^0+ \ldots - q^{2998})$

$S_1 = b_1(\quad) + 2b_1q(\quad)$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{b_1+b_1q}{b_1+2b_1q} = \frac{1+q}{1+2q} =$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$

$(x+6)\sqrt{\frac{x^3}{2}-2x+40}=x^2+10x+24=(x+6)(x+4)$

$\underline{x=-6}$

$\sqrt{\frac{x^3}{2}-2x+40}=x+4$

$\frac{x^3}{2}-2x+40=x^2+8x+16$

$x^3-4x+80=2x^2+16x+32$

$x^3-2x^2-20x+48=0$

$64-32-80+48=0\,!$

$\underline{x=4}$ ✓

$x^3-2x^2-20x+48=(x-4)(x^2+2x-12)$

$D=4+4\cdot 12=52$

$\frac{-2\pm\sqrt{52}}{2}=-1\pm\sqrt{13}$

$-1+\sqrt{13}$

$-1-\sqrt{13}$ x

$0<\sqrt{13}-1<3$

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

$x\geq 2$

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0$

~~$-x^4+7x^2-4x+4\geq 0$~~

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

~~$32-24+28-8+4$~~

~~16~~

~~$-16+28-28+4$~~

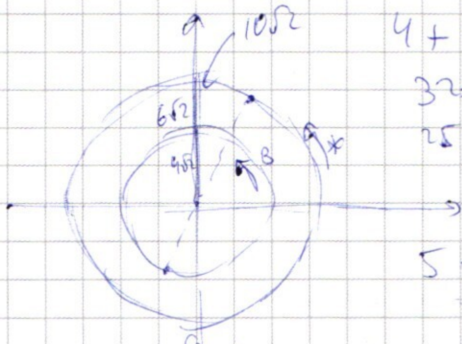
$-256+$

$x<2$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geq 0$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

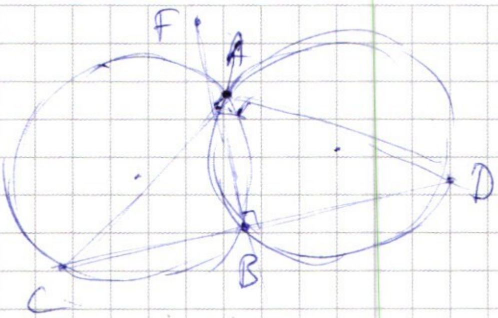


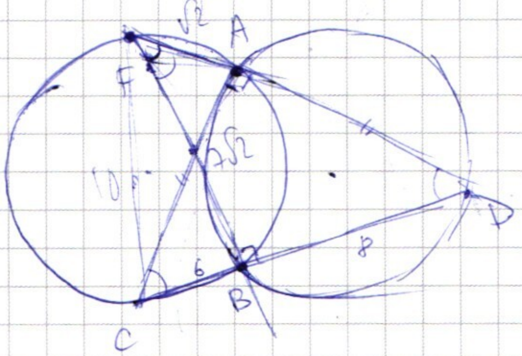
$4 + 28$

$32 = 4\sqrt{7}$

$25 + 25\cdot 7$

$5 \cdot 2\sqrt{2}$





$CB \cdot BD = CA^2$

AD^2

$14^2 = a^2 + a^2$

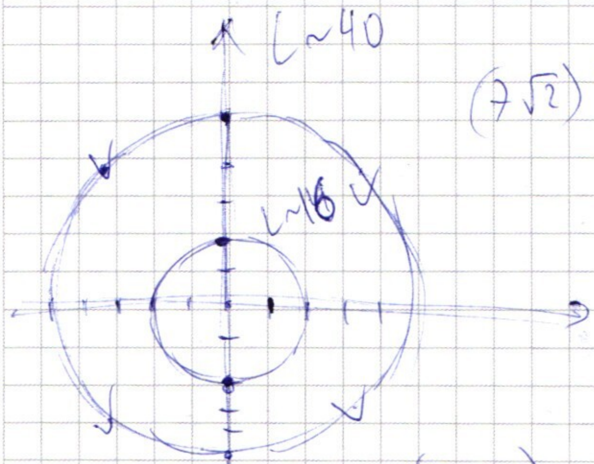
$196 = 2a^2$

$98 = a^2 = (7\sqrt{2})^2$

$(7\sqrt{2})^2 + x^2 = 100$

$x = \sqrt{2}$

$BD =$



$\boxed{\dfrac{8+x}{2}} = y$

$y = 4x$

$x = \dfrac{20+x}{5}$

$4x = 20$

$x = 5$

$+4-\sqrt{7}$

$\dfrac{25(1+7+2\sqrt{7})}{2} + y^2 = 100$

$25\sqrt{7} + y^2 = 100$

$\cos\alpha = \dfrac{5}{10\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos(\alpha + 45^\circ) = \cos\alpha\cos 45^\circ + \sin\alpha \sin 45^\circ =$

$\sin\alpha = \dfrac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{7})}{2\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{4} = \dfrac{x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = \dfrac{10\sqrt{2}(1+\sqrt{7})}{4} = \dfrac{5(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}} =$

$\dfrac{25(1+\sqrt{7})^2}{2} + y^2 = 100$

$y = \sqrt{100 - 25\sqrt{7}} = 5\sqrt{4-\sqrt{7}}$

(2)

$2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0$ $\underline{x\geq 2}$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

$2x^4\geq 3x^3$

$2x\geq 3$

$7x^2\geq 4x$

$7x\geq 4$

$28 \cdot 1 = 840$

$x<2$

$2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geq 0$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0$

$x=1:$

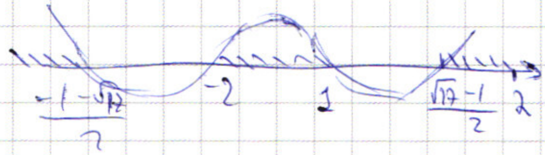
$(x-1)(2x^3+5x^2-4)$

$x=-2$

$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)$

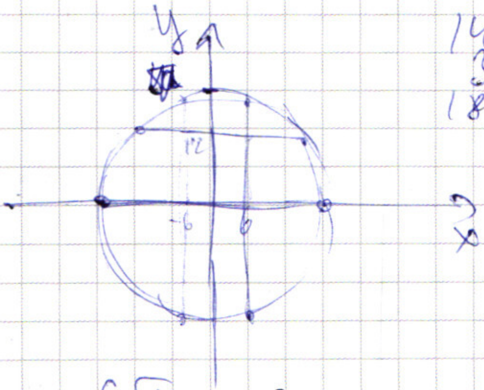
$x=1$ $x=-2$ $D=1+16$

$\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$



$|y-6-x|+|y-6+x|=12$

$(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a$



144
36
$180=3^2\cdot 2^2\cdot 5$

$y+x\geq 6$ $y-x\geq 6$ $\underline{y=12}$ $-6\leq x\leq 6$

$y+x\geq 6$ $y-x\leq 6$ $\underline{x=6}$ $0\leq y\leq 12$

$x+6-y+y-6+x=12$

$x=6$

$\cancel{y=0}$ $\cancel{x=6\ x=-6}$

$y+x\leq 6$ $y-x\geq 6$

$y-6-x+6-y-x$

$-2x=12$

$x=-6$

$\underline{x=-6}$ $0\leq y\leq 12$

$y+x\leq 6$ $y-x\leq 6$

$-y+6+x-y+6-x$

$-2y+12=12$

$\underline{y=0}$

$-6<x<6$

$a>6\sqrt{5}$ x

~~a<6~~ ~~x~~

$a\leq 0$ x

~~a-8 = 2a-8~~

$y=12$ $y=0$

$\cancel{x=-6\ x=6}$ $\cancel{y=12}$

$x=6$, $y=-6$ $y=6$

$y=0$, $y=12$ $x=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)