МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16, \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Разложим 4900 на простые множители: $4900 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7$.
Тогда набор цифр, из которых состоит число, может быть таким: 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7. Из произведений простых множителей числа можно получить только одну цифру: $2\cdot 2 = 4$. Остальные произведения больше 9. Значит ещё один набор цифр: 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7. Без учета порядка (тоесть без учета наличия одинаковых цифр) в обоих случаях будет по $8!$ возможных перестановок. Но для первого набора каждое число будет учтено 2^4 раз, а для второго — $2^3\cdot 3$ раз $(2!\cdot 2!\cdot 3!)$. Значит для первого набора будет $\frac{8!}{2^4}$ вариантов, а для второго — $\frac{8!}{2^3\cdot 3}$ вариантов.

$$\frac{8!}{2^4} + \frac{8!}{2^3\cdot 3} = 8!\cdot\frac{2+3}{2^4\cdot 3} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\cancel{8}\cdot 5}{\cancel{2^4}\cdot\cancel{3}} = 100\cdot 6\cdot 7 = 4200$$

Ответ: 4200 чисел.

Задача 2.

Если члены с номерами, кратными 3, увеличить в 40 раз, то их сумма увеличится в 40 раз. Сами они будут представлять геометрическую прогрессию со знаменателем q^3 $(b_6 = b_5 q = b_4 q^2 = b_3 q^3)$. Их будет $\frac{3000}{3} = 1000$, значит их сумма $S_3 = \frac{b_3(q^{3\cdot 1000}-1)}{q^3-1} = \frac{b_1 q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$.
$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$. S_3 уже содержится в S, значит увеличение S_3 в 40 раз увеличит сумму на $39S_3$. С другой стороны она увеличится в 5 раз, то есть на $4S$.

$$4S = 39S_3 \Leftrightarrow \frac{4b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{39b_1q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1},\ q\neq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{q-1} = \frac{39q^2}{q^3-1}$$

$$\Leftrightarrow 4q^2+4q+4 = 39q^2 \Leftrightarrow 35q^2-4q-4=0$$

$D = 16 + 16\cdot 35 = 24^2$, $q = \frac{4\pm 24}{70}$. Т.к. все члены положительны, то $q>0$, то есть $q = \frac{4+24}{70} = 0{,}4$. Так же, как члены с номерами, кратными 3, члены с четными номерами будут составлять геометрическую прогрессию, сумма которой $S_2 = \frac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1}$. Пусть S увеличится в x раз при увеличении S_2 в 3 раза, тогда с одной стороны S увеличится на $2S_2$, а с другой — на $(x-1)S$.

$$2S_2 = (x-1)S \Leftrightarrow \frac{(x-1)b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{2b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1},\ q\neq 1, \Leftrightarrow (x-1) = \frac{2q}{q+1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3q+1}{q+1} = \frac{3\cdot 0{,}4+1}{0{,}4+1} = \frac{2{,}2}{1{,}4} = \frac{11}{7}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

Задача 4.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^2|x+2| + (x+2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - |x+2|)(4x^2 - |x+2|) \geq 0$$

При $x \geq -2$:

$$(x^2 - x - 2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x + \frac{\sqrt{33}-1}{8}\right) \geq 0$$

$+ \quad -1 \quad - \quad \frac{1-\sqrt{33}}{8} \quad + \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} \quad - \quad 2 \quad +$

$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; \infty).$$

При $x < -2$:

$$(x^2 + x + 2)(4x^2 + x + 2) \geq 0$$

Дискриминанты отрицательные, действительных корней нет, старший коэффициент положителен, значит x принадлежит области определения: $x \in (-\infty; -2)$.

Объединим: $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; \infty)$.

Задача 5.

Найдем радиусы окружностей: для карася: $r = \sqrt{1+8} = 3$ и для пескаря: $R = \sqrt{4+32} = 6$. Расстояние между рыбами будет кратчайшим, когда их точки будут лежать на одной прямой с началом координат (это расстояние равно 3). Так как радиус большей окружности в 2 раза больше, то точка на большей окружности, лежащая на луче, проведенном из центра через точку карася на малой окружности, будет двигаться в том же направлении со скоростью в 2 раза большей (при повороте на одинаковый угол точка на большей окружности пройдет в два раза больший путь за то же время). Скорость этой точки (назовем ее проекцией точки карася на большую окружность) будет в $2 \cdot 2{,}5 = 5$ раз больше скорости пескаря. Заметим, что теперь минимальное расстояние между карасем и пескарем будет тогда, когда проекция карася совпадет с пескарем. Изначально пескарь и карась находятся на диаметрально противоположных точках. Так как скорость проекции карася в 5 раз больше скорости пескаря, то

Продолжение на странице № 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$$

$$x^2+6x-40=(x+10)(x-4)$$

$$(x+10)\left(\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}}-(x-4)\right)=0$$

$x=-10$, подставим под корень, получим $\sqrt{-240}$, значит $x=-10$ не подходит.

$$\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4)$$

при $x\geq 4$ возведем обе части в квадрат

$$x^3-64x+200=8x^2-64x+128$$

$$x^3-8x^2+72=0$$

Подбором находим корень 6, поделим по схеме Горнера:

	1	-8	0	72
6	1	-2	-12	0

$$x^2-2x-12=0$$

$$D=4+48=52$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2+2\sqrt{13}}{2}=1+\sqrt{13} \\ x=\frac{2-2\sqrt{13}}{2}=1-\sqrt{13} \end{array}\right.$$

$x=1-\sqrt{13}$, не подходит по условию возведения в квадрат ($x\geq 4$)

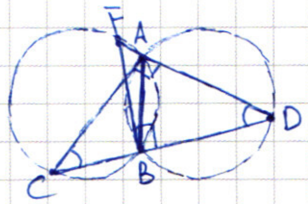
Ответ: $1+\sqrt{13}$; 6.

Продолжение задачи 5

к тому моменту, когда карась догонит пескаря, пескарь пройдет $\frac{1}{4}$ того расстояния, которое между ними было по окружности (если они в одной точке, то расстояние между ними $2\pi R$). Таким образом, пескарь сначала до первой встречи с проекцией карася пройдет $\frac{1}{8}$ окружности, а затем каждый раз будет проходить по $\frac{1}{4}$. Тогда точки, в которых он будет в этот момент, будут иметь координаты: $(4\sqrt{2}; -2)$, $(2; 4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2}; 2)$, $(-2; -4\sqrt{2})$.

Ответ: $(4\sqrt{2}; -2)$, $(2; 4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2}; 2)$, $(-2; -4\sqrt{2})$.

Задача 6.

а) 

Так как окружности одинаковых радиусов, то дуги стягиваемые равными хордами, равны. Значит, равны и вписанные углы, опирающиеся на них. Значит $\angle ACB = \angle ADB$, т.е. $\triangle ACD$ – равнобедренный. По условию он прямоугольный. Тогда $\angle ADB = 45^\circ$. $\triangle BDF$ тоже равнобедренный прямоугольный. То есть $\angle ADB = 45^\circ = \angle FDB$, тогда $F \in AD$. $\angle FDB = \angle BFD = 45^\circ$, $\angle BFD = \angle$ ~~AD~~ ACB, значит F лежит на первой окружности (возможны два варианта: либо F и C лежат по одну сторону от AB и $\angle ACB = \angle AFB$, они опираются на одну дугу; либо F и C лежат по разные стороны от AB, тогда $\angle AFB = 180^\circ - \angle ACB$ и они опираются на противоположные дуги; в обоих вариантах F лежит на первой окружности). $\angle FBC$ – прямой ($FB \perp CD$), значит CF – диаметр, $CF = 26$.

б) По теореме Пифагора из $\triangle BCF$ найдем $BF = 24$. $BF = BD$, тогда $CD = 34$. Тогда $S_{\triangle CFD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 34 = 12 \cdot 34$, а $S_{\triangle ACD} = 8{,}5 \cdot 34$ (высота равнобедренного прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы). Тогда $S_{\triangle ACF} = 12 \cdot 34 - 8{,}5 \cdot 34 = 24 \cdot 17 - 17 \cdot 17 = 17(24 - 17) = 17 \cdot 7 = 119$.

Ответ: $CF = 26$; $S_{\triangle ACF} = 119$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

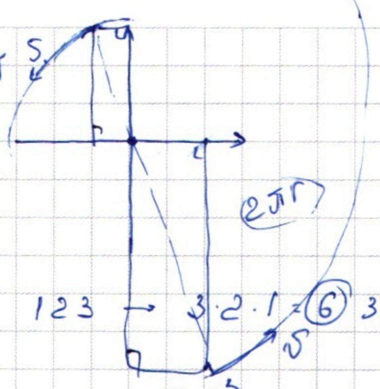
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.
4900	2
2450	2
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7 = 2^2\cdot5^2\cdot7^2$

$1,1,2,2,5,5,7,7 \to \cancel{8\cdot7}\ 8!$

$1,1,1,\cancel{4}4,5,5,7,7 \to 8!$



$123 \to 3\cdot2\cdot1 = 6 \quad 3!$

$2\sqrt{2} = 2\cdot1{,}4 = 3$

$\sqrt{8} \quad \sqrt{32}$

11225577

$2^4 \qquad \frac{8!}{2^4}$

$1114 5577$

$\frac{8!}{2^2\cdot2\cdot3} = \frac{8!}{2^3\cdot3}$

$8!\left(\frac{1}{2^3\cdot2} + \frac{1}{2^3\cdot3}\right) = \frac{5\cdot8!}{2^4\cdot3} = \frac{5^2\cdot\cancel{2^3}\cdot2^2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot6\cdot7}{\cancel{2^4}\cdot\cancel{3}} =$

$= \cancel{25}\ 100\cdot6\cdot7 = \underline{4200}$

2. $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_{3000}$

$S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \qquad b_2, b_4, b_6 \ldots b_{3000}$

$b_3, b_6, \ldots, b_{3000} \qquad b_6 = b_5 q = b_4 q^2 = b_3 q^3$

$S_2 = \frac{b_2(q^n-1)}{q^2-1} = \frac{b_1 q(q^n-1)}{q^2-1}$

$S_1 = \frac{b_3(q^{3\cdot\frac{n}{3}}-1)}{q^3-1} = \frac{b_3(q^n-1)}{q^3-1} = \frac{b_1 q^2(q^n-1)}{q^3-1}$

$(x-1)S = 2S_2$

$\cancel{39S_1 + S} =$

$\frac{(x-1)\cancel{b_1}\cancel{(q^n-1)}}{\cancel{q-1}} = \frac{2\cancel{b_1}q\cancel{(q^n-1)}}{\cancel{q^2-1}_{q+1}}$

$\cancel{5S} = \quad 4S = 39S_1$

$(x-1)(q+1) = 2q$

$x = \frac{2q}{q+1}+1$

$(q-1)(q^2+q+1)$

$\frac{4\cancel{b_1}\cancel{(q^n-1)}}{q-1} = \frac{39\cancel{b_1}q^2\cancel{(q^n-1)}}{q^3-1}$

35	−39	0	4
1	35	−4	−4	0

$4q^2+4q+4 = 39q^2$

$4(q^3-1) = 39q^2(q-1)$

$D = 16 + 16\cdot35 = 24^2$

$4q^3-4 = 39q^3 - 39q^2$

$x = \frac{2q+q+1}{q+1} = \frac{3q+1}{q+1}$

$35q^3 - 39q^2 + 4 = 0$

$35q^2 - 4q - 4 = 0$

$q_{1,2} = \frac{4\pm24}{70} = \frac{28}{70} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$q = 1$

$x = \frac{3\cdot0{,}4+1}{0{,}4+1} = \frac{2{,}2}{1{,}4} = \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}$

$q > 0$

$q = 0{,}4$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

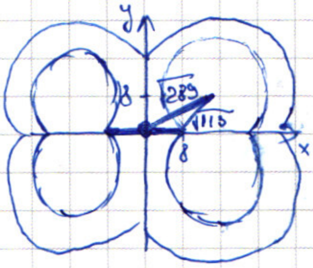
Задача 7.

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a$ – это окружность с центром $(15;8)$, радиусом $\sqrt{a}$, отраженная относительно Ox и Oy.

$|y+x+8| + |y-x+8| - 16 = 0$ – это отрезок от $(-8;0)$ до $(8;0)$

Тогда $a \in [(8^2+7^2);(8^2+15^2))$, т.е. $a \in [113;289)$.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Шифр

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$

$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$

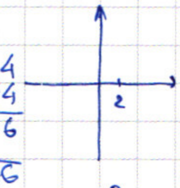
$x^3-64x+200 \,|\, x^2+6x-40$
$x^3+36x^2-40x \quad x$
$-6x^2-24x+200$

$x^2+6x-40=0$

$D=36+160=196$

$\frac{-6\pm14}{2} = 4;\ -10$

$14 \cdot 14 = 56 + 14\ldots = 196$



x^2+x+2

$(x+0{,}5)^2+1{,}75=y$

$x^2-|x+2|$

x^2-x-2

$x^2-x+0{,}25-2{,}25$

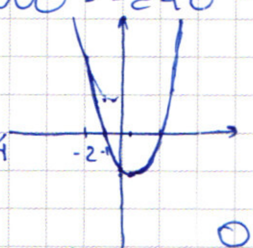
$(x-0{,}5)^2-2{,}25=0$

$(x+10)(x-4)$

$(x+10)\left(\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} - (x-4)\right) = 0$

$640+200-1000=-240$

$x=-10$ не подходит



$\sqrt{x^3-64x+200} = 2\sqrt{2}(x-4)$ $\quad x \geq 4$

$x^3-\cancel{64x}+200 = 8x^2-\cancel{64x}+128$

$x^3-8x^2+72=0$ $\quad \cancel{16} \quad 64-8\cdot16+72$

$216-8\cdot36+72=0$ $\quad 136-128$

$-2\cdot36+72=0$

	1	-8	0	72
6	1	-2	-12	0

$x^2-2x-12=0$

$D=4+48=52$

$\frac{2+\sqrt{52}}{2} = 1+\sqrt{13}$

Ответ: $6;\ 1+\sqrt{13}$.

$(x^2+x+2)(4x^2+x+2)\geq0$

$x<-2$

$(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;\infty)$.

4. $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq0$

$\cancel{4x^2-5x+1}$

x^2-5x+4

$4x^4-5x^2|x+2|+(x+2)^2\geq0$

$x=1$

$x=4 \quad 5<\sqrt{33}<6$

$D=1+32=33$

$\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$\cancel{y=|x+2|}$ $\quad a=|x+2|$

$b=x^2$

$4b^2-5ab+a^2\geq0$

$(a-b)(a-4b)\geq0$ $\quad (x^2-|x+2|)(4x^2-|x+2|)\geq0$

$x\geq-2:$

$(x^2-x-2)(4x^2-x-2)\geq0$ $\quad (x-2)(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x+\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\geq0$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$-2 \quad -1 \quad \frac{1-\sqrt{33}}{8} \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8} \quad 2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. $\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$

$y=-x-8$

$y=x-8$

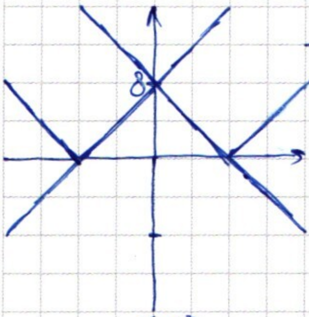
$64+49=113$ $\quad$ $225+64=289$

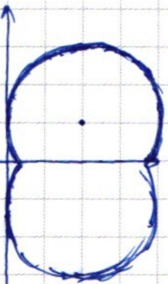
$(|x|-x_0)^2+(|y|-y_0)^2=r^2$

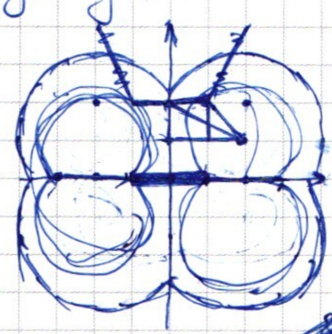
$|y+x+8|+|y-x+8|=16$

$64+49=113$

$64+225=289$







$64+49=$

$64+225=$

$a\in\left((8^2+15^2);(8^2+7^2)\right]$

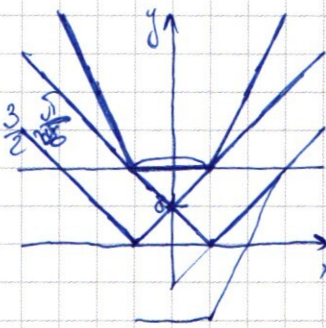
$a\in[113;289)$

$\boxed{|y+x+8|+|y-x+8|=16}$

5. $(-4\sqrt2;$

$(4\sqrt2, \frac{\sqrt{11}}{2})$ $\quad$ $\sqrt{17} = 6$ $\quad$ $\frac{6\sqrt{11}}{4\sqrt8}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt8}$

$5\sqrt5$ $\quad$ $2, -4\sqrt2$

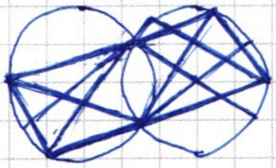


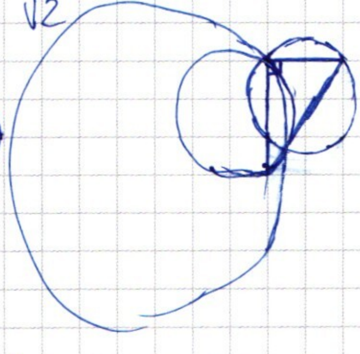
6. а)

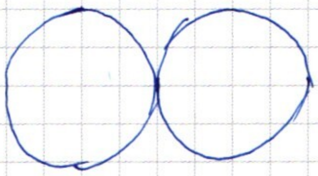
$A\in FD$

$ACD=17^2=\frac{17}{2}\cdot 34$

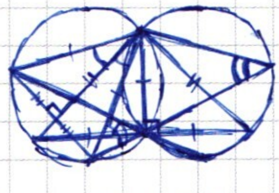
$\frac{13}{5}$ $\quad$ $\frac{34}{\sqrt2}=17\sqrt2$

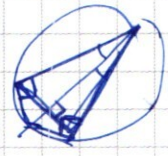






3





$\frac12\cdot24\cdot34$

$\frac12\cdot24\cdot24$

$\cancel{\frac12\cdot24}$ $\quad$ $12\cdot34-12\cdot24=120$