МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $S = b_1 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1}$ (q – знаменатель прогрессии)

$S_2 = 10S = S_2' + S$, где $S_2' = 49(b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000})$. $\Rightarrow S_2' = 9S$

$S_2' = 49 b_1 q^2 \cdot \frac{(q^3)^{1000}-1}{q^3-1}$, т.к. у этой прогрессии первый член $b_1 q^2$, знаменатель – q^3, а количество членов – 1000

$S_2' = 49 b_1 q^2 \cdot \frac{q^{3000}-1}{(q-1)(q^2+q+1)} = b_1 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1} \cdot \frac{49q^2}{q^2+q+1} = S \cdot \frac{49q^2}{q^2+q+1} = 9S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{49q^2}{q^2+q+1} = 9 \Leftrightarrow 49q^2 = 9q^2 + 9q + 9 \Leftrightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80}$. Все члены $>0 \Rightarrow q > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = \frac{9+39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$

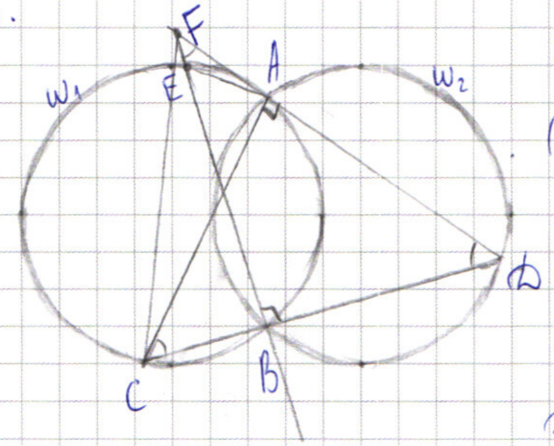
$S_3 = S + S_3'$, где $S_3' = b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000}$

$S_3' = b_1 q \cdot \frac{(q^2)^{1500}-1}{q^2-1} = b_1 q \cdot \frac{q^{3000}-1}{(q-1)(q+1)} = b_1 \cdot \frac{q^{3000}-1}{q-1} \cdot \frac{q}{q+1} = S\frac{q}{q+1}$, т.к. у этой прогрессии первый член равен $b_1 q = b_2$, знаменатель – q^2, а количество членов – $\frac{3000}{2} = 1500$.

$S_3 = S + S_3' = S + S \cdot \frac{q}{q+1} = S\left(1 + \frac{q}{q+1}\right) = S \cdot \frac{2q+1}{q+1} = S \cdot \frac{\frac{6}{5}+1}{\frac{3}{5}+1} = S \cdot \frac{6+5}{3+5} = S \cdot \frac{11}{8}$

Ответ: сумма увеличится в $\frac{11}{8}$ раз

№6.



а) По теореме синусов:

(для ω_2) $\frac{AB}{\sin\angle D} = 2R$, $\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$ (для ω_1) $\Rightarrow \sin\angle D = \sin\angle C \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C = \angle D = 45°$

$BD = BF \Rightarrow \angle BFD = 90° - \angle D = 45° \Rightarrow F \in AD$

Посмотрим на ω_1. Докажем, что $F \in \omega_1$

Допустим, это не так.

~~$\cup AB = 2\angle C = 90°$~~. Пусть $\omega_1 \cap BF = E$. Тогда

$\angle BEA = \angle C = 45°$, т.к. они опираются на одну $\cup AB$. $\Rightarrow \angle BEA = \angle BFA = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow FA \parallel EA$, но $FA \cap EA = A \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow F \in \omega_1$.

Тогда на $\cup FC$ опирается ~~уг~~ $\angle FBC = 90° \Rightarrow FC$ — диаметр $\Rightarrow FC = 2R = 10$.

Ответ: $CF = 10$

б) Пусть $\angle CFB = \alpha$, $\angle CFA = \gamma$, $AF = x$, $S_{ACF} = S$.

$BC = 6$, $CF = 10 \Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8$ по теореме Пифагора

$S = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot x \cdot \sin\gamma$

$x = CF\cos\gamma \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot CF^2 \cos\gamma \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 100\cos\gamma\sin\gamma = 50\cos\gamma\sin\gamma$

$\gamma = \alpha + 45°$. $\cos\alpha = \frac{BF}{CF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{BC}{CF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\sin\gamma = \sin(\alpha + 45°) = \sin\alpha\cos45° + \cos\alpha\sin45° = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

$\cos\gamma = \cos(\alpha + 45°) = \cos\alpha\cos45° - \sin\alpha\sin45° = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$S = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \cancel{50} \cdot \frac{7 \cdot 2}{\cancel{100}} = 7$

Ответ: $S_{ACF} = 7$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

1) $x\geq 2$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

Разложим на ~~мн~~ множители с помощью метода неопределенных коэфф.

$(2x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=2x^4+ax^3+bx^2+2cx^3+acx^2+bcx+2dx^2+adx+bd=$

$=2x^4+(a+2c)x^3+(b+ac+2d)x^2+(bc+ad)x+bd=2x^4-3x^3+7x^2-4x+4$

$\begin{cases} a+2c=-3 & (1)\\ b+ac+2d=7 & (2)\\ bc+ad=-4 & (3)\\ bd=4 & (4)\end{cases}$ Пусть $b=d=2$ ((4) выполняется). Подставим в (3):

$2c+2a=-4 \Leftrightarrow a+c=-2$. Вычтем из (1) получ. равенство: $c=-1 \Rightarrow a=-1$. Подставим в (2) все:

$2+1+2\cdot 2=2+1+4=7$ — верно. $\Rightarrow$ Решение системы:

$a=-1,\ b=2,\ c=-1,\ d=2$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0 \Leftrightarrow \overset{(1)}{(2x^2-x+2)}\overset{(2)}{(x^2-x+2)}\geq 0$

$\left.\begin{array}{l}(1):\ D=1-16=-15<0 \Rightarrow 2x^2-x+2>0\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ (2):\ D=1-8=-7<0 \Rightarrow x^2-x+2>0\quad \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow (2x^2-x+2)(x^2-x+2)\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Тогда в п. 1) имеем: $x\in[2;+\infty)$

2) $x<2$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0$

Отгадывается корень $x=1$. Разделим $2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$ на $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 & x-1\\ \underline{2x^4-2x^3} & 2x^3+5x^2-4\\ 5x^3-5x^2 & \\ \underline{5x^3-5x^2} & \\ -4x+4 & \\ \underline{-4x+4} & \\ 0 & \end{array}$$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3+5x^2-4) \geq 0$

У $2x^3+5x^2-4$ отгадывается корень $x=-2 \Rightarrow$ Разделим $2x^3+5x^2-4$ на $x+2$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+5x^2-4 & x+2 \\ \underline{2x^3+4x^2} & \overline{2x^2+x-2} \\ x^2 & \\ \underline{x^2+2x} & \\ -2x-4 & \\ \underline{-2x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(\overset{(*)}{2x^2+x-2}) \geq 0$

$(*)$: $D = 1+16 = 17 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$-2 \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \quad \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad 1$

При $x<2$ имеем $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$.

Объединяя ответы из обоих пунктов: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

N1. В числе могут быть только цифры 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7.

К-во чисел из 2, 2, 5, 5 = 6 (2255, 2525, 2552, 5225, 5252, 5522).

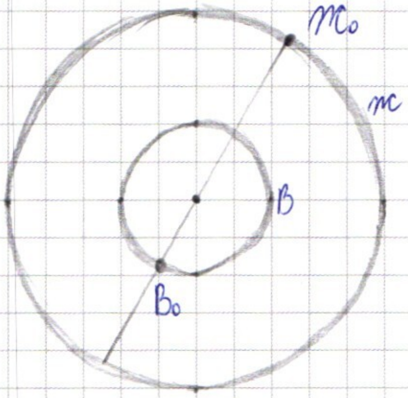
Теперь будем считать, что надо где-то между этими цифрами вставить 7: это можно сделать 5 способами (между и по краям). Итого, чисел из 2, 2, 5, 5, 7 30. Теперь надо где-то из 6 мест (между и по краям) поставить 3 единицы. Это можно сделать $C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{4\cdot5\cdot6}{2\cdot3} = 20$ способами $\Rightarrow$ Итого из цифр 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1 можно собрать $30\cdot20 = 600$ чисел.

Из др. цифр число состоять не может, т.к. другие множители 700 (10, 14 и т.д.) двух- и более значные.

Ответ: 600

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

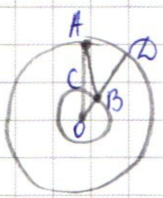


$(-2)^2+(-2\sqrt{7})^2 = 4+28=32=R_B^2 \Rightarrow R_B = 4\sqrt{2}$

$5^2+(5\sqrt{7})^2 = 25+175=200=R_ж^2 \Rightarrow R_ж=10\sqrt{2}$

$\upsilon_B = 2\upsilon_ж$ (В – водомерка, Ж – жук)

Кратчайшее расстояние – когда точки лежат на одной прямой с центром (по одну сторону от центра). Докажем.



Рассмотрим точки A и B. В $\triangle ABC$ $\angle C$ – тупой (В $\triangle OBC$ $OB=OC$ – как радиусы $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OCB=\angle OBC<90^\circ \Rightarrow \angle ACB = 180^\circ - \angle OCB > 90^\circ$).

Тогда AB лежит напротив большего угла ACB (больше, чем $\angle ABC$ напротив стороны AC) $\Rightarrow AB > AC$.

Заметим, что изначально В и Ж были на одной прямой с центром (прямая, прох. через центр – $y=kx$. $5\sqrt{7} = k\cdot 5 \Rightarrow k=\sqrt{7}$, $-2\sqrt{7} = k\cdot(-2) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ обе точки на одной прямой с центром).

Введем понятие угловой скорости $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (угол, на кот. повернулось насекомое за единицу времени).

$\upsilon = \omega\cdot R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R}$

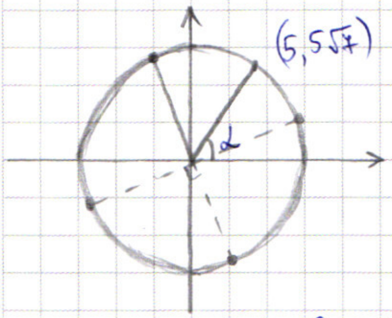
$$\left.\begin{aligned} \omega_B &= \frac{\upsilon_B}{R_B} = \frac{2\upsilon_ж}{4\sqrt{2}} = \frac{\upsilon_ж}{2\sqrt{2}} \\ \omega_ж &= \frac{\upsilon_ж}{R_ж} = \frac{\upsilon_ж}{10\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_B = 5\omega_ж$$

$\omega_{сб} = \omega_B - \omega_ж = 4 \cancel{ж}\, \omega_ж$ – угловая скорость сближения

В начальный момент $\Delta\varphi$ между насекомыми – π

$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{сб}} = \frac{\pi}{4\omega_ж}$. За это время Ж повернется на угол $\varphi = \Delta t\cdot\omega_ж = \frac{\pi}{4}$. – это будет первый раз, когда расстояние между ними наименьшее.

Теперь угол между ними $\Delta\varphi = 2\pi$. => В догонит Ж (~~или~~ $\Leftrightarrow$ расст. между ~~они~~ ними станет min ~~встретятся~~) через $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_б} = \frac{2\pi}{4\omega_ж} = \frac{\pi}{2\omega_ж}$. Ж за это время повернется на угол $\Delta t \cdot \omega_ж = \frac{\pi}{2}$. Потом еще 2 раза они „встретятся" в двух других точках, а потом придут в первую и будут встречаться в одних и тех же 4 точках. Найдем их координаты.



ур-е прямой – $y = kx \Leftrightarrow y = \operatorname{tg}\alpha\, x$

В начальном положении $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{7}$. К моменту первой встречи угол будет $\alpha + 45°$

$$\operatorname{tg}(\alpha+45°) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}45°} = \frac{\sqrt{7}+1}{1-\sqrt{7}} = \frac{8+2\sqrt{7}}{-6} = -\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

2 точки лежат на прямой $y = -\frac{4+\sqrt{7}}{3}x$, еще 2 – на перпендикулярной ей $y = \frac{3}{4+\sqrt{7}}x$. Найдем эти точки, зная, что $R_ж = 10\sqrt{2}$. Для $y = -\frac{4+\sqrt{7}}{3}x$:

$$x^2 + \left(-\frac{4+\sqrt{7}}{3}x\right)^2 = x^2 + \frac{23+2\sqrt{7}}{9}x^2 = \frac{32+2\sqrt{7}}{9}x^2 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{200\cdot 9}{32+2\sqrt{7}}} = \frac{30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}} \Rightarrow y_1 = -\frac{4+\sqrt{7}}{3}x_1 = \frac{-10\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{200\cdot 9}{32+2\sqrt{7}}} = \frac{-30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}} \Rightarrow y_2 = -\frac{4+\sqrt{7}}{3}x_2 = \frac{10\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}}$$

Для $y = \frac{3}{4+\sqrt{7}}x$:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4+\sqrt{7}}\right)^2 x^2 = x^2 + \frac{9}{23+2\sqrt{7}}x^2 = \frac{32+2\sqrt{7}}{(4+\sqrt{7})^2}x^2 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{200\cdot(4+\sqrt{7})^2}{32+2\sqrt{7}}} = \frac{10\sqrt{2}\cdot(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}} \Rightarrow y_3 = \frac{3}{4+\sqrt{7}}x_3 = \frac{30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{200\cdot(4+\sqrt{7})^2}{32+2\sqrt{7}}} = \frac{-10\sqrt{2}\cdot(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}} \Rightarrow y_4 = \frac{3}{4+\sqrt{7}}x_4 = \frac{-30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}$$

Ответ: $\left(\frac{30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}; -\frac{10\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}}\right)$, $\left(\frac{-30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}; \frac{10\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}}\right)$, $\left(\frac{10\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}}; \frac{30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}\right)$, $\left(\frac{-10\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}}; \frac{-30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x \geq 2$

$\cancel{2x^4} \quad 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$

~~32 − 24 − 20 − 8 + 4~~

$25 \times 7 = 175$

$z = y - 6$

$|z-x| + |z+x| = 12$

1) $z \geq x \Rightarrow z - x + z + x = 2z = 12 = \boxed{z = 6} \Rightarrow y = 12$

a) $z + x \geq 0 \Rightarrow$

| 7 – сделать перебор

$36 \times 4 = 144$

39×39: $351 + 117\_ = 1521$

1
2 4
3
4 6
5 5
6 6
7

(4). $x - 2 = y$

$y^4 = (x-2)^4 = (x^2-4x+4)^2 = x^4 + 16x^2 + 16 - 8x^3 - 32x + 8x^2$

$2y^4 + 16x^3$

$32 + 2\sqrt{7} = 7 + 25 + 2\sqrt{7} = (5+\sqrt{7})^2$

$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1}$

$S_2' = 49(b_3 + b_6 + \ldots + b_{3000}) = 49 b_1 q^2 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = 49 b_1 q^2 \cdot \frac{q^{3000}-1}{(q-1)(q^2+q+1)}$

$S_2 = S_n + S_2' = b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1} + 49 b_1 q^2 \frac{q^{3000}-1}{(q-1)(q^2+q+1)} = b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1}\left(1 + \frac{49q^2}{q^2+q+1}\right) =$

$= b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1} \cdot \frac{50q^2+q+1}{q^2+q+1}$

$\frac{S_2}{S_n} = 10 = \frac{50q^2+q+1}{q^2+q+1} \cdot \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} \cdot \frac{q-1}{b_1(q^{3000}-1)} = \frac{50q^2+q+1}{q^2+q+1} = 10$

$50q^2 + q + 1 = 10q^2 + 10q + 10 \Leftrightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 1440 = 1521 = 9 \cdot 169 = (3 \cdot 13)^2 = 39^2 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{9 \pm 39}{80} - \frac{48}{80} = 0,6 = \frac{3}{5}$

$S_3' = b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000} = b_1 q \cdot \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = b_1 q \frac{q^{3000}-1}{(q-1)(q+1)}$

$S_3 = S_n + S_3' = b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1} + b_1 q \frac{q^{3000}-1}{(q-1)(q+1)} = b_1 \frac{q^{3000}-1}{q-1}\left(1 + \frac{q}{q+1}\right) = S_n \frac{2q+1}{q+1}$

$\frac{2q+1}{q+1} = \frac{\frac{6}{5}+1}{\frac{3}{5}+1} = \frac{6+5}{3+5} = \frac{11}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

7 5 5 2 2 1 1 1

~~0 | 0 0 |~~

1 1 1 2 2 5 5 7

1 1 1 2 2 5 7 5

1 1 1 2 2 7 5 5

1 1 1 2 5

$$\cancel{100}\sqrt{\frac{7400-2500}{74}}=\sqrt{\frac{4900}{74}}=\frac{70}{\sqrt{74}}=AC$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot\frac{50}{\sqrt{74}}\cdot\frac{70}{\sqrt{74}}=\frac{3500}{2\cdot 74}=\frac{875}{37}$$

$\gamma=\alpha+45°$. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$$\sin\gamma=\sin\alpha\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7\sqrt2}{10}$$

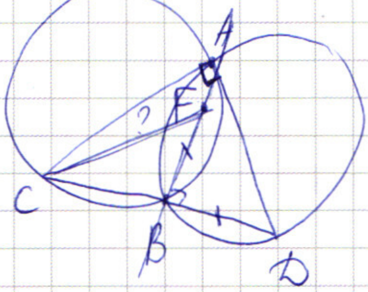
$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos45°-\sin\alpha\sin45°=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{10}$$

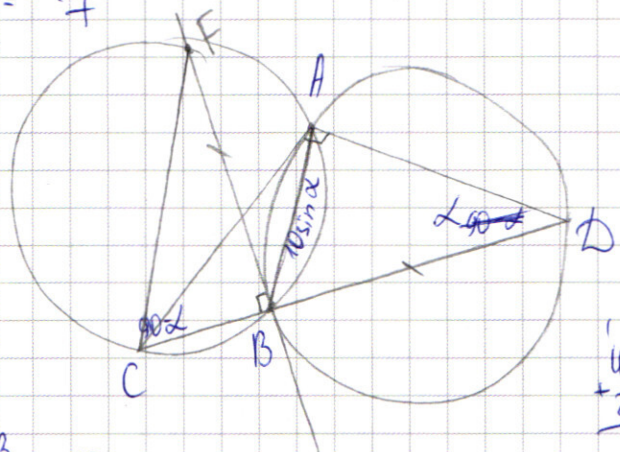
(7.1) $\begin{cases}|y-6-x|=0\\|y-6+x|=12\end{cases}$ $x=y-6$ $|2x|=12$ $x=\pm6\Rightarrow y=12,\ 0$

$4+36=40$ $196+36=$ много $=232$

$R=5$

$$S=\cancel{50}\cdot\frac{7\sqrt2}{\cancel{10}}\cdot\frac{\sqrt2}{10_2}=7$$





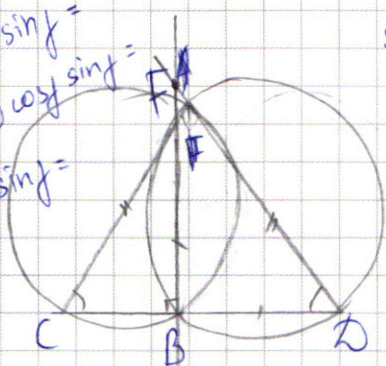
$$\frac{AB}{\sin\alpha}=10\Rightarrow AB=10\sin\alpha$$

$$\frac{AB}{\sin(90-\alpha)}=\frac{AB}{\cos\alpha}=10\Rightarrow AB=10\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\cos\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha=45°$$

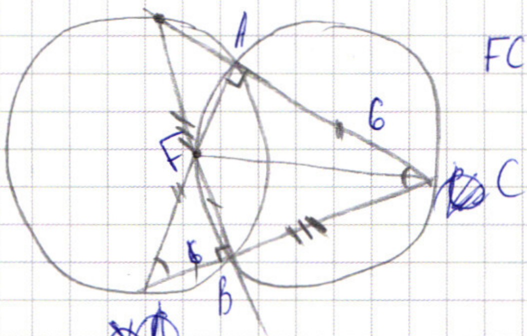
$49+25=74$; 37; 2

$FC=10$

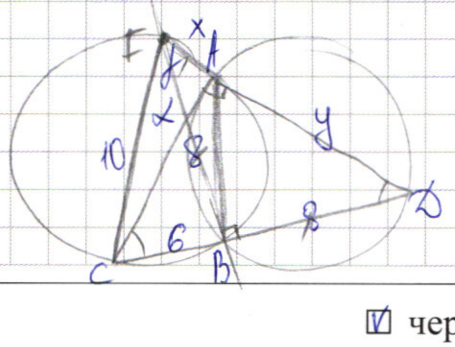
$$S=\frac{1}{2}\cdot10\cdot x\cdot\sin\gamma=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot10\cdot10\cos\gamma\sin\gamma=$$
$$=50\cos\gamma\sin\gamma=$$



$x=10\,\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\gamma$



$\angle AFB=135°$ $\angle AFB+\angle C=180°$



$x(x+y)=100$

$y(x+y)=196$

$\frac{y}{x}=\frac{196}{100}=\frac{49}{25}$

$y=\frac{49x}{25}$

$x\cdot\frac{74}{25}x=100\Rightarrow x^2=\frac{2500}{74}$ $x=\frac{50}{\sqrt{74}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=-4: \quad -64+16+80 \qquad 32-24+28-8+4=32$

1) $2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

$\cancel{2x^4}\quad (2x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=2x^4+ax^3+bx^2+2cx^3+acx^2+bcx+2dx^2+adx+bd=$

$=2x^4+(a+2c)x^3+(b+ac+2d)x^2+(bc+ad)x+bd$

$\begin{cases} a+2c=-3 \\ b+ac+2d=7 \\ bc+ad=-4 \\ bd=4 \end{cases}$ 1) $b=d=2$: $a+c=-2 \quad a+2c=-3 \quad a=-1,\ c=-1$

$ac=1 \qquad b=2 \quad d=2$

$2x^4-x^3+2x^2-2x^3+x^2-2x+4x^2-2x+4=2x^4-3x^3+7x^2-4x+4$

$D=1-8=-7<0$

$(2x^2-x+2)(x^2-x+2)\geq 0 \iff 2x^2-x+2\geq 0$ – это всегда правда $\Rightarrow$

$D=1-16=-15<0 \qquad \Rightarrow x\in[2;+\infty)$

$-2: -16+20-4$

2) $2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0 \qquad x=1$ подходит:

$(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geq 0$

$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geq 0$

$D=1+16=17$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)\geq 0$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$-2 \quad \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \quad \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad 1 \quad 2$

$x\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4};\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right]\cup[1;+\infty)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 & x-1 \\ \hline 2x^4-2x^3 & \cancel{2x^3-x^2-6x-10} \\ \quad 5x^3-5x^2 & 2x^3+5x^2-4 \\ \quad \cancel{x^3+x^2} & \\ \quad \cancel{-6x^2-4x} & \\ \quad \cancel{-6x^2+6x} & \\ \quad \cancel{-10x+4} & \\ \quad 5x^3-5x^2 & \\ \quad\quad -4x+4 & \\ \quad\quad -4x+4 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \gtrless -2$

$1+\sqrt{17} \lessgtr 8$

$\sqrt{17} \lessgtr 7$

$(2x^3+5x^2-4)(x-1)=2x^4+5x^3-4x-2x^3-5x^2+4=2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$

2 2 5 5 5 5 2 2
2 5 2 5 2 5 5 2
5 2 2 5 5 2 5 2
2 5 5 2 5 2 2 5
5 2 5 2 2 5 2 5
5 5 2 2 2 2 5 5

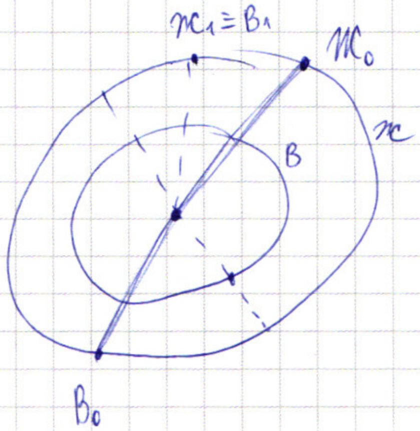
$$\begin{array}{l|l} 2x^3+5x^2-4 & x+2 \\ \hline 2x^3+4x^2 & 2x^2+x-2 \\ \quad x^2 & \\ \quad x^2+2x & \\ \quad\quad -2x-4 & \\ \quad\quad -2x-4 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(-2)^2 + (-2\sqrt{7})^2 = 4 + 28 = 32 = R_1^2 \Rightarrow R_1 = 4\sqrt{2}$

$5^2 + (5\sqrt{7})^2 = 25 + 175 = 200 = R_2^2 \Rightarrow R_2 = 10\sqrt{2}$



$v_B = 2v_ж = 2v$

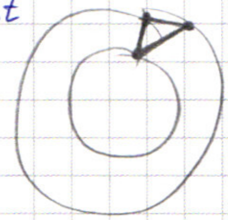
$v = \omega R$

$\omega_B = \frac{v_B}{R_1} = \frac{2v}{4\sqrt{2}} = \frac{v}{2\sqrt{2}}$

$\omega_ж = \frac{v_ж}{R_2} = \frac{v}{10\sqrt{2}}$

$\omega_B = 5\omega_ж$

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

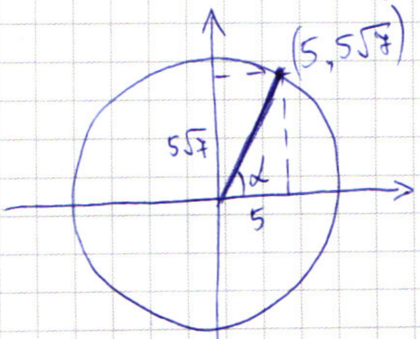


$\omega_{сб} = 4\omega_ж$

$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{сб}} = \frac{\pi}{4\omega_ж}$ А жук пока пройдет $\omega_ж \cdot \Delta t = \frac{\pi}{4}$

Жук пройдет $\frac{\pi}{4}$ и расстояние станет π (между ними)

пройдет еще $\frac{\pi}{4}$ и они встретятся $\Rightarrow$ до встречи он будет проходить $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 4 точки, получ. одна из другой поворотом на $\frac{\pi}{2}$



$tg\,\alpha = \sqrt{7}$ $\quad tg(\cancel{\alpha}\,\frac{\pi}{4}) = 1$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$tg(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{tg\alpha + 1}{1 - tg\alpha} = \frac{\sqrt{7}+1}{1-\sqrt{7}} = \frac{8+2\sqrt{7}}{-6} = -\frac{4+\sqrt{7}}{3}$

$x^2 + \left(-\frac{4+\sqrt{7}}{3}x\right)^2 = x^2 + \frac{23+2\sqrt{7}}{9}x^2 = \frac{32+2\sqrt{7}}{9}x^2 = \cancel{10\sqrt{}}\ 200$

$\sqrt{16+\sqrt{7}} = \frac{5+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$x_1 = \sqrt{\frac{800\cdot 9}{2(16+\sqrt{7})}} = \frac{30}{\sqrt{16+\sqrt{7}}} \Rightarrow y = \frac{-(4+\sqrt{7})\cdot 30}{\sqrt{16+\sqrt{7}}}$

$x_2 = \frac{-30}{\sqrt{16+\sqrt{7}}}, \quad y = \frac{30(4+\sqrt{7})}{\sqrt{16+\sqrt{7}}}$

$x^2 + \left(\frac{3}{4+\sqrt{7}}x\right)^2 = x^2 + \frac{9}{23+2\sqrt{7}}x^2 = \frac{32+2\sqrt{7}}{23+2\sqrt{7}}x^2 = 200$

$x_3 = \sqrt{\frac{200\cdot \cancel{23+2\sqrt{7}}\,(4+\sqrt{7})^2}{32+2\sqrt{7}}} = \frac{10(4+\sqrt{7})}{\sqrt{16+\sqrt{7}}} \Rightarrow y = \frac{30}{\sqrt{16+\sqrt{7}}}$

$x_4 = \frac{-10(4+\sqrt{7})\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}, \quad y = \frac{-30\sqrt{2}}{5+\sqrt{7}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)