МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р

Работы без вложенного задания не проверяются.

√ 1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

√ 2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

√ 3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

√ 4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

√ 5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

√ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=(x+6)(x+4)\sqrt{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-6\\ x^3-4x+80>0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+4)\sqrt{2}=\sqrt{x^3-4x+80}\\ x>-4\end{cases}\end{array}\right.$$

$-16<0>0$ $-16 0 > 0$ – прот-е

$x\neq-6$

$$2x^2+16x+32=x^3-4x+80$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

$x_1=4$ по схеме Горнера:

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

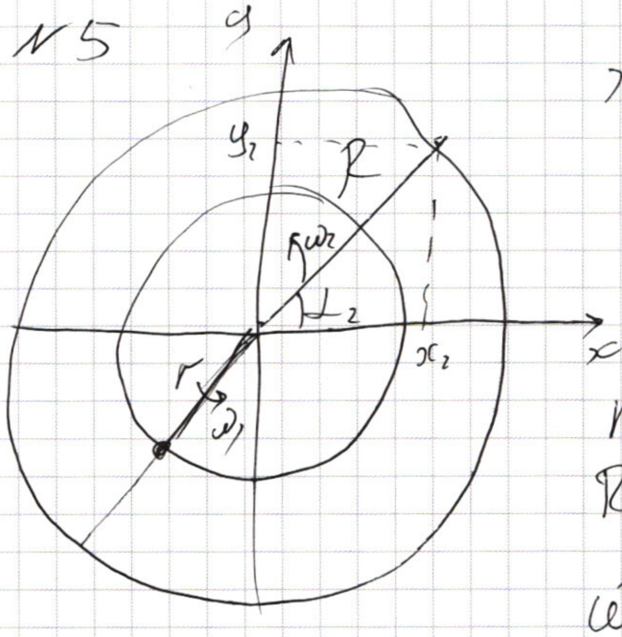
$$x=-1\pm\sqrt{13}$$

$$-1-\sqrt{13}<4$$

Ответ: $x=4;\ \sqrt{13}-1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5



$x_2 = R\cos(\alpha_2 + \omega_2 t)$

$y_2 = R\cdot\sin(\alpha_2 + \omega_2 t)$

$\omega_{отн} = \omega_1 - \omega_2$

$r\omega_1 = v_1 \quad v_1 = 2v_2$

$R\omega_2 = v_2$

$\omega_1 = 2\omega_2 \cdot \frac{R}{r}$

$\omega_{отн} = \omega_2\left(\cancel{1-\frac{2R}{r}}\ \frac{2R}{r} - 1\right) =$

$= \omega_2\left(\frac{2R-r}{r}\right)$

Кратчайшее расстояние между ними, когда водомерка и жук находятся на одном радиус-векторе:

$\omega_{отн}\cdot t = \alpha_0$

α_0 – угол между ними в начальный момент времени

$\omega_2 t = (\alpha_0^{+2\pi n)} \cdot \frac{r}{2R-r}$

$x_2 = R\cdot\cos\left(\alpha_2 + \alpha_0\frac{r}{2R-r}\right)$

Заметим, что тангенсы первоначальных углов $\frac{-2}{-2\sqrt{7}} = \frac{5}{5\sqrt{7}}$. Значит они лежат на одном диаметре, но по разные стороны от центра. $\alpha_0 = \pi$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$700 = 2 \cdot 350 = 2^2 \cdot 175 = 2^2 \cdot 5 \cdot 35 = 2^2 5^2 7 \cdot 1^n$, где $n \in \mathbb{Z}$

Пусть есть число:

$\overline{a_1 a_2 \ldots a_8}$

$\prod_{i=1}^{8} a_i = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1^n$

$a < 10$

Рассмотрим, какие a возможны:

$a = 2, 5, 7, 1, 4$

$a \neq 10, 14, 35, \ldots$ т.к. $a < 10$

Значит в числе присутствуют цифры из двух комплектов

1) $2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1$

2) $4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1$

$S = S_1 + S_2$

$S_1 = \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3} =$ $\qquad S_2 = \frac{8!}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3} =$

$S = \frac{8!}{3 \cdot 2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{8!}{4} = \frac{720 \cdot 7 \cdot 8}{4} = 1440 \cdot 7 = 17080$

Ответ: 17080

№ 2

$b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$

$b_i = b_1 \cdot q^{i-1}$

$b_1, b_1 q^1, b_1 \cdot q^2, b_1 \cdot q^3, b_1 \cdot q^4, \ldots, b_1 \cdot q^{2999}$

$b_1 \sum_{i=0}^{2999} \cdot q^i = S$

$b_1 \cdot \sum_{i=1}^{1000} 50 q^{3i-1} = \cancel{8} \cancel{5}0 S$

$b_1 \cdot \sum_{i=1}^{1500} q^{2i-1} = ? = N$

Пусть есть три мн-ва A, B, C

A - все члены посл-ти

B - кратные трем

C - кратные двум

$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \underbrace{q + q^2 + q^4}_{N} + \underbrace{\ldots + 1 + q^3}_{\frac{N}{q}} + \ldots$

$S = N + \frac{N}{q}$

$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \cancel{q+} \underbrace{q^2 + q^5}_{\frac{\cancel{1}0 S}{50}} + \ldots + \underbrace{q^1 + q^4}_{\frac{\cancel{1}0 S}{q 50}} + \ldots + \underbrace{1 + q^3}_{\frac{\cancel{1}0 S}{q^2 50}}$

~~$50 S - 1 \cdot \frac{50 S}{q}$~~

$\frac{S}{5} + \frac{S}{5q} + \frac{S}{5q^2} = S$

$S = N + \frac{N}{q}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

1) $x<2$

$2x^4+3x^3 \cancel{+6x} -5x^2-4x+4\geq 0$

при $x=1$ 0

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 & x-1 \\ \hline -\;2x^4-2x^3 & 2x^3+5x^2-4 \\ \quad 5x^3-5x^2 & \\ -\;5x^3-5x^2 & \\ \quad 0-4x+4 & \end{array}$$

$f(x)=2x^3+5x^2+4$

$f'(x)=6x^2+10x-$

$f'(x)=0$

$x=0 \quad x=\frac{5}{3}$

$f(0)>0 \quad f(\frac{5}{3})>0$

Значит $f(x)$ имеет однорешение

x_0

$x\in(-\infty;x_0]\cup[1;2)$

Четкой проверкой $x_0=-2$

$x\in(-\infty;-2]\cup[1;2)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

2) $x \geq 2$

$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4$

$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$

Утверждение: $f(x)$ не имеет решений при $x \geq 2$.

Д-во: $f(x)$ не имеет решений, если $f'(x) \geq 0$ при $x \geq 2$ и $f(2) > 0$

$f'(x) \geq 0$, если $f'(2) \geq 0$ и $f''(x) \geq 0$ при $x \geq 2$

$f''(x) = 24x^2 - 18x + 14$

$24x^2 - 18x + 14 \geq 0$

$12x^2 - 9x + 7 \geq 0$

$D = 81 - 4 \cdot 7 \cdot 12 = 81 - 256 = -175$

$f''(x) > 0$ при любом x

$f'(2) = 64 - 36 + 28 - 4 = 52$

$f(2) = 32 - 24 + 28 - 8 + 4 = 32$

Это значит, что $f(x)$ не имеет решений при $x \geq 2$

Т.к. $f(2) > 0$, то $x \in [2; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$q^2+q+1=5q^2$$

$$4q^2-q-1=0$$

$$q=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{4}$$

По условию $q>0$

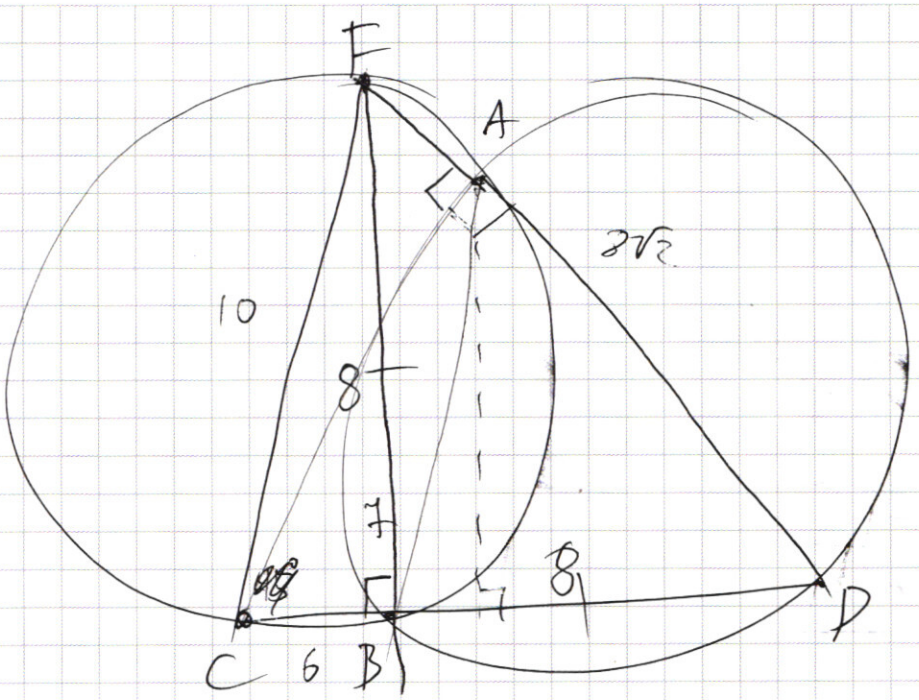
$$q=\frac{1+\sqrt5}{4}$$

$$N=\frac{S}{1+\frac{1}{q}}=S\cdot\frac{q}{q+1}=S\frac{\frac{1+\sqrt5}{4}}{\frac{1+\sqrt5}{4}+1}=$$

$$=S\cdot\frac{1+\sqrt5}{5+\sqrt5}=S\cdot\frac{(1+\sqrt5)(5-\sqrt5)}{25-5}=$$

$$=S\cdot\frac{5-\sqrt5+5\sqrt5-5}{20}=S\frac{\sqrt5}{5}=\frac{S}{\sqrt5}$$

Ответ: $\frac{S}{\sqrt5}$



$\angle FDB = 45^\circ$, т.к. $BD = BF$

$\frac{BA}{\sin\angle ADB} = 2r$

$AB = r\sqrt{2}$

$\sin\angle ADB = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\angle ADB = 45^\circ$

$F \in AD$

$\angle CBF = 90^\circ \Leftrightarrow CF = 2r$

б) $FB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$CD = 8 + 6 = 14$

$FD = 8\sqrt{2}$

$AC = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$

$AF = \sqrt{10^2 - 7^2 \cdot 2} = \sqrt{2}$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 7$

$\boxed{\text{Ответ: } 10;\ 7}$

~~$CA = \sqrt{14^2 - 8^2 \cdot 2} = 2\sqrt{49 - 32} = 2\sqrt{17}$~~

~~$S_{\triangle}$ $FA = \sqrt{10^2 - 4 \cdot 17} = 2 \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{2}$~~

~~$S = \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{17} =$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_2 = R\left(\cos\alpha \cos\frac{3\pi n r}{2R-r} - \sin\alpha \cdot \sin\frac{3\pi n r}{2R-r}\right)$

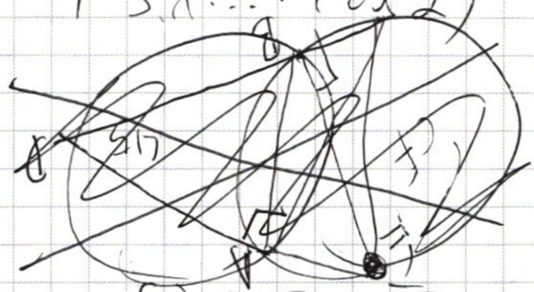
Рассмотрим возможные $\cos\frac{3\pi r}{2R-r}$

$r = \sqrt{2^2+2^2\cdot 7} = 4\sqrt{2}$

$R = \sqrt{5^2+5^2\cdot 7} = 10\sqrt{2}$

$y_2 = R\left(\sin\alpha\cos\frac{(2\pi n+\pi)r}{2R-r} + \sin\ldots\cos\alpha\right)$

$\frac{r}{2R-r} = \frac{4}{2\cdot 10-4} = \frac{1}{4}$



$\cos\frac{(\pi+2\pi n)}{4}$

При:

$n=1 \quad \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=2 \quad \cos = \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=3 \quad \cos = \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=4 \quad \cos = \frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Дальше тоже самое.

$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$\left(10\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}\right); 10\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}\right)\right)$

Ответ: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{7})\right)$

$\left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{7}}(1+\sqrt{7})\right)$

$\left(\frac{5}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{7}}(-1-\sqrt{7})\right)$ $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}(-1-\sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{7})\right)$

$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^{2|x-2|} + 4 \geq 0$

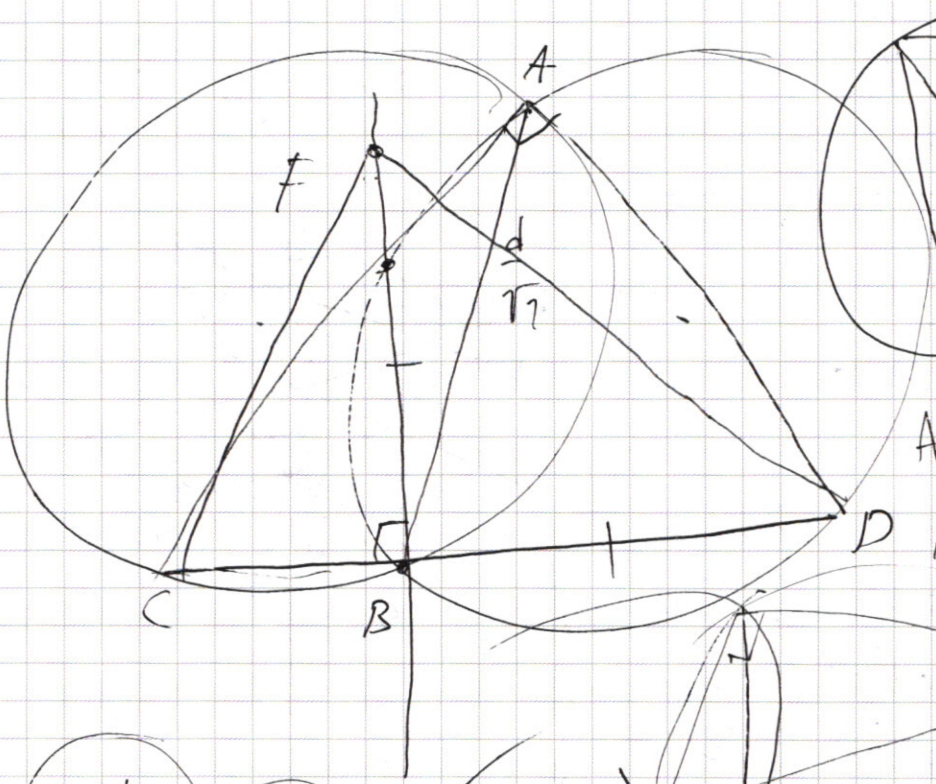
$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$

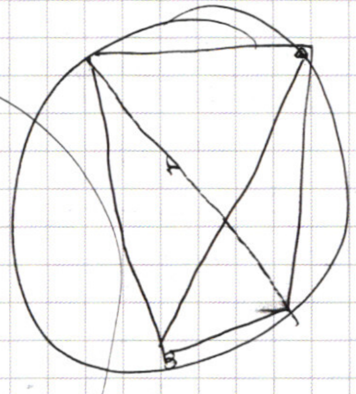
$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$

$\cancel{x \cdot (x-2)}$

$\frac{AD}{\sin\beta} = 2r$

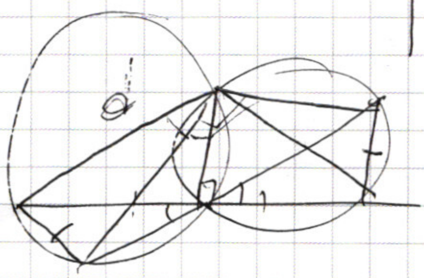
$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$

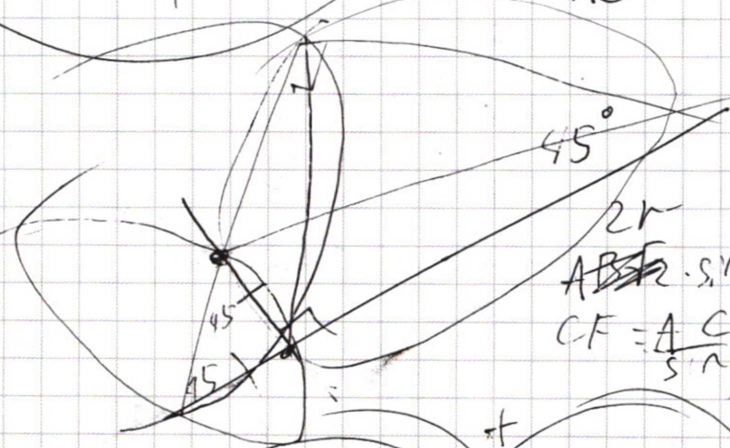




$AB = 2r\sin\beta$

AF AC =

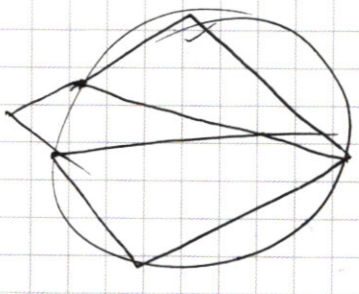


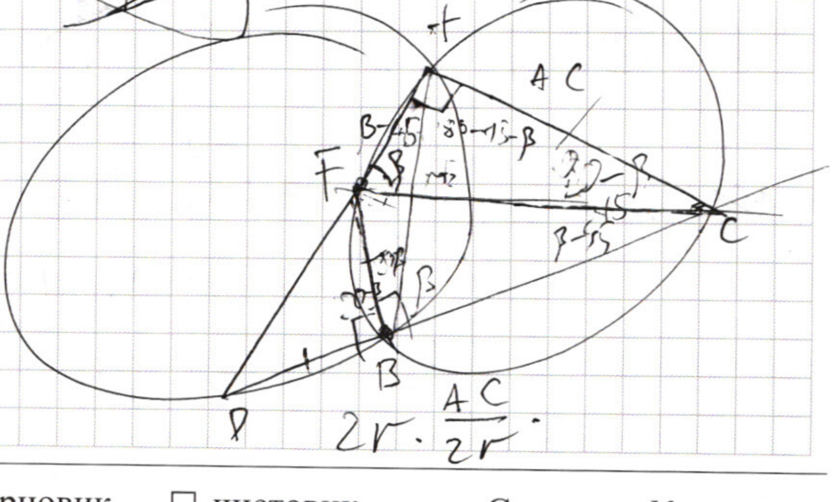


$2r$

$AB \cdot \sin\beta = AC$

$CF = \frac{AC}{\sin\beta} =$





$2r \cdot \frac{AC}{2r}$

☑ черновик ☐ чистовик

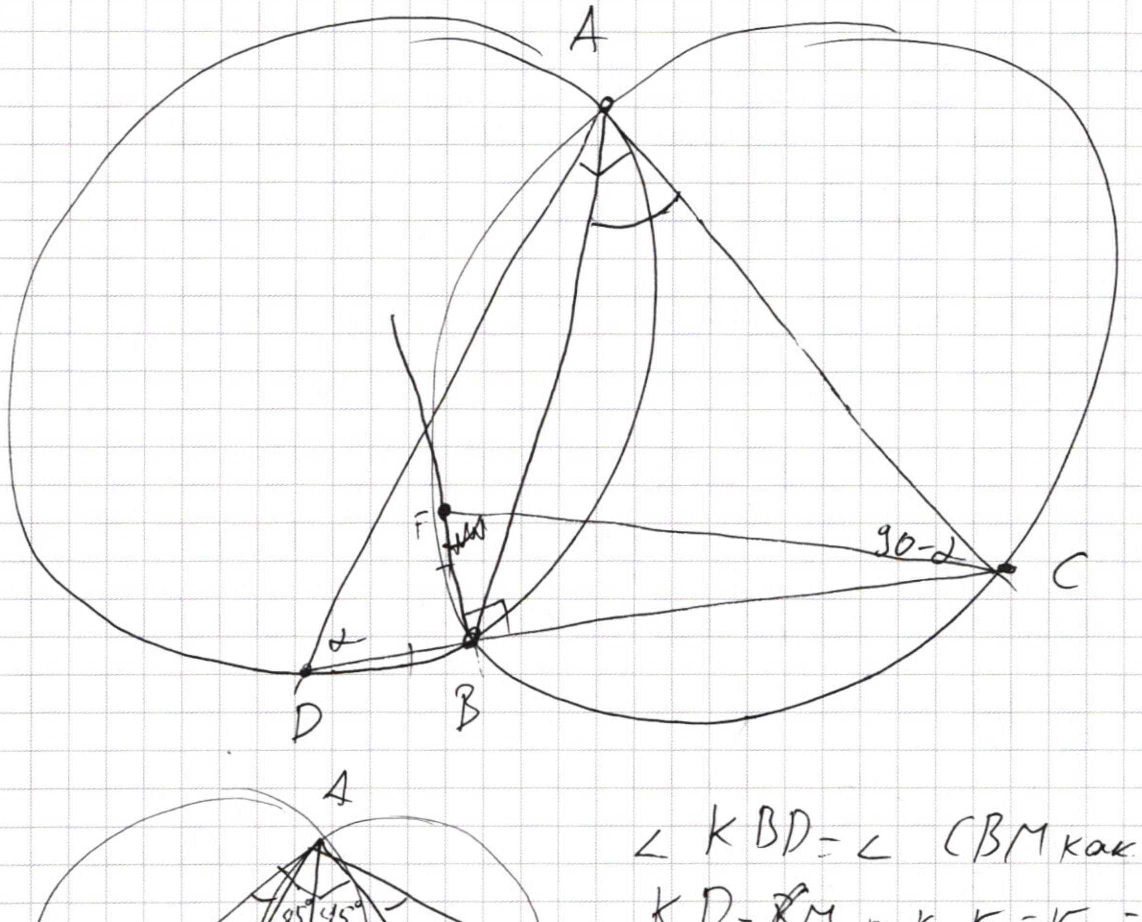
(Поставьте галочку в нужном поле)

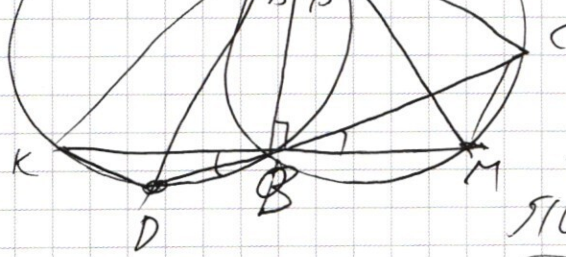
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6





$\angle KBD = \angle CBM$ как верт.

$KD = CM$, т.к. $r_1 = r_2 = r_u$

Поэтому $\angle KAD = \angle CAM$

По условию $\angle DAC = 90^\circ$

Т.к. $\angle KAD = \angle CAM$ $\angle KAM = 90^\circ$

Тогда $AB = r\sqrt{2}$

($\triangle KAM$ равнобедренный.)

$$2R = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)} \qquad \cos\alpha = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 45^\circ \qquad AC = AD = \frac{DC}{\sqrt{2}}$$

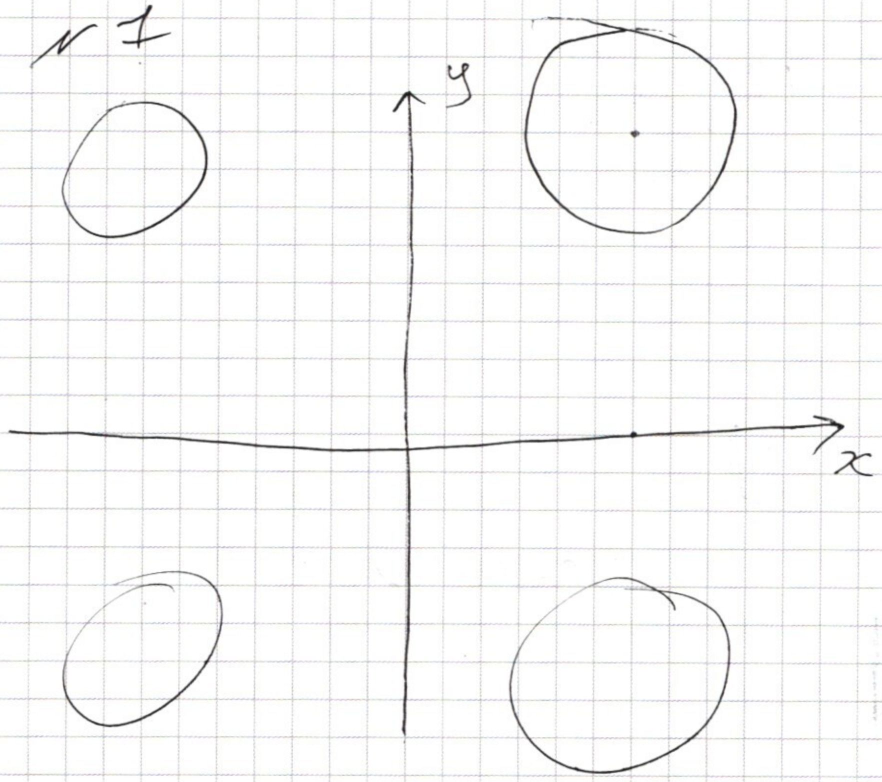
Обратим внимание на тр-к AFB.
т.к. $\angle DBF = 90°$, $DB = BF$, $\angle FDB = 45°$ (1)
$\angle FDB = \angle ADB$
Значит $F \in AD$
Также заметим, что $\angle CAD = DBF = 90°$
Пусть E точка пересечения BF с правой окр-ю, L ~~лев~~ ~~левой~~ .AD
CL - диаметр и CE диаметр, т.к(1)
$CL = CE$
Значит E совпадает с L.
Тогда AD и BF пересекаются на правой окружности в точке F.

~~$\angle ABC = \beta$~~
~~$AC = 2r\sin\beta$~~
$CF = 2r = 10$

б) $\triangle DFB \sim \triangle DCA$
$FB = \sqrt{FC^2 - BC^2} = 8$
$DC = 8 + 6 = 14$
$AC = \frac{DC}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$
$S = \frac{1}{2}AC \cdot FA = \frac{1}{2}AC \cdot \sqrt{10^2 - AC^2} = \frac{1}{2}7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7$
Ответ: $FC = 10$; $S = 7$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7



$|y-6-x|+|y-6+x|=12$

~~1) y = 6 + x~~

1) $y-6\geq x,\ y-6+x\geq 0$

$y-6=6$

$y=12$ $\cancel{x\leq 0}$ $x\in[-6;6]$

~~x ... x ≥ 6 ... x ≥ 6~~

2) $y-6\leq x$, $y-6+x\leq 0$

$y=0$ $\cancel{x\geq 0}$

$x\in[-6;6]$

3) $y-6 \geq x$ $\quad y-6 \leq -x$

$y-6-x \; -y+6 \; -x=12$

$x=-6$

$\cancel{y=\dots}$ $y \in [-12;12]$

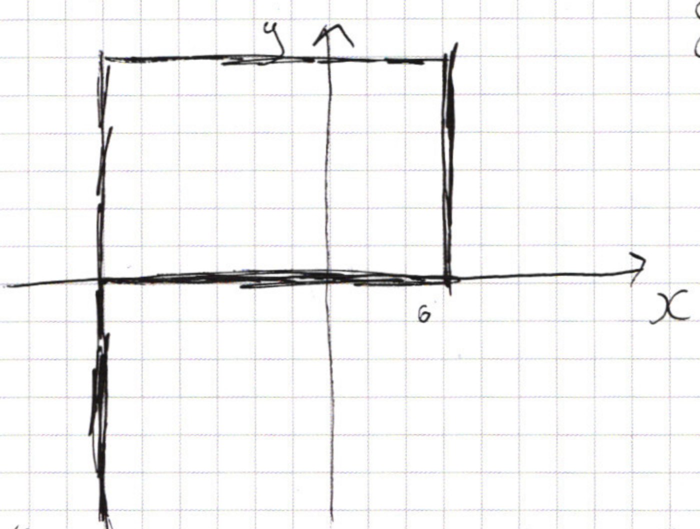
4) $y-6 \leq x \quad y-6 \geq -x$

$2x=12$

$x=6$

$\cancel{y}$ $y \in [0;12]$

Если $a \leq$



1) $y=12 \quad x \in [-6;6]$

$a \leq (6-8)^2+(12-6)^2=4+36=40$

$a \geq (0-8)^2+(|y|-6)^2 = 100$

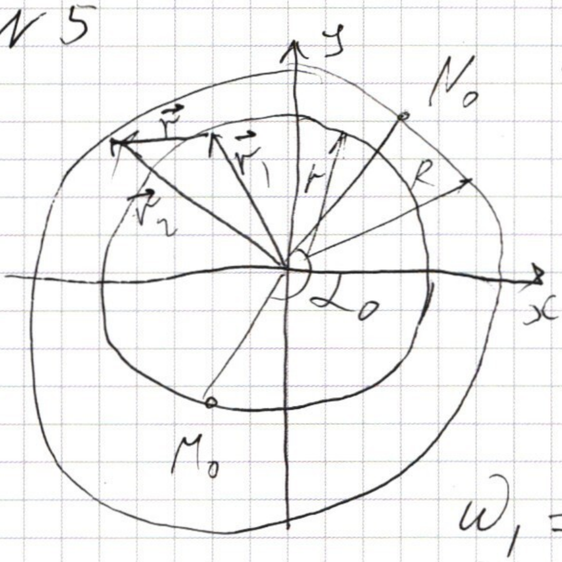
[illegible]

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5



$M_0(-2; -2\sqrt{7})$ $\quad v_1 = 2v_2$

$N_0(5; 5\sqrt{7})$

$R = \sqrt{5^2 + 5^2 \cdot 7} = 10\sqrt{2}$

$r = \sqrt{2^2 + 2^2 \cdot 7} = 4\sqrt{2}$

$\omega_1 = v_1 / r$

$\omega_2 = v_2 / R$

$\omega_{отн} = \omega_1 - \omega_2 = \frac{v_1}{r} - \frac{v_2}{R} = v_2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R}\right)$

Кратчайшее расстояние будет если ~~они~~ ~~на~~ угол между ними в полярных координатах равен нулю.

$\cancel{x_2 = \cos(\alpha + \omega t)}$

$\omega_{отн} \cdot t = \alpha_0$

$x_2 = R \cdot \cos(\alpha_0 + \omega_2 t)$

$\alpha_0 = v_2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R}\right) t$

$x_1 = r\cos(\alpha + \omega_1 t)$

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$v\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R}\right) t = \alpha_0 + 2\pi n$

$\vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$

$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+6)\sqrt{x^3-4x+80}=(x+6)(x+4)$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-6\\x^3-4x+80\geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x=-6\\ \cancel{\ldots}-160\geq 0\end{cases}\\ \cancel{\begin{cases}x=-4\\x^3-4x+80\geq 0\end{cases}} \quad \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^3-4x+80}=x+4\\x>-4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^3-4x+80}=x+4$$

$$x^3-4x+80=2x^2+16x+32$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

$$64-32-80+48=0$$

$$x_1=4$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-20x+48 & x-4 \\ \hline -\;x^3-4x^2 & x^2+2x-12 \\ 2x^2-20x & \\ -\;2x^2-8x & \\ -12x+48 & \\ -\;-12x+48 & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^2+2x-12=0$$

$$x=-1\pm\sqrt{13}$$

Ответ: $\boxed{x=4;\ \sqrt{13}-1}$

☑ черновик ☒ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)