

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим 4900 на простые множители
 $4900 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$.

У нас число восьмизначное. Т.е. не достаточно 2 цифры. Чтобы эти цифры не вышли на 4900, они должны быть 1.

Цифры, которые составляют восьмизначное число: 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7, 7.

Осталось расположить эти цифры. Если все цифры были различные, то ответ равен $8!$. Но т.к. каждая цифра повторяется 2 раза, ответ равен $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$.

$$= \frac{7!}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{7!}{2}.$$

№2.

Пусть b_n = n-ый член геом. прогрессии,

$$q = \frac{b_2}{b_1} \text{ и } b_1 = b.$$

$$\text{Тогда } S = \frac{b \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1}.$$

По условию мы знаем, что $5S = S + 39(b_2 + b_6 + \dots + b_{3000})$

Отсюда $4S = 39(b_3 + b_6 + b_9 \dots + b_{3000})$.

Т.к $b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = bq^2 + bq^5 + bq^8 \dots + bq^{2997}$
 равен $\frac{bq^2((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$

Следовательно, $4 \cdot \frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 39 \cdot \frac{bq^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$.

Т.к $b > 0$ и $q > 0 (q \neq 1)$, мы можем сократить b и $q^{3000} - 1$.

$$\Rightarrow \frac{4}{q-1} = \frac{39q^2}{q^3-1}$$

$$\frac{4}{q-1} = \frac{39q^2}{(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$4 \cdot (q^2 + q + 1) = 39q^2$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$(7q+2)(5q-2) = 0$$

Не подходит ($q > 0$) $q = \frac{2}{5}$.

Если все члены, стоящие на чётных местах увеличить в 3 раза, то

$$S \rightarrow S + 2(b_2 + b_4 \dots b_{3000})$$

$$2(b_2 + b_4 \dots b_{3000}) = 2 \cdot \frac{bq((q^2)^{1500} - 1)}{q^2 - 1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot \frac{bq(q^{3000}-1)}{q^2-1} = X \cdot S = X \cdot \frac{b(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$\frac{2q}{(q-1)(q+1)} = \frac{X}{q-1}$$

$$\frac{2q}{q+1} = X$$

$$\left(2 \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}+1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{4}{7}$$

S станет $S + \frac{4}{7}S = 1\frac{4}{7}S$.

Ответ: Сумма станет $1\frac{4}{7}S$.
~3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

О.Д.З

$$\sqrt{x^3 - 64x + 200} \geq 0$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{10}{2\sqrt{2}}\right) (\sqrt{x^3 - 64x + 200}) = (x+10)(x-4)$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right) (\sqrt{x^3 - 64x + 200}) = (x+10)(x-4)$$

$$(x+10) \left(\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 200}}{2\sqrt{2}} - (x-4) \right) = 0$$

$$-x-2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \mid x+2 \mid +4 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2(x+1)(4x-9) + 4(x+1) \geq 0$$

$$(x+1)(x^2(4x-9) + 4) \geq 0$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

$$32 - 36 + 4$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4 \geq 0$$

$$(x-2)(4x^2 - x - 2)$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$2 \pm \sqrt{1+32}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

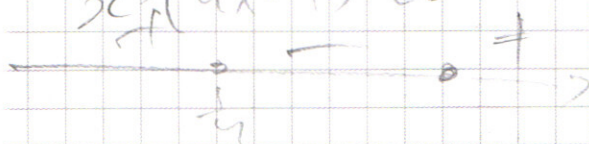
$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 \geq 5x^3$$

$$x^3(4x-5) \geq 0$$

$$11x^2 + 4x \geq 0$$

$$x(11x+4) \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x+10=0 \\ \frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} - (x-4) = 0 \end{cases}$$

Но x не может быть -10 по О.Д.З.
($-1000 + 640 + 200 < 0$)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} = x-4 \quad \{ (x \geq 4)$$

$$\frac{x^3-64x+200}{8} = x^2-8x+16 \quad (x \geq 4)$$

$$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$$

$$x^3-8x^2+72=0$$

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0$$

$$\cancel{x=6}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+48}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \quad (\sqrt{13} > 3) \\ x=1-\sqrt{13} \leftarrow \text{не подходит } (x \geq 4) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x=6 \\ x=1+\sqrt{13} \end{cases}$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0.$$

1). $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0.$$

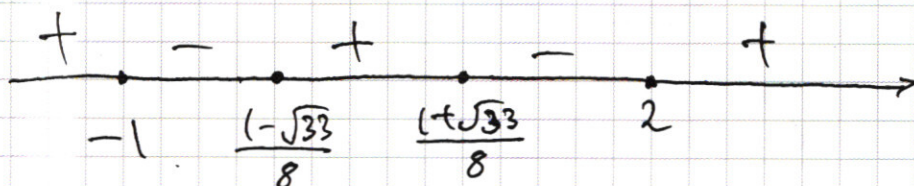
$$x^2(x+1)(4x-9) + 4(x+1) \geq 0.$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0.$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0.$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\right) \geq 0.$$

По методу интервала:



$$\Rightarrow x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty).$$

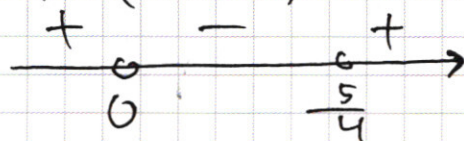
2). $x < -2$.

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0.$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0.$$

Рассмотрим когда $4x^4 < 5x^3$.

$$x^3(4x-5) < 0.$$



$$x \in (0; \frac{5}{4}).$$

Когда $11x^2 < 4x$.

$$x(11x-4) < 0.$$



$$x \in (0; \frac{4}{11}).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

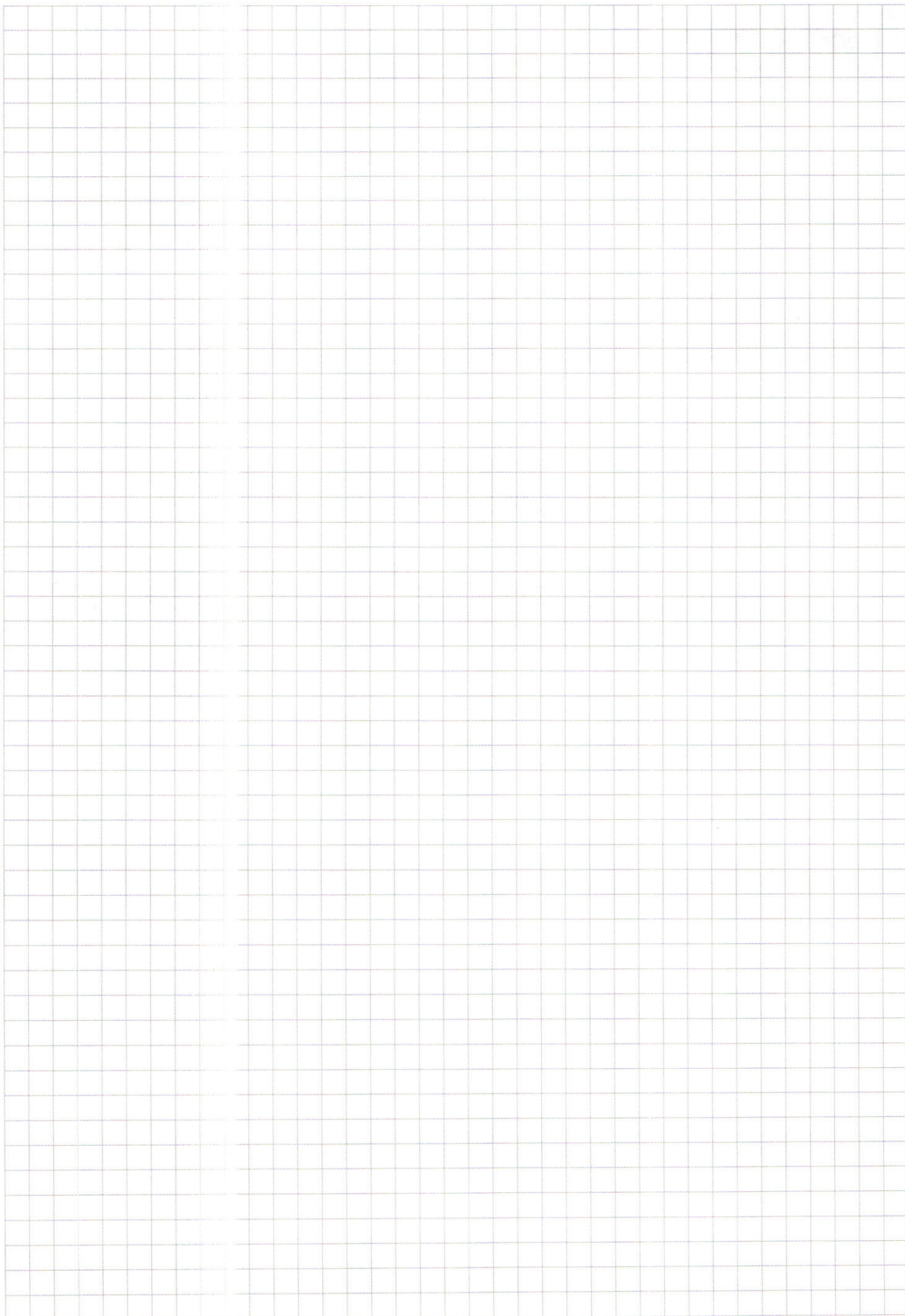
То есть если $x < -2$, ~~$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4$~~

$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4$ всегда
~~положительно~~ неотрицательна

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -2)$$

$$1) \text{ и } 2) \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Система имеет ровно 2 решения.

1) ~~$|y+x+8| \geq 0$ и $|y-x+8| \geq 0$~~

$$(|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a = \cos t$$

~~$$x^2 - 30|x| + 15^2 + y^2 - 16|y| + 64 = a$$~~

$$\text{Т.к. } a = \cos t \Rightarrow -(30|x| + 16|y|) = \cos t$$

1). Пусть $|y+x+8| \geq 0$ и $|y-x+8| \geq 0$

$$\text{Тогда } y+x+8 + y-x+8 = 16 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, x \in [-8; 8]$$

2). Пусть $|y+x+8| \geq 0$, а $|y-x+8| < 0$.

$$\Rightarrow y+x+8 - y+x-8 = 16$$

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow x = 8, y \in [-16; 0]$$

3). Пусть $|y+x+8| < 0$, а $|y-x+8| \geq 0$.

$$\Rightarrow -y-x-8 + y-x+8 = 16.$$

$$-2x = 16.$$

$$\begin{cases} x = -8. \\ y = 0 \in [-16; 0]. \end{cases}$$

4). Пусть $|y+x+8| < 0$ и $|y-x+8| < 0$.

$$-y-x-8 - y+x-8 = 16.$$

$$-2y = 32.$$

~~$$\begin{cases} y = -16. \\ x = 0. \end{cases}$$~~

$$y = -16.$$

$$x = [-8; 8].$$

То есть:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0. \\ x \in [-8; 8] \end{cases} \\ \begin{cases} x = 8 \\ y \in [-16; 0] \end{cases} \\ \begin{cases} x = -8 \\ y \in [-16; 0] \end{cases} \\ \begin{cases} y = -16. \\ x \in [-8; 8]. \end{cases} \end{array} \right.$$

Но при этом $30(x+16|y|) = \text{const}$ и имеет ровно 2 решения.

То есть ~~$x+y = \text{const}$~~ . $30(x+16|y|) = \text{const}$.

Смотря на промежутки, система имеет ровно 2 решения когда $y=0$ $\begin{pmatrix} y=0 \\ x=-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y=0 \\ x=8 \end{pmatrix}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~И~~ Когда $y = -16$: $\begin{cases} y = -16 \\ x = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -16 \\ x = -8 \end{cases}$

~~и~~ $y = 0$ $x = -8$ $y = 0$ $x = 8$ $a = 1$

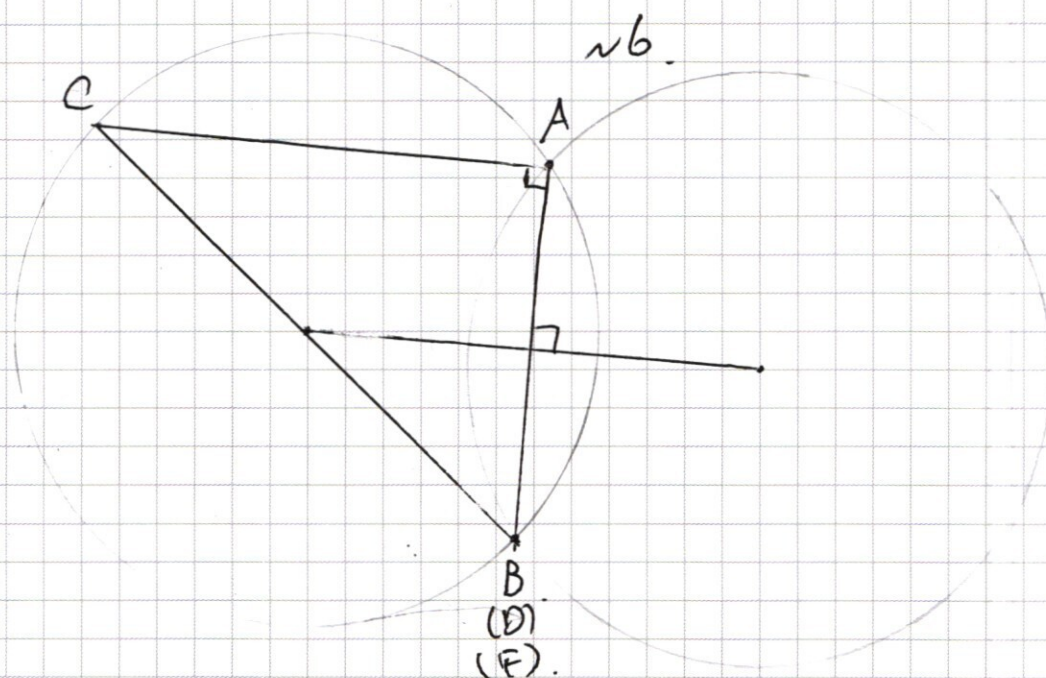
и $y = -8$ $\begin{cases} x = -16 \\ y = -8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 16 \\ y = -8 \end{cases}$

Когда $y = 0$: $a = (8-15)^2 + (8)^2 = 49 + 64 = 113$

$y = -16$: $a = (8-15)^2 + (-8)^2 = 113$

$y = 8-8$: $a = 1^2 + 0 = 1$

Ответ: Когда $a = 1$ или $a = 113$.



~~В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC=10, BC=16. Найдите AB.~~

~~Треугольник ABC является прямоугольным, так как угол C равен 90°, следовательно~~

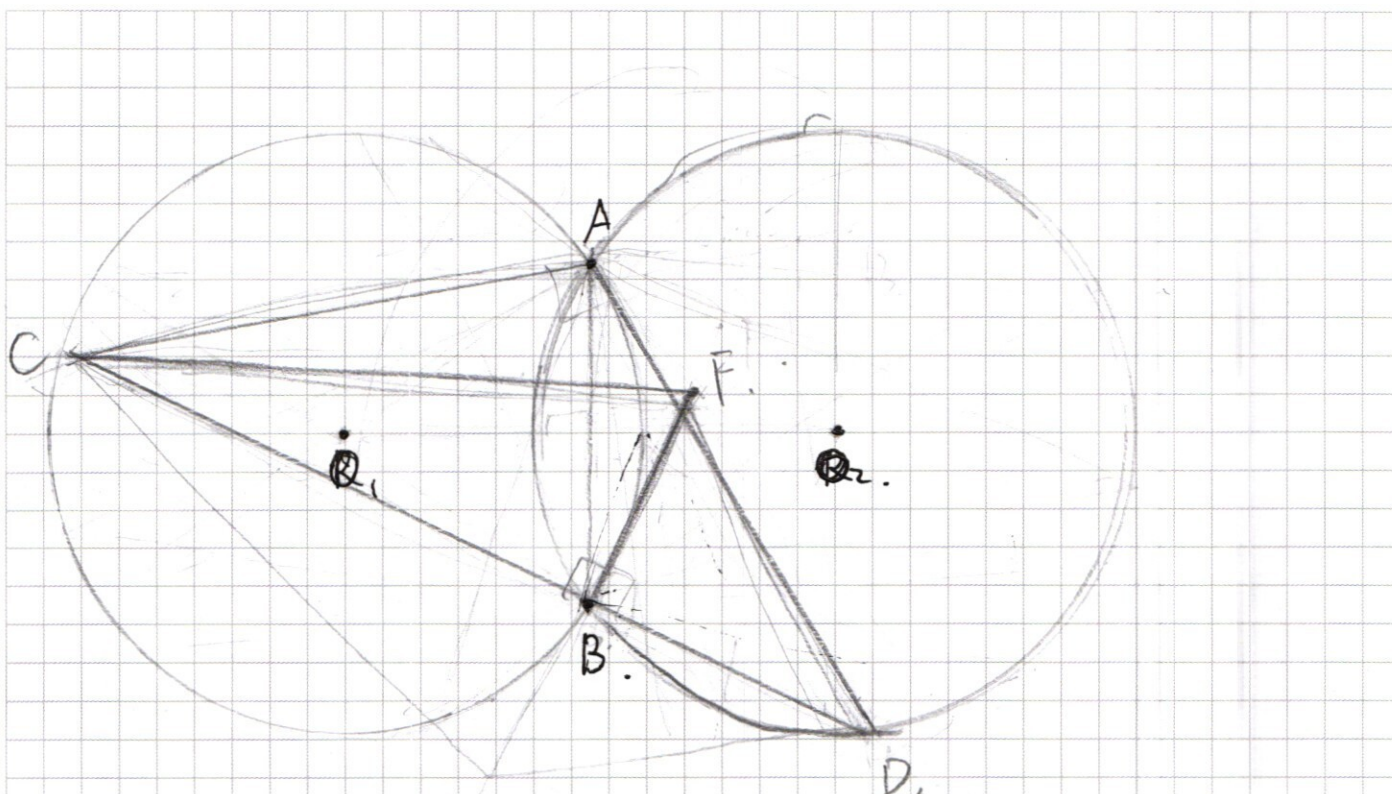
~~по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$~~

~~$= 10^2 + 16^2 = 100 + 256 = 356$. В таком размере нет никакого промисловидия. Ответ В условию не дано~~

~~и значит, что точка В и точка D являются~~

~~и значит, что есть ошибка. Там $AB=10$, а не BC .~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD^2 + CA^2 = CB^2.$$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$4 \cdot 3 = 12.$$

$$\begin{matrix} x & y \\ -x & y \\ x & -y \\ -x & -y \end{matrix}$$

$$x^2 + y^2 - 3(5|x| + |y|) + 225 + 64 = a.$$

$$5|x| + |y| = \cos \theta.$$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-(x-8)| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y-x+8 &< 0 \\ y &< x-8 \end{aligned}$$

$$y > -x-8. \quad y < -x-8.$$

$$y+x \geq -8. \quad y-x \geq 8.$$

$$y+x+8 + y-x+8 = 16$$

$$y+16=16$$

$$y=0.$$

$$x=0.$$

$$-x-8 \parallel x-8.$$

$$-y-x-8 + y-x+8.$$

$$-2x.$$

$$-8$$

$$-x=16$$

$$x=-16.$$

$$y=0.$$

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a. \end{cases}$$

$$|x|=X$$

$$|y|=Y$$

$$x^2 - 15x + 225 + y^2 - 8y + 64 = a.$$

$$x^2 + y^2 - 5(3x+y) + 289 = a.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 4300. & 7. \\ 700 & 7. \\ 100. & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{array}$$

$$2 + 4 + 8$$

order

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$abb.$$

$$\frac{3!}{2!}$$

$$\frac{12!}{2!}$$

$$12!$$

$$abb.$$

$$bab.$$

$$bba$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$4!$$

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

$$b_1, b_2 \dots b_{3000}$$

$$\frac{b \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$q > 0$$

$$\frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S.$$

$$\frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} +$$

$$b_1, b_2 \dots b_{3000} \quad b_n = bq^{n-1}$$

$$S = \frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad 40(b) \quad \frac{bq^2 \cdot bq^5 \cdot bq^8}{bq \cdot q^2}$$

$$S + 39(b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) = 15S$$

$$39(b_2 + b_3 + \dots + b_{3000}) = 4S$$

$$39 \cdot \frac{bq^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = 4S$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} \\ 4S = \frac{bq^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \cdot 39 \end{array} \right. \quad q \neq 1$$

$$\left(\frac{bq(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} \right) 2 = ? \quad q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$$

$$4 \cdot \frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 39 \cdot \frac{bq^2(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{2 \cdot 0,4}{1,4}$$

$$4b = \frac{39 \cdot bq^2}{q^2 + q + 1}$$

$$\frac{7}{5} \quad \frac{2}{2}$$

$$\frac{0,8}{1,4} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} = \frac{4}{q^2 + q + 1}$$

$$= \frac{4}{7}$$

$$35q^2 - 4q - 4 = 0$$

$$(7q + 2)(5q - 2) = 0$$

$$q = \frac{2}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot \frac{\cancel{9} (a^{2000} - 1)}{9^2 - 1} = \frac{\cancel{9} (a^{2000} - 1)}{9 - 1}$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \left(\sqrt{x^3 - 64x + 200} \right) = x^2 + 6x - 40$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \left(\sqrt{x^3 - 64x + 200} \right) = (x+10)(x-4)$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \right) \left(\sqrt{x^3 - 64x + 200} \right)$$

$$x^3 - 64x + 200$$

$$\begin{array}{r} 26 \quad 6 \quad 216 \quad 2 \\ 1 \overline{) 646} \\ \underline{384} \end{array}$$

8. 27. 64. 125 216.

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{x^3-64x+200}{8}}\right) - (x+10)(x-4) = 0$$

$$\left(\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}}\right) - (x-4) = 0$$

$$\frac{\sqrt{x^3-64x+200}}{2\sqrt{2}} = (x-4)^2$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\frac{x^3-64x+200}{8} = x^2-8x+16$$

$$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$$

$$x^3-8x^2+72 = 0$$

$$x^2(x-8) = -72$$

$$x=6$$

$$\begin{array}{r} 2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1/4 \cdot 3\sqrt{13} + 3/4 + 13\sqrt{13} \\ -64 - 64\sqrt{13} + 200 \\ -24 - 48\sqrt{13} + 200 \\ -48\sqrt{13} \end{array}$$

$$(x-6)(x^2-2x-12) = 0$$

$$(1+\sqrt{13})^3 = -64 - 64\sqrt{13} + 200$$

$$1/4 \cdot 3\sqrt{13} + 3/4 + 13\sqrt{13} - 64 + 200 - 64\sqrt{13}$$

$$16\sqrt{13}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 49. \\ 49 \quad 54 \quad 43 \\ \times 49 \quad 4 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 176 \\ \hline 1056 \\ 12320 \\ 17600 \\ \hline 20976 \end{array}$$