

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. ~~4900~~ $4900 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

т.к. $\exists a \in \mathbb{N}: a < 10$ и $a \neq 2$ и $a \neq 5$ или $a \neq 7$ или $a \neq 5$ или $a \neq 7$

то сначала выберем два места для семерок, затем для пятёрок. Далее мы можем выбрать два места для двоек или нулей для четвёрок, а остальные заполнить нулями.

Ответ: $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2) = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot (4 + \frac{4 \cdot 3}{2}) =$

$= 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 = \underline{4200}$

3. Перепишем уравнение

$$\sqrt{2}(x+10) \cdot (x^3 - 64x + 200)^{\frac{1}{2}} = 4(x+10)(x-4)$$

Кажется, что -10 — корень, но $-1000 + 640 + 200 < 0 \Rightarrow$ не подходит по ОАЗ, можно делить.

$$\left((x^3 - 64x + 200)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}(x-4) \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 64x + 200 = 8(x^2 - 8x + 16) \Rightarrow x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 8x^2 + 72 = 0, \quad 216 - 6 \cdot 36 + 72 = 0 \Rightarrow 6 \text{ — корень} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 72 \quad | x - 6 \\ \underline{-x^3 + 6x^2} \\ -2x^2 + 72 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ -12x + 72 \\ \underline{-12x + 72} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-6)(x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$x = 6$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

Ответ: $x = \{6;$

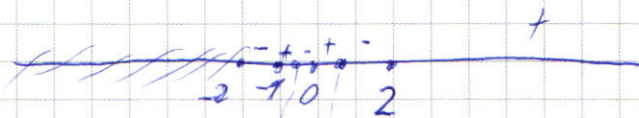
$1 + \sqrt{13}; 1 - \sqrt{13}\}$

1) $x+2 > 0$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x^3 + 4x^4 - 5x^2 - 4x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(-5x^2 + 4x^2(x-1) + 4) \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$



$$x \in [-1; \frac{1-\sqrt{33}}{8}] \cup [0; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty) \cup [-2; 2]$$

$$\frac{1-\sqrt{33}}{8} \quad \frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

2) $x < -2$

$$\begin{cases} 4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

Заметим, что:

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x = f(x)$$

$$f(x) = 16x^3 + 15x^2 + 22x$$

при $x < -2$ имеем:

$$f(x) = 16x^3 + 15x^2 + 22x < 0$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x > 0$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x > 0$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x > 0$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x > 0$$

$$x(x-2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \leq -2 \text{ или } x \geq 2$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -2]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Знаменатель - d.

Первый знаменатель - b₁

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2000} = b_1 + b_1 d + \dots + b_1 d^{1999} = b_1 (1 + d + d^2 + \dots + d^{1999}) =$$

$$= b_1 \cdot \frac{d^{2000} - 1}{d - 1} = 5$$

$$5 + 39(b_2 + b_3 + \dots + b_{2000}) = 5 + 39 \cdot b_1 d^2 (1 + d + d^2 + \dots + d^{1997}) =$$

$$= 5 + 39 b_1 d^2 \cdot \frac{d^{1998} - 1}{d^2 - 1} = 55 \Rightarrow 39 b_1 d^2 \cdot \frac{d^{1998} - 1}{d^2 - 1} =$$

$$= 4 b_1 d^2 \cdot \frac{d^{1998} - 1}{d^2 - 1} \Rightarrow 39 \cdot \frac{d^2}{d^2 - 1} = \frac{4}{d - 1}; d \neq 1 \Rightarrow 39 \cdot d^2 =$$

$$= 4(d^2 + d + 1) \Rightarrow 35d^2 - 4d - 4 = 0; \Delta = 16 + 560 = 576; \sqrt{\Delta} = 24; d = \frac{4 \pm 24}{70} = \frac{1}{7}, 0,4$$

$$5 + 2(b_2 + b_3 + \dots + b_{2000}) = 5 + 2 \cdot b_1 d (1 + d + d^2 + \dots + d^{1999}) =$$

$$= 5 + 2 \cdot b_1 d \cdot \frac{d^{2000} - 1}{d^2 - 1} \cdot d = k5 \Rightarrow (k-1) \cdot b_1 d \cdot \frac{d^{2000} - 1}{d^2 - 1} = 2 \cdot b_1 d \cdot \frac{d^{2000} - 1}{d^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-1 = 2 \cdot \frac{d-1}{d^2-1} \Rightarrow k = \frac{2}{d+1} + 1 = \frac{2}{14} + 1 = \frac{34}{14} = \frac{17}{7}$$

Ответ: увеличится в $\frac{17}{7}$ раз

7. начеки кармыны графика $|4+x+0| + |5-x+0| = 16$

$$\begin{cases} 4+x \geq -8 \\ 4-x \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -8-x \\ y \geq -8+x \end{cases}$$

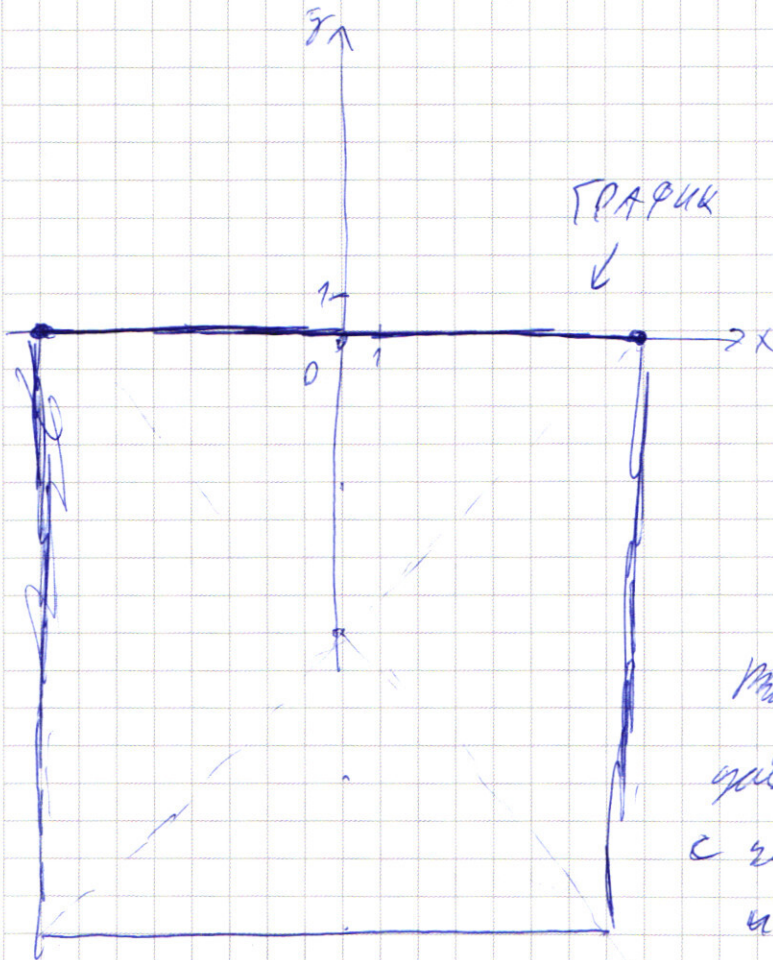
$$\begin{aligned} 2y+16 &= 16 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4+y+x \leq -8 \\ 4-x \leq -8 \end{cases} \Rightarrow y \leq -16$$

$$\begin{cases} 4+x+0 \geq 0 \\ 4-x+0 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

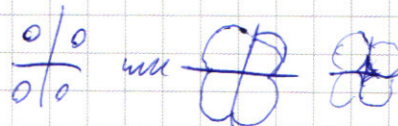
$$\begin{cases} 4+y+0 \leq 0 \\ 4-x+0 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -4 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

ГРАФИК



~~График функции~~
~~составлен~~
от $(-8, 0)$ до $(8, 0)$ и от $(-4, -16)$ до $(4, -16)$

Решение уравнения системы
прямой и окружности
с центром в $(15, 8)$; $(-15, -8)$, $(0, 0)$
и $(-15, 8)$, на окружности не
выглядит за ось;



~~Из-за того что радиус круга меньше, поэтому возникли
прямые окружности и никакой точки, а это и не
имеет право решения круга.~~

1) При $a < 124$ и не 1 решение.

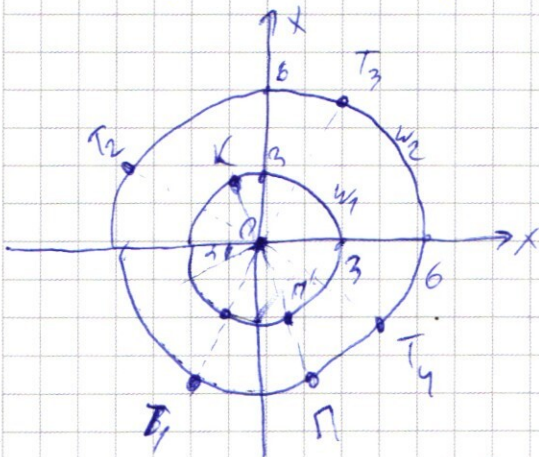
Видно, что у прямой окружности есть точка
пересечения с осью x , но у прямой окружности
пересечения с осью y только одна точка
и с осью x

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Заметим, что центр координат, центр и периферия

имеют на одной прямой: $R(\text{внутренний круг}) = 3$,

$r(\text{внутренний круг}) = 3$, $\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{6}$ Ответ: $\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{6}, \frac{\sqrt{2}+4}{6}\right)$



центр $(0,0)$ - точка O ;

Π - периферия

K - круг

ω_1 - внут. круг

$\Pi' = \omega_1 \cap \Pi$, точка $\min K \cap \Pi$

Ищем, когда $K = \Pi'$.

Пусть $V_{\Pi} = 2V_K = 12\sqrt{2}/\text{с}$, тогда $V_K = 30\sqrt{2}/\text{с}$.

Итак, круг движется вправо со скоростью $30\sqrt{2}/\text{с}$, периферия $6\sqrt{2}/\text{с}$, тогда

первая встреча будет через $\frac{30-6}{6} = 4\frac{1}{2}$ с, а вторая

встретится через $\frac{6}{30-6} = \frac{1}{4}$ с. $\Rightarrow$ координаты встречи

образуют квадрат! T_1 - вершина

Вспомогательная α , $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin(\alpha+45) = \sin \alpha \cos 45 + \cos \alpha \sin 45 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3} =$

$$= \frac{1+2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}+4}{6}, \quad \cos(\alpha+45) = \sqrt{\frac{1-0.5}{36}} = \frac{\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{6} = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}, \quad \text{Значит,}$$

координата $T_1 = \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{6}, \frac{\sqrt{2}+4}{6}\right)$, ответ: нуль вышло.

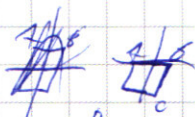
7 упражнение:

~~использовать~~

решить можно, т.к. все фигуры известны

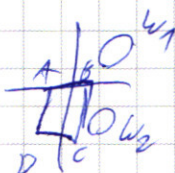
~~по известным сторонам~~

Пусть дан квадрат - ABCD



Вспомогательный элемент - окружность - как

помощью точки O.



$$w_1 \cap AB = w_2 \cap AB.$$

$$\text{Если } \exists w_2 \cap AB, \text{ то } \exists w_2 \cap DC \Rightarrow$$

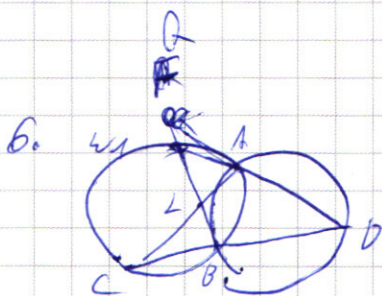
$$\Rightarrow w_2 \nparallel AB \text{ или } CD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 \nparallel AB \Rightarrow w_2 \text{ параллельно}$$

касательная BC.

$$\alpha = 49$$

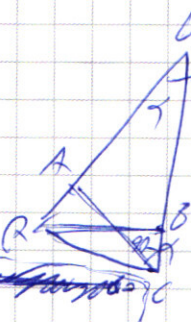
$$\text{Ответ: } \alpha = 49$$



пусть $L = AC \cap BQ$, где $BQ \perp CD$, а $Q = DAB$.

Заметим, что $ALQD$ и $CBAQ$ - параллелограммы $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q \in w_1$, где w_1 - касательная к окружности ABC.



а) в Δ провести высоту и найти

перпендикуляр высоты к AB и AC,

$$\text{по теореме синусов: } 2R = \frac{AB}{\sin \gamma}, \text{ где } \gamma = \frac{AB}{2R}$$

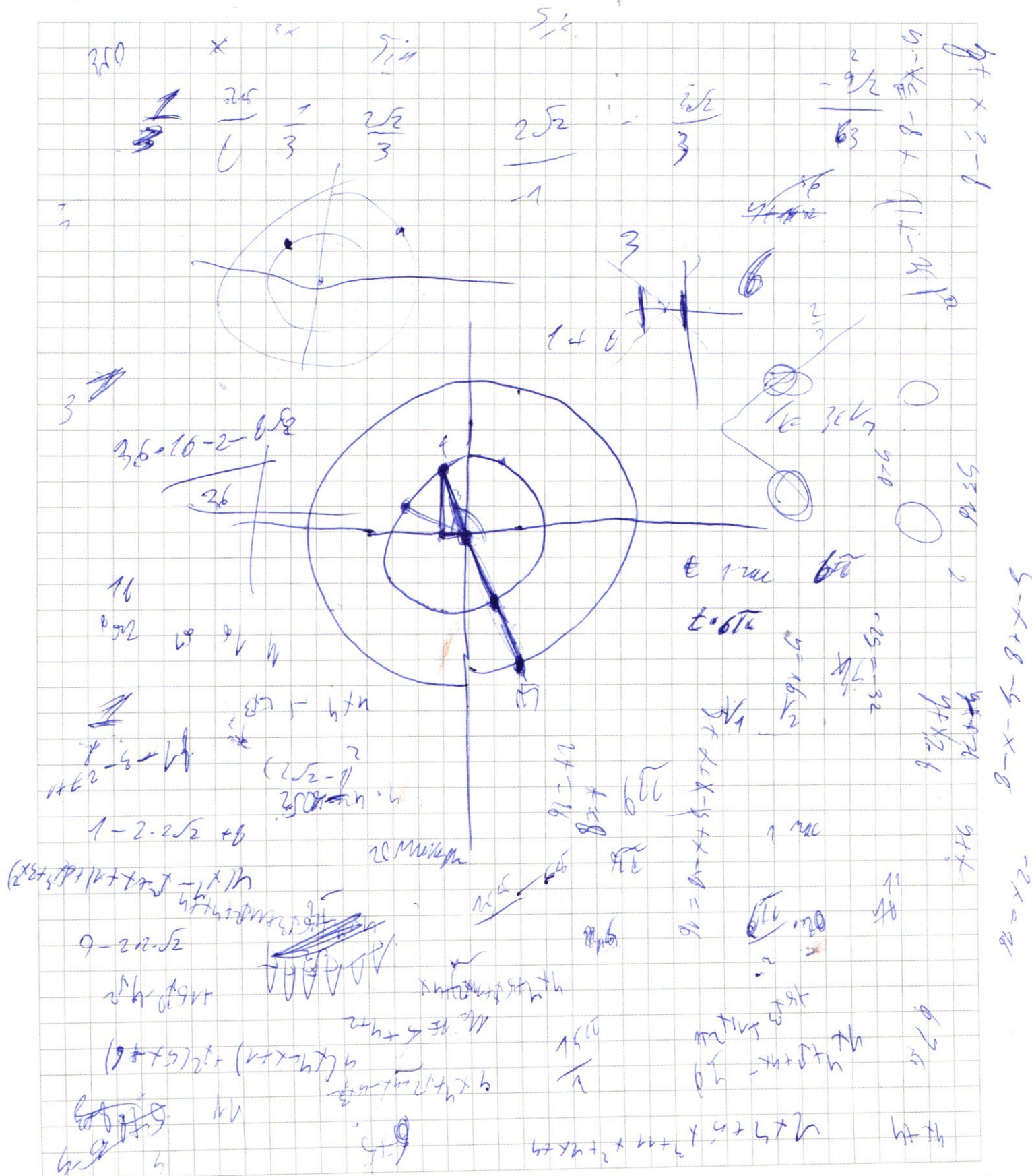
$$\text{или } R = r \Rightarrow \sin \gamma = \sin(2\gamma) \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = AB = 2R \text{ и } Q \in F = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CQ = \sqrt{2} \cdot AB = \sqrt{2} \cdot 2R = 2R = 26 = CF$$

$$QB = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 = DB \Rightarrow QK = 94, KC = 26, \text{ по теореме косинусов } QK = 34 \Rightarrow AK = 10 \Rightarrow S = 120$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$-2 \quad 16^{24} \div 4$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 90x^2$$

1899 July 2

66-4 ty

27-67

$$-4.4 \pm 2.2$$

$$\frac{32}{3} \leq 32$$

$$4x^4 + 11x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

一七

-1. -40.22

$$9x^7 + 8x^2 + 11x^2 + 9$$

74

$$16 - 22$$

$$10 \times 2 \times 10 \times 10$$

$$(x^2 + 2x - 2) \mid (x^2 + 1)$$

$$4x^3 - x^2 - 2x + 9x^2 - x - 2$$

$$9x^3 + 9x^2 - 3x - 2$$

$$4x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x -$$

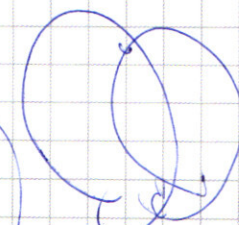
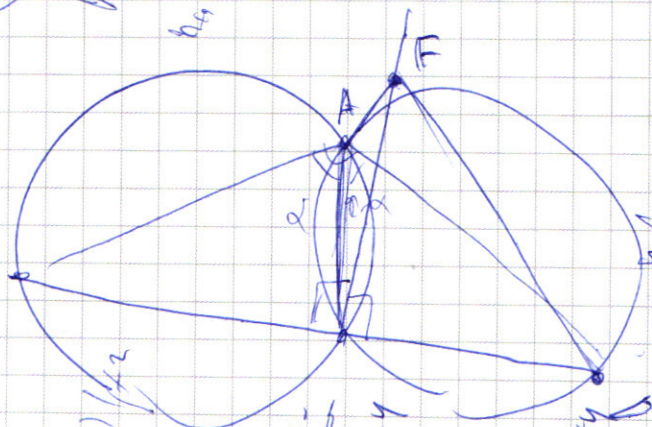
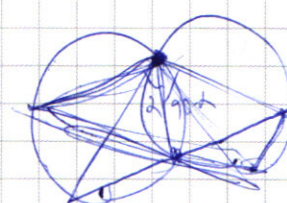
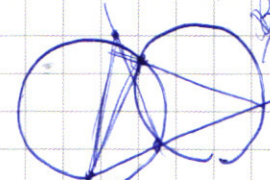
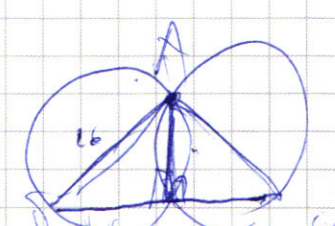
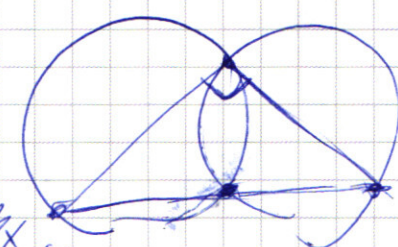
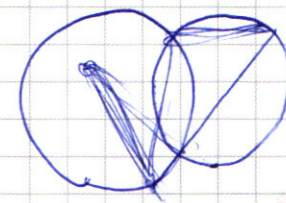
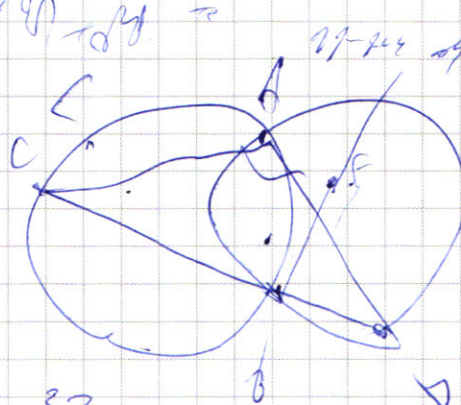
$$y^2 \times 3 - 2 \times 4 + 4$$

9x9-5x9-9x25

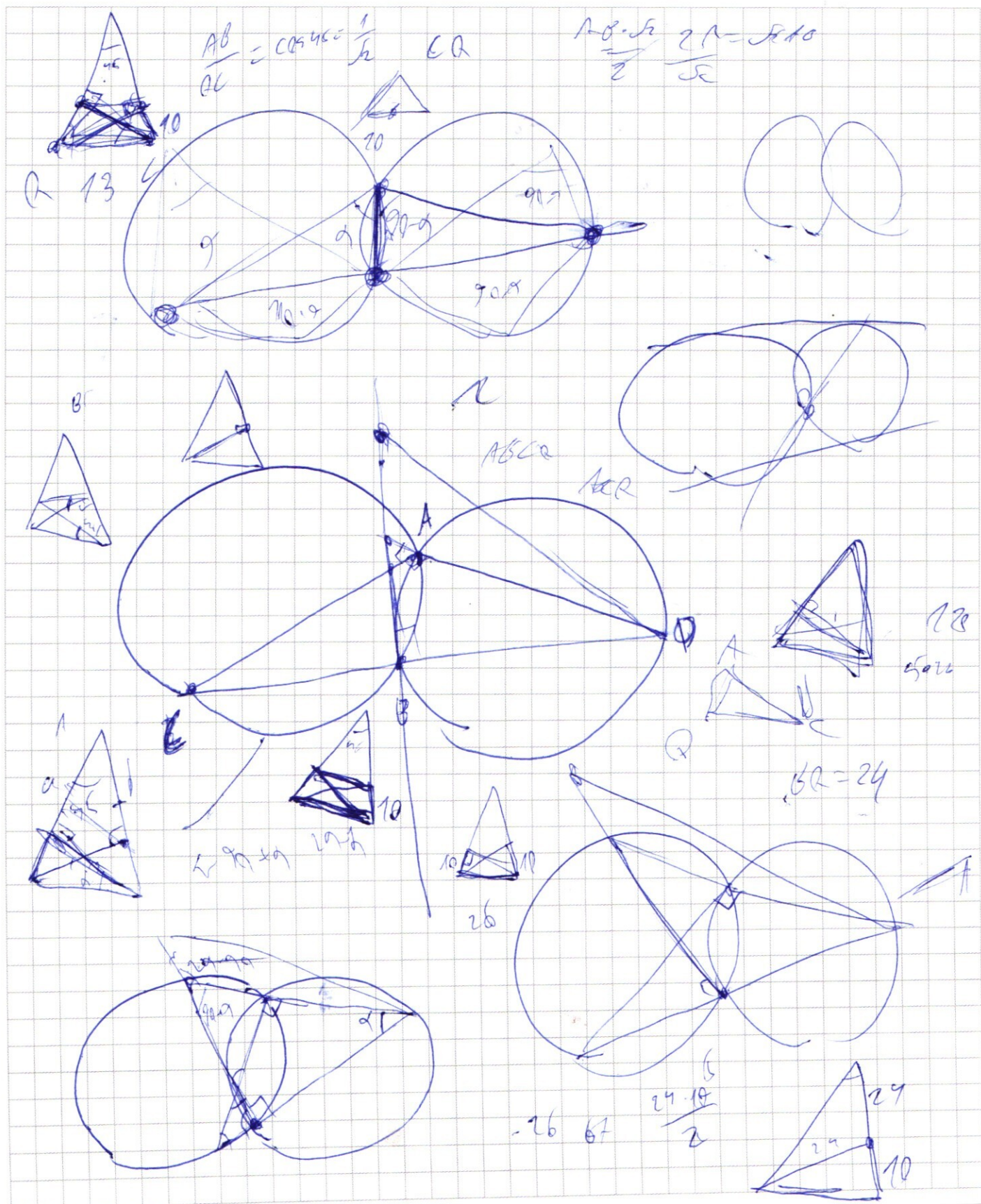
26-26
✓

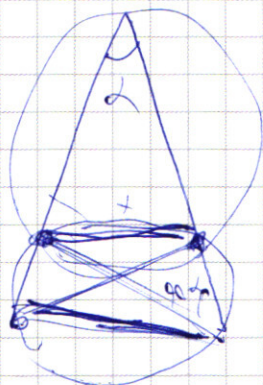
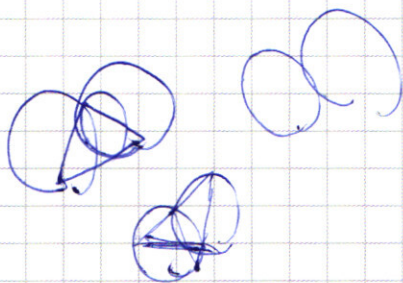
$$2-9'4 + 984.14$$

26-7-2



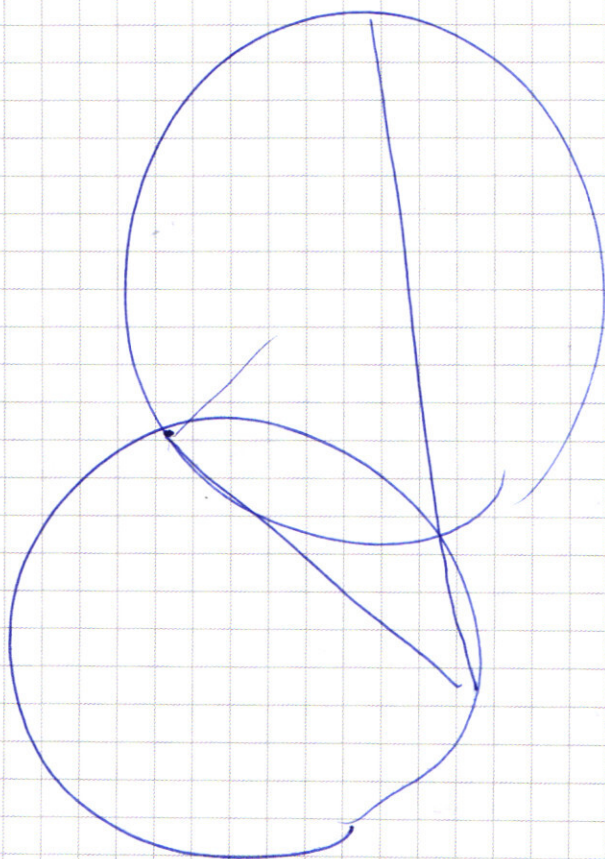
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$x = \frac{y}{\sin \alpha}$$

$$y = \frac{x}{\sin \alpha, \sin \beta, \dots}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$f = 1 + \frac{33}{4x^2}$$

$$4x^3 - x^2 + 2x - 4$$

-2

$$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$4x^2 - x - 2$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

$$-1 \quad -4 \quad -5$$

$$4x^4 + x^3 + 4x - 5x^2 + 2x + 4 \geq 0$$

$$\int_{-2}^{2} 76$$

$$\begin{cases} 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4x - 2$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4x - 2$$

$$4 - 5x^3 + 9x^2 - 9x^2 + 4x - 2 \geq 0$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4x - 2$$

$$-5x^3 - 5x^2 + 4x - 2$$

$$-5x^3 - 5x^2 + 4x - 2$$

$$-5x^2(x+1) + 4x^2(x^2-1) + 4(x+1) =$$

$$225 \cdot 16 = 224$$

$$(x+1) \mid -5x^2 + 4x^3 - 4x^2 + 4$$

$$(x+1) \mid -5x^2 + 4x^3 - 4x^2 + 4$$

$$4x^3 - 9x^2 + 4x - 2$$

$$4x^3 - 9x^2$$

$$7x^2 + 4$$

$$2x^2 - 28x$$

$$2x + 4$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$

$$16x^3 + 15x^2 + 22x - 40$$