

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

- 1) Разложим 700 на прост. множители: $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
 - 2) Чтобы составить из восьми цифр число, произведение которого ≤ 700 , необходимо составить его из цифр 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1 или из цифр 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1. Тогда для первого случая найдем кол-во способов: всего - $8!$, но т.к. в первом случае 3 единицы две двойки и 2 пятёрки поделим на $2! \cdot 2! \cdot 3!$, чтобы избежать повторений. $\Rightarrow$ кол-во способов для первого случая $= \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$.
 - 3) Аналогично для второго. Делим на $4! \cdot 2!$, т.к. в 2 пятёрки и 4 единицы, чтобы избежать повтор. $\Rightarrow$ кол-во способов во 2-ом случае $= \frac{8!}{4! \cdot 2!}$.
 - 4) Сложим кол-во способов:
- $$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6^3 \cdot 5 \cdot 4^2}{2 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 5 \cdot 6^3 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9 = 2520$$

Ответ: 2520

№4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2|x-2| \geq 0.$$

$$3) \begin{cases} 1) x \geq 2 \\ 2) x < 2 \end{cases} \begin{cases} 2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2(x-2) \geq 0. \\ 2x^4 + (x-2)^2 + 3x^2(x-2) \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $x-2 = t$

$$1) (x-2)^2 - 3x^2(x-2) + 2x^4 \geq 0.$$

$$t^2 - 3x^2t + 2x^4 \geq 0.$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$t_1 = \frac{3x^2 + x^2}{2} = 2x^2$$

$$t_2 = x^2$$

$$\left. \begin{matrix} t_1 = 2x^2 \\ t_2 = x^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow t^2 - 3x^2t + 2x^4 = (t - 2x^2)(t - x^2)$$

$$(t - 2x^2)(t - x^2) \geq 0$$

$$(t - 2x^2 + x - 2)(-x^2 + x - 2) \geq 0.$$

$$(2x^2 - x + 2)(x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$\geq 0$$

$$\text{при } x \in \mathbb{R}$$

$$\geq 0$$

$$\text{при } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1) x \in \mathbb{R}, \text{ при } x \geq 2.$$

$$2) (x-2)^2 + 3x^2(x-2) + 2x^4 \geq 0$$

$$t^2 + 3x^2t + 2x^4 \geq 0$$

$$D = x^4$$

$$t_1 = -2x^2$$

$$t_2 = -x^2$$

$$\left. \begin{matrix} t_1 = -2x^2 \\ t_2 = -x^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow t^2 + 3x^2t + 2x^4 = (t + 2x^2)(t + x^2)$$

$$(t + 2x^2)(t + x^2) \geq 0.$$

$$(2x^2 + x - 2)(x^2 + x - 2) \geq 0,$$

$$1) 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

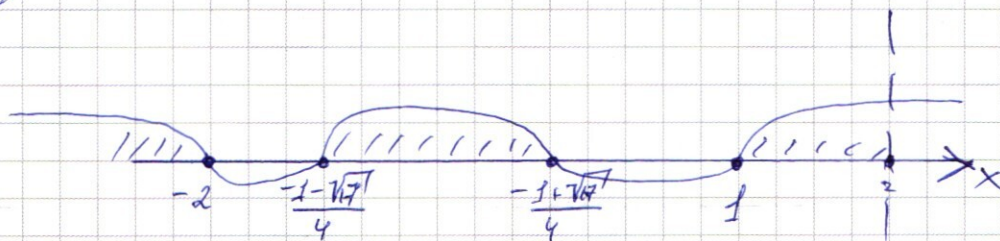
$$2) x^2 + x - 2 = 0.$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; 2), \text{ или } x < 2.$$

$$3) x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$
№ 7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \end{cases}$$

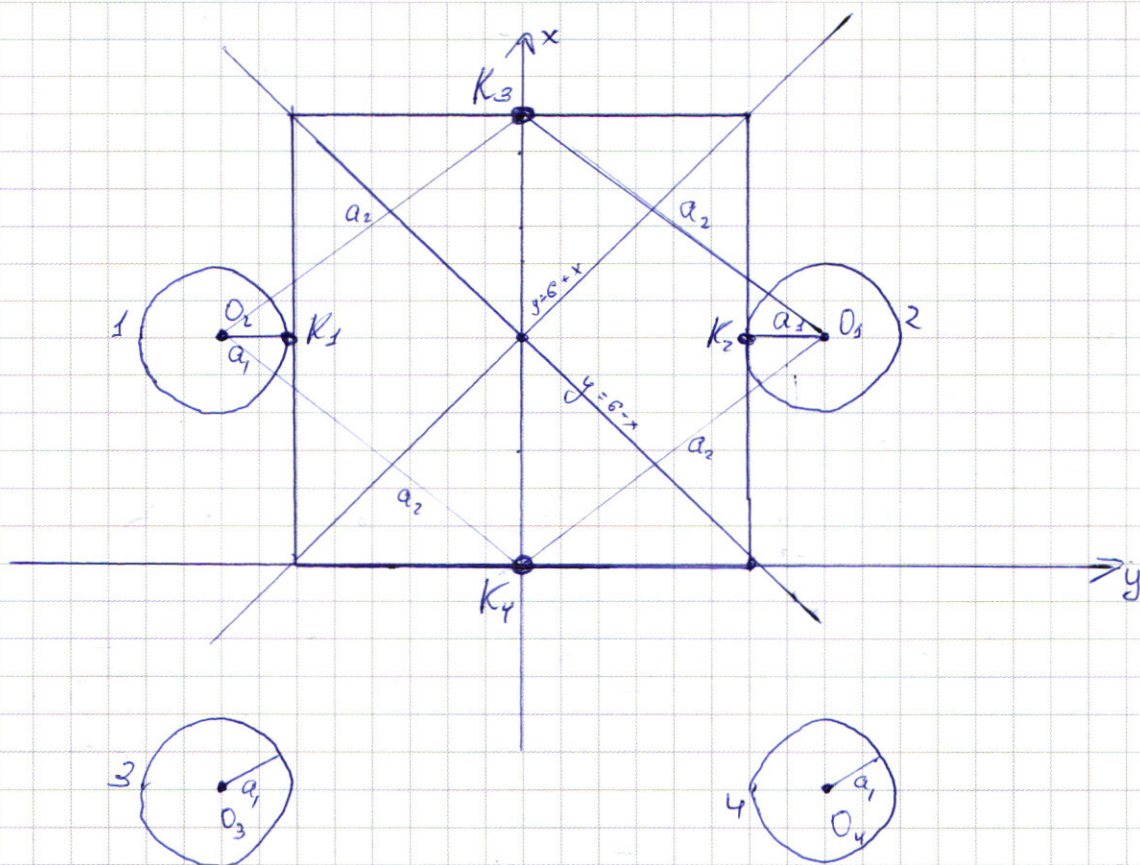
$$b) (|x|-3)^2 + (|y|-6)^2 = 9$$

$$1) |y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$\begin{cases} y \geq 6+x \\ y \geq 6-x \\ 2y = 24 \\ y \geq 6+x \\ y \leq 6-x \\ x = -6 \\ y < 6+x \\ y \geq 6-x \\ x = 6 \\ y < 6+x \\ y < 6-x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2) (|x|-3)^2 + (|y|-6)^2 = 9 \text{ — опущено}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-3)^2 + (y-6)^2 = 9 \\ x \geq 0 \\ (x-3)^2 + (y+6)^2 = 9 \\ y < 0 \\ x < 0 \\ y \geq 0 \\ (x+3)^2 + (y-6)^2 = 9 \\ x < 0 \\ y < 0 \\ (x+3)^2 + (y+6)^2 = 9 \end{cases}$$



Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 - центры окружностей.

- 1) Очевидно, что при $a = a_1$ - ровно 2 касания. Также очевидно, что $a_1 = 2$. (касания в точках K_1 и K_2)
- 2) Расстояния от O_2 до K_3 и K_4 равны, и по т. Пифагора: $K_3 = K_4 = 10$; Очевидно, что в точках K_3 и K_4 тоже ровно 2 касания $\Rightarrow a_2 = 10$
- 3) В остальных случаях ровно 2 решения не будет.

Ответ: ~~2 или 10~~ $a = 2$ или ~~10~~ $a = 10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$1) \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24.$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

Заметим, что $x = -6$ - корень.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x+4$$

$$\sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} = x+4$$

$$2) \begin{cases} \frac{x^3}{2} - 2x + 40 \geq 0 \\ \frac{x^3}{2} - 2x + 40 = (x+4)^2 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32.$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 12x - 2x^2 + 48 = 0$$

$$x^3 - 2x - 20x + 48 = 0.$$

Заметим, что $x = 4$ - корень $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r} \Rightarrow x^3 - 2x - 20x + 48 \quad | \quad x-4 \\ - x^3 - 4x \\ \hline 2x - 20x \\ - 2x - 8x \\ \hline -12x + 48 \\ -12x + 48 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x - 20x + 48 = (x-4)(x^2 + 2x - 12)$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 52 \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{13}, x_2 = -1 - \sqrt{13} \text{ - не входят в ОДЗ.}$$

Ответ: $-1 + \sqrt{13}$; -6 ; 4 .

№2.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$b_1 = b_1$$

$$b_2 = b_1 q_0$$

$$b_3 = b_1 q_0^2$$

$$b_4 = b_1 q_0^3$$

⋮

$$b_{3000} = b_1 q_0^{2999}$$

$$S = b_1 \frac{q_0^{3000} - 1}{q_0 - 1}$$

1) Если все ее члены с некоторым, кратным 3 увеличим в 50 раз, то S увеличится на $49 \cdot S_1$, где S_1 — сумма з.п. от $a = b_3 = b_1 q_0^2$ и где $q = q^3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_1 = b_1 q_0^2 \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1}$

$$10S_0 = S_0 + 49S_1$$

$$9S_0 = 49S_1$$

$$9b_1 \frac{q_0^{3000} - 1}{q_0 - 1} = 49b_1 q_0^2 \frac{q_0^{3000} - 1}{q_0^3 - 1}$$

$$\frac{9}{q_0 - 1} = \frac{49q_0^2}{q_0^3 - 1}$$

2) Если все ее члены с тем же некоторым увеличим на z , то S увеличится на S_2 , где $q = q^2$,
 $a = b_1 q_0$. Пусть k — на сколько увелич. S .

$$kS = S + S_2$$

$$(k-1)S = S_2 \Rightarrow (k-1)b_1 \frac{q_0^{3000} - 1}{q_0 - 1} = b_1 q_0 \frac{q_0^{3000} - 1}{q_0^2 - 1} \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow K - 1 = \frac{q_0}{q_0 + 1}.$$

$$K = \frac{q_0}{q_0 + 1} + 1.$$

~~$$\Rightarrow \frac{q_0}{q_0 + 1} = 49 \cdot \frac{q_0}{q_0^3 - 1} \cdot \frac{3000 - 1}{q_0^3 - 1}.$$~~

~~$$q_0^3 = 49 \cdot q_0 \cdot \frac{3000 - 1}{q_0^3 - 1}.$$~~

$$3) \frac{q}{q_0 - 1} = \frac{49 q_0^2}{q_0^3 - 1}.$$

$$q = \frac{49 q_0^2}{q_0^2 + q_0 + 1}.$$

$$q q_0^2 - q q_0 - q = 49 q_0^2.$$

$$40 q_0^2 - q q_0 - q = 0.$$

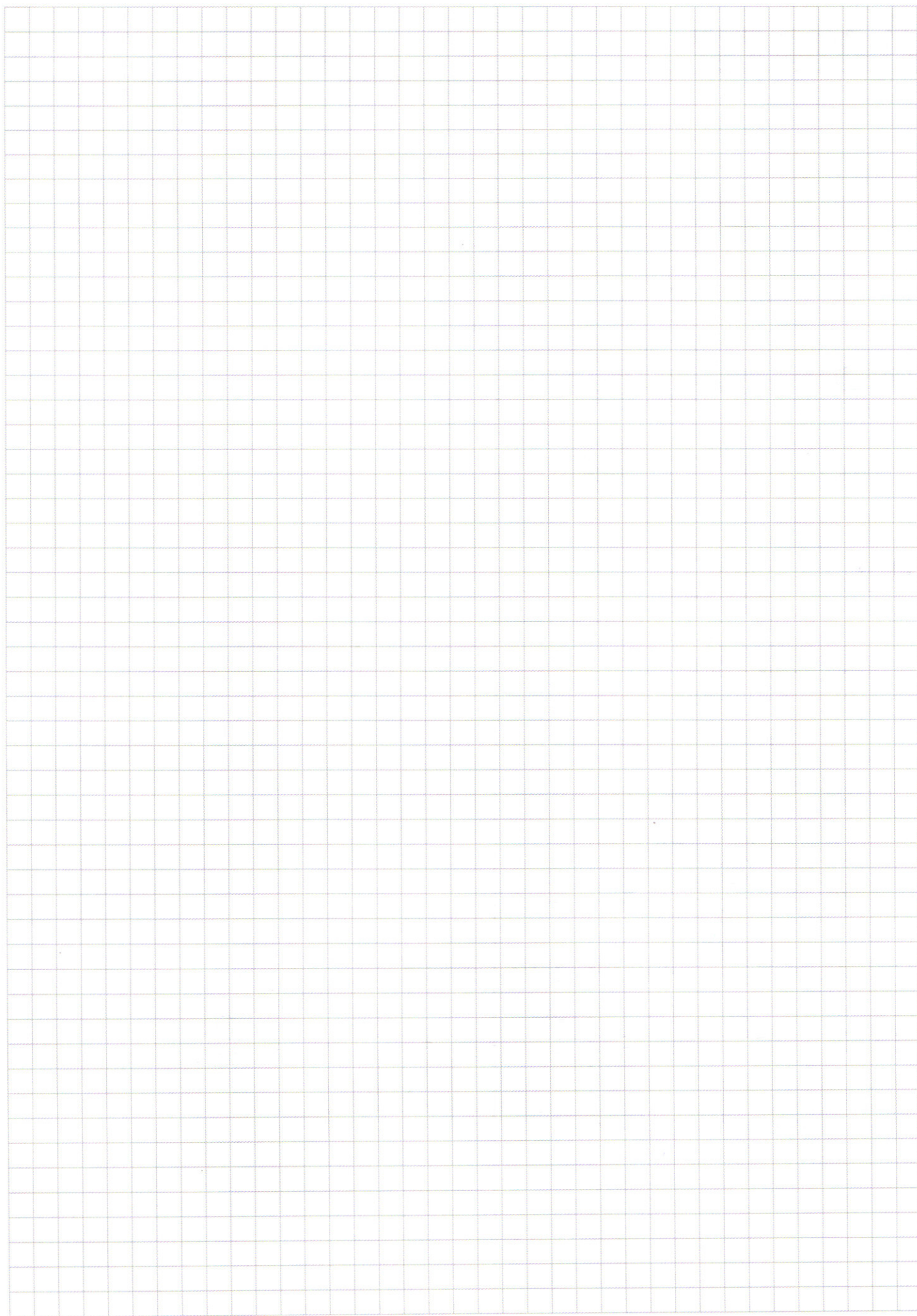
$$D = 1521 = 39^2.$$

$$q_{01} = \frac{q + 39}{40} = \frac{48}{40} = \frac{6}{5};$$

$$q_{02} = \frac{q - 39}{40} < 0 \Rightarrow q \text{ не подходит}$$

$$4) K = \frac{q_0}{q_0 + 1} + 1 = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{5} + 1} + 1 = \frac{6}{11} + 1 = \frac{17}{11}.$$

Ответ: увеличится в $\frac{17}{11}$ раз.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{x}{2} + 3\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$(x+6) \sqrt{\frac{2}{2} (x^3 - 4x + 80)} = (x+4)(x+6)$$

~~3 9~~

9 27 81

$$S_3 = 9 \frac{3-1}{3-1} = 9 \frac{26}{2} = 9 \cdot 13 = 117$$

$$S+k = S+S_2$$

$$S_2 = k$$

$$6, 90 \frac{90^{3000}-1}{90^2-1} = -x^3 - 2x^2 - 12x - 112 = 0$$

$$= S \frac{90}{90-1}$$

$$x^3 - 4x + 80 = -2(x+4)^2$$

$$x^3 - 4x + 80 = -2x^2 - 16x - 32$$

$$x^3 + 2x^2 + 12x + 112 = 0$$

$$\frac{(k-1)}{90-1} = \frac{90}{90^2-1} \quad k-1 = \frac{90}{90+1}$$

$$9 = \frac{49 \cdot 90^2}{90^2 + 90 + 1}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ + 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 + 8 \\ \times 39 \\ \hline 339 \\ + 855 \\ \hline 117 \\ 251525 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 25 \\ + 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 45 \\ + 45 \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 + 10x + 24$$

$$D = 100 - 96 = 4$$

$$x_1 = \frac{-10 \pm 2}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-10 - 2}{2} = -6$$

$$x \cdot x^2 - 4x + 80 =$$

$$x^3 - 4x + 80$$

$$x^3 + 2x^2 + 16x - 4x^2 - 8x - 32 = x^3 - 2x^2 + 8x - 32$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 8x - 32 \\ - (x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 16x + 16) \\ \hline -6x^2 + 12x - 48 \\ + (2x^2 - 20x + 16) \\ \hline -4x^2 - 8x + 32 \\ + (x^2 - 4x + 4) \\ \hline -3x^2 - 12x + 36 \\ + (3x^2 + 12x + 12) \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} (x^3 - 4x + 80) =$$

$$= (x+4)^2 \cdot x^3 + 2x^2 + 16x - 4x^2 - 8x + 16$$

$$\frac{1}{2} x^3 - 2x + 40 = x^3 - 2x^2 - 14x + 48$$

$$= x^2 + 8x + 16$$

$$\frac{x^3}{2} - x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52 = (2\sqrt{13})^2$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13} - 1 \approx 2,3$$

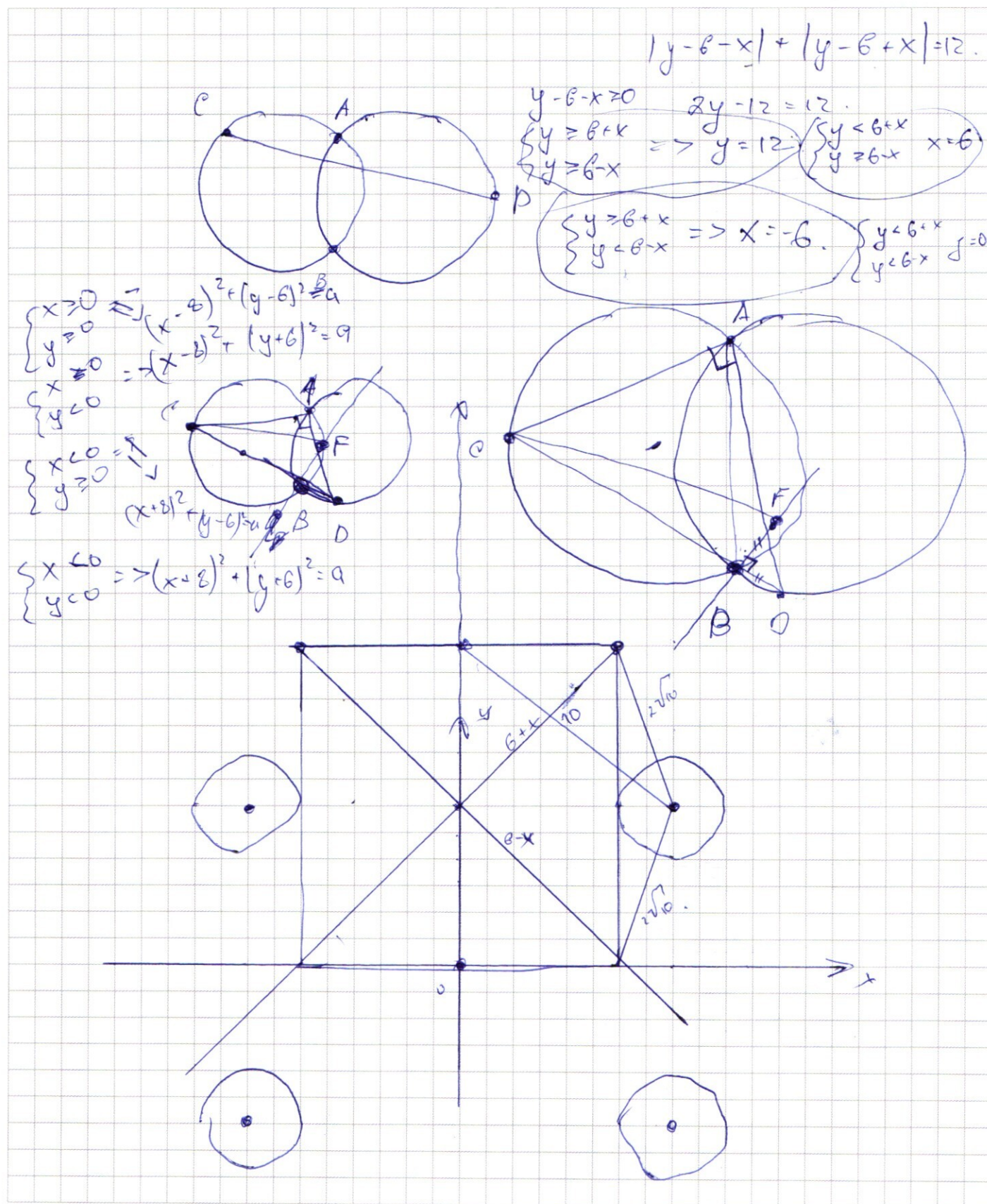
$$x_2 = -\sqrt{13} - 1$$

$$\approx -4,5$$

$$-4,5^3 + 4,5 \cdot 4 + 80$$

$$\begin{array}{r} 40 \times 180 \\ \times 9 \\ \hline 1440 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$b_1 \quad b_1 q \quad b_1 q^2 \quad b_1 q^3 \quad b_1 q^4 \quad b_1 q^5$$

$$b_1 \quad b_1 \quad b_1 \quad b_1 \quad b_1 \quad b_1$$

$$S_3 = b_1 \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} \cdot 50 + b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} - b_1 q^2 \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$S_0 = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$10 b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = 49 b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} + b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$10 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = 49 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} + \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$9 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = 49 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1}$$

$$k S_0 = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} + b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}$$

$$k b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} + b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}$$

$$\frac{(k-1)}{q-1} = \frac{q}{q^2-1}$$

$$\frac{9}{q-1} = \frac{49 q^2}{q^3-1} = \frac{49 q^2}{(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$9 = \frac{49 q^2}{q^2+q+1}$$

$$9 q^2 + q + 1 = 49 q^2$$

$$40 q^2 - q - 1 = 0$$

$$D = 1 + 160$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x-2 | + 4 \geq 0$$

14

$$x \leq 2 \quad x < 2.$$

$$2x^4 + (x-2)^2 + 3x^2(x-2) \geq 0.$$

$$x^2 + 3x^2 + 2x^4 = 0.$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4.$$

$$x_1 = \frac{-3x^2 \pm x^2}{2} = -2x^2.$$

$$x_2 = -2x^2.$$

$$(x-2+x^2)(x-2+2x^2) \geq 0.$$

$$(2x^2-x+2)(x-2) \geq 0.$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow \text{при } x \in \mathbb{R}.$$

$$(2x^2+x-2)(x^2+x-2) \geq 0.$$

$$D = 16 = 4^2.$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$1 + 16 = 17. \quad x-2 = x^2.$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$2x^2 \Rightarrow x+2$$

$$2x^2 - 1$$

$$x^2 - x + 2 = 0.$$

$$(x-2) \in (-\infty; x^2) \cup$$

$$V(2x^2; +\infty)$$

$$(x-2-2x^2)/(x-2+x^2) \geq 0.$$

$$(x-2-2x^2)(x-2+x^2) \geq 0$$

$$(2x^2+2-x)(x^2+2-x) \geq 0$$

$$\geq 0$$

$$\text{при } x \in \mathbb{R}$$

$$2x^4 + 4x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x - 2x$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 - 4 \geq 0$$

$$2x^4 + \cancel{7x^2} - 3x^3 + 7x^2 - 4x - 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 4x - 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 4 - 3x^2(x-1) + 4x(x-1) \geq 0.$$

$$2x^4 - 4 + (x-1)(4x-3x^2) \geq 0.$$

$$2x^4 - 4 + x(x-1)(4-3x) \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 4(x-1) + x^2(-3(x-2)+1) \geq 0.$$

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4.$$

$$(x-2)^2 + 2x^4 \geq 3x^2(x-2)$$

$$2x^4 \geq 3x^2(x-2) - (x-2)^2.$$

$$2x^4 \geq (x-2)(3x^2 - x + 2)$$

$$2x^4 - 3x^2$$

$$(x-2)^2 - 3x^2(x-2) + 2x^4 \geq 0$$

$$x^2 - 3x^2 + 1x^4 \geq 0.$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4.$$

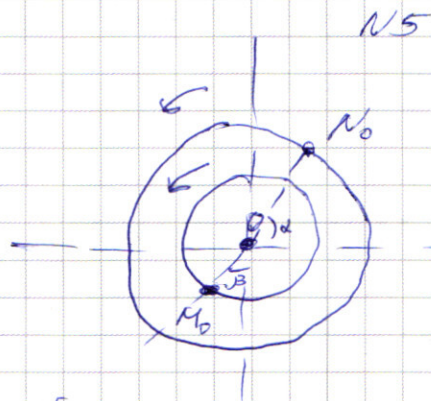
$$x_1 = \frac{3x^2 + x^2}{2} = 2x^2$$

$$x_2 = \frac{3x^2 - x^2}{2} = x^2.$$

$$x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; x^2) \cup (2x^2; +\infty)$$

M-векторная
N-радиус



$$\vec{v}_B = 2\vec{v}_A$$

$$R_B = \sqrt{4 + 28} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$R_A = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$$

$$\omega_A = \sum R_A$$

$$\omega_B = \sqrt{R_B}$$

$$\omega_B = 2\sqrt{R_B}$$

$$\omega_B = \omega_A + 180$$

$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = R$$

$$\omega_B t = \omega_A t + 180$$

$$t(\omega_B - \omega_A) = 180$$

$$t\sqrt{2}(2R_B + R_A) = 180$$

$$\begin{cases} x_B^2 + y_B^2 = R_B^2 \\ x_A^2 + y_A^2 = R_A^2 \\ y_B = kx_B \\ y_A = kx_A \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = k$$

$$\frac{y}{x} = k$$

$$\frac{y}{x} = k$$

$$x_B^2 + y_B^2 = R_B^2$$

$$x_A^2 + y_A^2 = R_A^2$$

$$y = \sqrt{R_B^2 - x_B^2}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ r &= \sqrt{x_B^2 - 2x_Bx_A + x_A^2 + y_B^2 - 2y_By_A + y_A^2} \\ &= \sqrt{R_B^2 + R_A^2 - 2(x_Bx_A + y_By_A)} \end{aligned}$$

$$x_B \cdot x_A + y_B \cdot y_A = \min$$