МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 1 ...$~~

~~восьмизначное число состоит из цифр:~~

~~1) 2; 5; 7; 1 или 2) 4; 5; 7; 1 — всего 2 возможных разложения.~~

~~1) две 2 — двойки; пятёрки, семёрки, единицы~~

Задача 3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-64x+200} = (x+10)(x-4)$$

$x = -10$ — корень.

$$\sqrt{x^3-64x+200} = (x-4)\cdot 2\sqrt{2}$$

при усл. $x \geq 4$. возв. обе части в квадрат.

$$x^3-64x+200 = 8(x^2-8x+16)$$

$$x^3-8x^2+72 = 0.$$

$$(x-6)(x^2-2x-12) = 0.$$

$x = 6$ или $x^2-2x-12 = 0.$

$x = 6 \geq 4$ $\quad x = 1-\sqrt{13}$; $x = 1+\sqrt{13}$

$1-\sqrt{13} < 4$ не подх. $\quad 1+\sqrt{13} > 4$

$\sqrt{x^3-64x+200}$ при $x = 6$.

$\sqrt{216-384+200} > 0 \Rightarrow x = 6$ — подходит.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\sqrt{x^3-64x+200}$ при $x=-10$

$\cancel{\sqrt{-1000+640+200}<0}$

$-1000+640+200<0 \Rightarrow$ <u>не подх.</u>

$\sqrt{x^3-64x+200}$ при $x=1+\sqrt{13}$.

$(1+\sqrt{13})^3-64(1+\sqrt{3})+200$

$1+3\sqrt{13}+3\cdot 13+13\sqrt{13}-64-64\sqrt{3}+200$

$1+39-64+200+16\sqrt{13}-64\sqrt{13}$

$176-48\sqrt{13}$, чтобы сравнить числа поделим оба на $|16$

11 и $3\sqrt{13}$, т.к. оба >0, то сравним их квадрат.

121 и $9\cdot 13$

121 и 117.

$\Downarrow$

$\sqrt{x^3-64x+200}$

$x^3-64x+200>0$, при $x=1+\sqrt{13}$.

Ответ: $1+\sqrt{13}$; 6.

<u>Задача 4</u>.

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

<u>при $x\geq -2$</u>

$4x^4+x^2+4x-5x^2(x+2)+4\geq 0.$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0$

$(x+1)(4x^3-9x^2+4)\geq 0$

$(x+1)(x-2)(4x^2-x-2)\geq 0.$

$4x^2-x-2=0.$

$D=$ $x=\frac{1-\sqrt{33}}{8}$ $\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}>-1\right)$

$x=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ $\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}<1\right)$

при $x\leq -2$

$4x^4+x^2+4x+5x^2(x+2)+4\geq 0$

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0$

$(x+1)^4+3x^4+x^3+5x^2+3\geq 0.$

$(x+1)^4+x^2(3x^2+x+5)+3\geq 0.$

$(x+1)^4\geq 0$ при любых x;

$x^2(3x^2+x+5)\geq 0$, т.к.

Диск.$(3x^2+x+5)$ равен:

$1^2-4\cdot 5\cdot 3<0$, значит

все выражение всегда больше 0.

☐ черновик ☑ чистовик

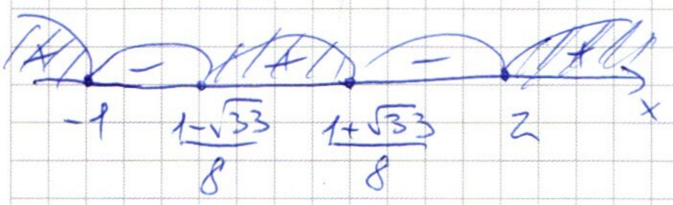
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.е. $x\in(-\infty;-2]$



$x\in(-\infty;-1]\cup[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}]\cup[2;+\infty)$

при $x\geq -2$

$\Downarrow$

$x\in[-2;-1]\cup[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}]\cup[2;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} x\in[-2;-1]\cup[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}]\cup[2;+\infty) \\ x\in(-\infty;-2]. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}]\cup[2;+\infty)$

Задача 2.

$S=\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$; (1) $\quad b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ b_1q^3;\ b_1q^4;\ b_1q^5;\ b_1q^6\ldots$

~~Если S увел. в 40 раз, значит, что~~

Номеров кратных 3 всего: $\frac{3000}{3}=1000$.

~~$4S=$~~

Причем они начинаются с b_1q^2, а ~~их~~ знаменатель равен q^3

$5S-S=\frac{(40-1)b_1q^2((q^3)^{1000}-1)}{(q^3-1)}=\frac{39b_1q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$; (2)

Рассматриваем только увеличенные члены. Т.к. ост. в сумме дают S, а значит новые члены умноженные на $(40-1)=39$ дают в сумме $5S-S=4S$. Аналогично во втором сл. получим.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

новые члены начинаются с $b \cdot q$, знамен.
$x=$ прогрессии равен q^2:
Всего членов на четных местах: $\frac{3000}{2} = 1500$.

$$S \cdot x = \frac{(3-1) \cdot bq\left((q^2)^{1500}-1\right)}{q^2-1} = \frac{2bq\left(q^{3000}-1\right)}{q^2-1}; \quad (3)$$

Поделим (2) на (1):

$$4 = \frac{39q^2b\left(q^{3000}-1\right)(q-1)}{(q^3-1)b\left(q^{3000}-1\right)}$$

$$4(q^3-1) = 39q^2(q-1)$$

$$4(q^2-q+1) = 39q^2$$

$$35q^2+4q-4=0.$$

$$D^* = 2^2+4 \cdot 35$$

$$D^* = 144$$

$$q = \frac{-2 \pm 12}{35}$$

$q = -\frac{2}{5}$; $\underline{q = \frac{2}{7}}$ – подходит.

~~$x \cdot S =$~~ $q = -\frac{2}{5}$ – не подходит, т.к все ~~члены~~ положительны.

Поделим (3) на (1).

$$\frac{xS}{S} = \frac{2bq\left(q^{3000}-1\right)(q-1)}{(q^2-1)\left(q^{3000}-1\right)b} = \frac{2q}{q+1}$$

$$x = \frac{2q}{q+1} = \frac{2 \cdot \frac{2}{7}}{\frac{2}{7}+1} = \frac{4}{7\left(\frac{2+7}{7}\right)} = \frac{4}{9}.$$

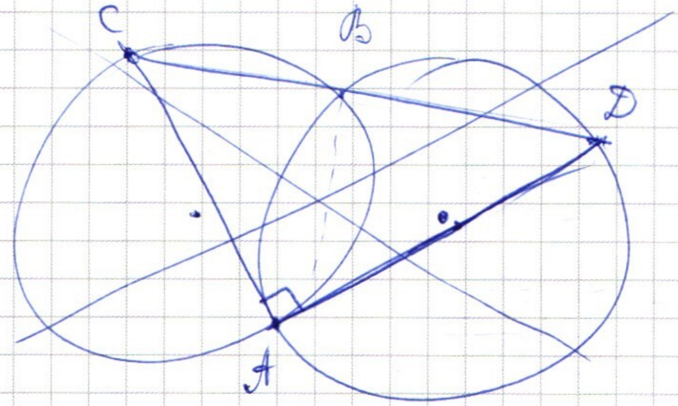
Значит S увеличилась в $\left(\frac{4}{9}+1\right) = \frac{13}{9}$ раза

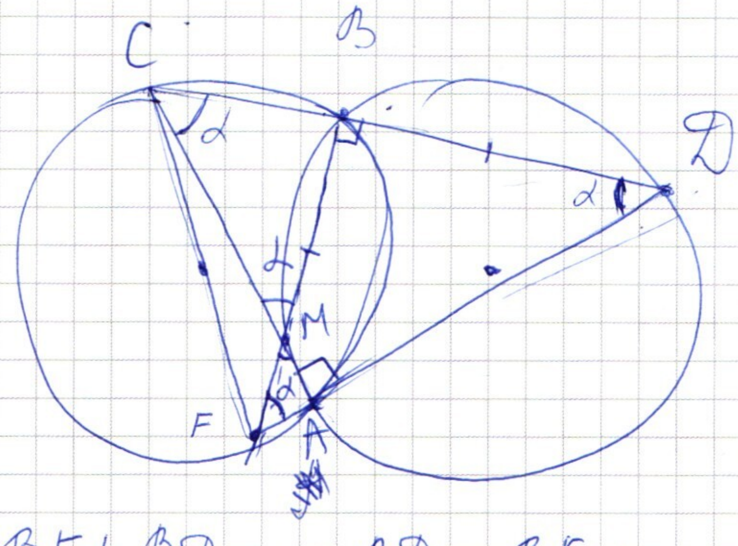
~~Ответ~~: $\frac{13}{9}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.





а) Т.к. $BF \perp BD$ и $BD = BF$, то $\triangle BFD$ — прямоуг., равнобед. $\angle BDF = BFD = 45^\circ$.

~~Т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, а $\angle BDA =$~~

Т.к. окр-ти одинаковые и углы BCA и BDA опираются на общ. ~~дугу~~ хорду окружностей, то они равны $\angle BCA = \angle BDA = 45^\circ$.

Т.к. $\angle BDA = \angle BDF$, то т. $A \in DF$.

Т.к. $BCA = 45^\circ$, опирается на AB, а также $\angle AFB = \angle BCA$ и опирается на AB, то т.F т. F лежит на 1ой окр.-ти с точками C, B, A.

$\angle CAF = 90° \Rightarrow CF$ – диаметр окр. и $CF = 2R = 26$.

б) M – т. перес. BF и AC.

$AF = a \Rightarrow MA = a$; ~~AC =~~

$AC = a + CM = BC\cdot\sqrt{2} + a$ (ΔBCM – прямоуг., р/бедр.)

$AC = 10\sqrt{2} + a$

$AF = a$

$(10\sqrt{2}+a)^2 + a^2 = 26^2$

$676 = 200 + 20\sqrt{2}\cdot a + 2a^2$

$\cancel{2a^2}$ $a^2 + 10\sqrt{2} - 238 = 0$

$a = \frac{-10\sqrt{2} + \sqrt{200+238\cdot 4}}{2}$

$a = \frac{-10\sqrt{2} + \sqrt{1152}}{2}$

$a = \frac{-10\sqrt{2} + 24\sqrt{2}}{2}$

$a = 7\sqrt{2}$

$S = \frac{a\cdot(a+10\sqrt{2})}{2}$

$S = \frac{17\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}}{2} = 17\cdot 7 = 119$

Ответ: 26; 119.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0.$

при $x\geq -2$

$4x^4+5x^3-9x^2+4x\geq 0.$

$x(4x^3-5x^2-9x+4)\geq 0.$

$x=2:$

$32-20-18+4=$

-38

~~$32-20+22$~~

$\frac{1}{2}-\frac{5}{4}-\frac{9}{2}+\frac{8}{2}=0$

$64-40-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}+\frac{9}{2}+\frac{8}{2}\geq 0.$

$4x^4+5x^3-9x^2+4x+4\geq 0.$

$(x+1)(4x^3-9x^2+4)\geq 0.$

$4x^3-9x^2+4\geq 0$

$(x+1)(x-2)(4x^2-x-2)\geq 0$

$(x+1)(x-2)(4x^2-x-2)$

$D=1+16\cdot 2=33$

$\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}.$

$+\quad -1\quad -\quad \frac{1-\sqrt{33}}{8}\quad +\quad \frac{1+\sqrt{33}}{8}\quad -\quad 2\quad +\quad x$

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

при $x\leq -2$

$4x^4+x^2+4x+5x^2(x+2)+4\geq 0.$

$4x^4+x^2+4x+5x^3+10x^2+4\geq 0$

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0.$

при $x=-4$

~~$64+64-40+44-8+$~~

~~при $x=-2$~~

$16x^3+15x^2+22x+4=0.$

$-\frac{1}{2}$

-2

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\geq 0$

$x^4+4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4$

$+\ 3x^4+3$

$3x^4+x^3+5x^2+3\geq 0$

$x^2(3x^2+x+5)+3\geq 0.$

$D<0$

$\Downarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y+x+8+y-x+8=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

окр. с $R=\sqrt{a}$ и ц. $(15;8)$.

$$S=\frac{abc}{4R}$$

$$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

(2). $\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}=S$

$$4S=\frac{40q^2 b_1(q^{1000}-1)}{(q^3-1)}$$

$b_1;\ qb_1;\ q^2b_1;\ q^3b_1;\ q^4b_1\ q^5b_1$

1 2 3 4 5 6

$$q,1=\frac{(q^{3000}-1)\,q^2(q-1)}{(q^{3000}-1)(q^2-q+1)(q^3-1)}=0,1=\frac{q^2(q-1)}{(q^3-1)}=\frac{q^2}{q^2-q+1}$$

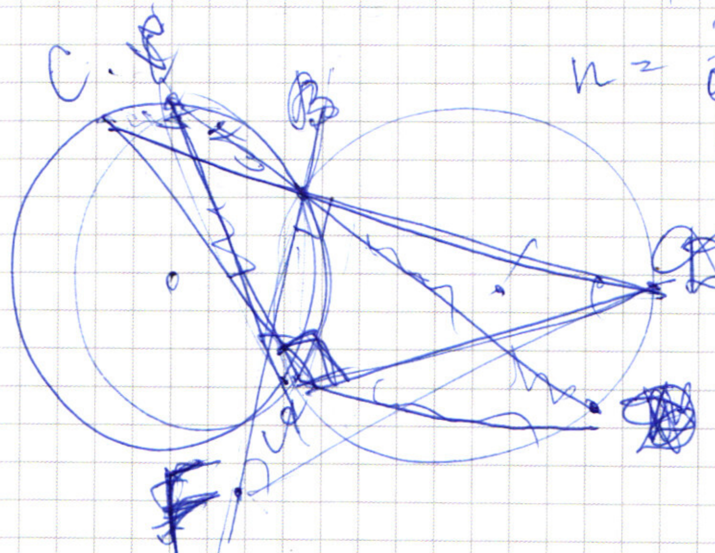
$10q^2-10q+10=q^2$

$9q^2-10q+10=0.$

$$n\cdot 8=\frac{3\cdot q b_1(q^{3000}-1)(q-1)}{(q^2-1)(q^{3000}-1)b_1}$$

$$n=\frac{3q(q-1)}{q^2-1}=\frac{3q}{q+1}$$

$$n=\frac{3q}{q+1}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1,1,2,2.

1122
1212
1221
2112
2211
2121

2

1,1,2,2

2·3

| 1 | 1 |

11

1234
1243
1324
1342
2134
2143
2314
2341

4·3·2,

16,

4·3·2=

$8\sqrt{2}$

64 − 64·4 + 200

64 − 256 + 200

3. $\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$

$-3 \pm \sqrt{\ }$

$(x+10)(x-4)$

$x=-10$

$x=4$

$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-64x+200} = (x-4)(x+10)$

$x \neq -10$.

$x^3-64x+200 = 8(x^2-8x+16)$

$x^3-8x^2+72=0$.

$-8-8\cdot4 = -8\cdot5 = -40$.

$64 - 8\cdot 16 = -64$

$4\sqrt{2}$

8 8·9

$4\cdot8-36+4=0$

$32-36+4=0$

$+\frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$.

$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x^3-64x+200} = (x+10)(x-4)$

$(x=-10$ — корень$)$

$16\cdot 5 = 80$

$x^3-64x+200 = (x-4)^2\cdot 8$

$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$.

$x^3-8x^2+72=0$.

$1+3\sqrt{13}+3\cdot13+13\sqrt{13}-64-64\sqrt{13}+200$

$176-48\sqrt{13}$

16.

$2+\sqrt{13}$

$121 \cdot 9\cdot 13 = 90$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

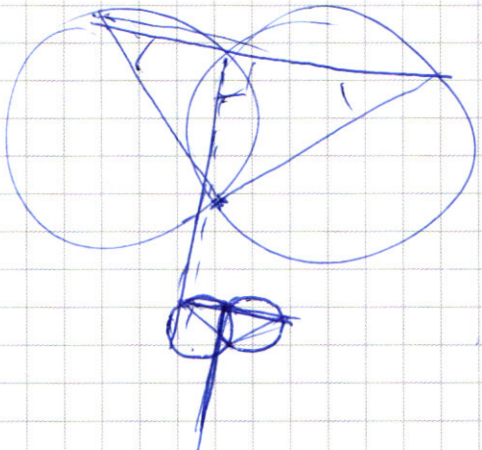
$(x^3-8x^2+72)'=0.$

$3x^2-16x=0.$

$x=0.$

$3x-16=0$

$x=\frac{16}{3}=5$



$216-8\cdot 36+72=0.$

$216-288+72=0.$

$(x-6)(x^2-2x-12)=0.$

$D=13.$

$x=1\pm\sqrt{13}.$

$1-\sqrt{13}$

$136-64\sqrt{13}$

$\frac{27}{64}-\frac{144+200}{256+200}$

1;2;5;7

1:12

3:2.

$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

1;1;2;2;5;5;7;7.

1	1	2	2	5	5	7	7
1	1	2	2	5	7	5	7
1	1	2	2	5	7	7	5
1	1	2	2	7	5	5	7
1	1	2	2	7	5	7	5
1	1	2	2	7	7	5	5

$(2):(1)\quad 4=\frac{39q^2(q-1)}{(q^3-1)}$

$4(q^3-1)=39q^2(q-1)$

$4q^2+4q+4=39q^2$

$35q^2-4q-4=0.$

$D=164+140$

$D=12.$

$S=\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$

$4S=\frac{3b_1q^2(q^{3000}-1)}{(q^3-1)}$

$x=\frac{2b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1}$

$\frac{xS}{S}=\frac{2b_1q(q-1)}{(q^2-1)b_1(q+1)}\quad\frac{2q}{q+1}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

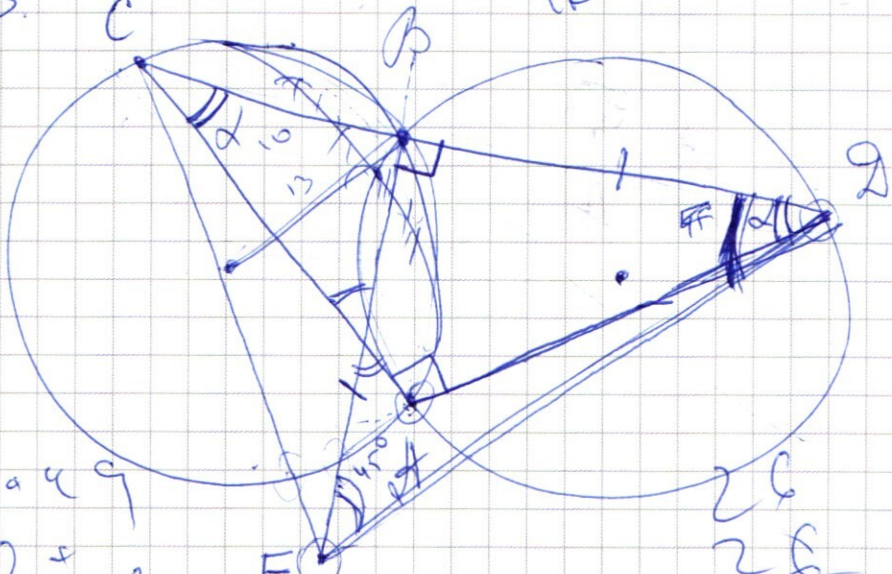
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BC = 10$

$R = 13.$

$S = \frac{abc}{4R} = \frac{ab}{2}$



70 · 49

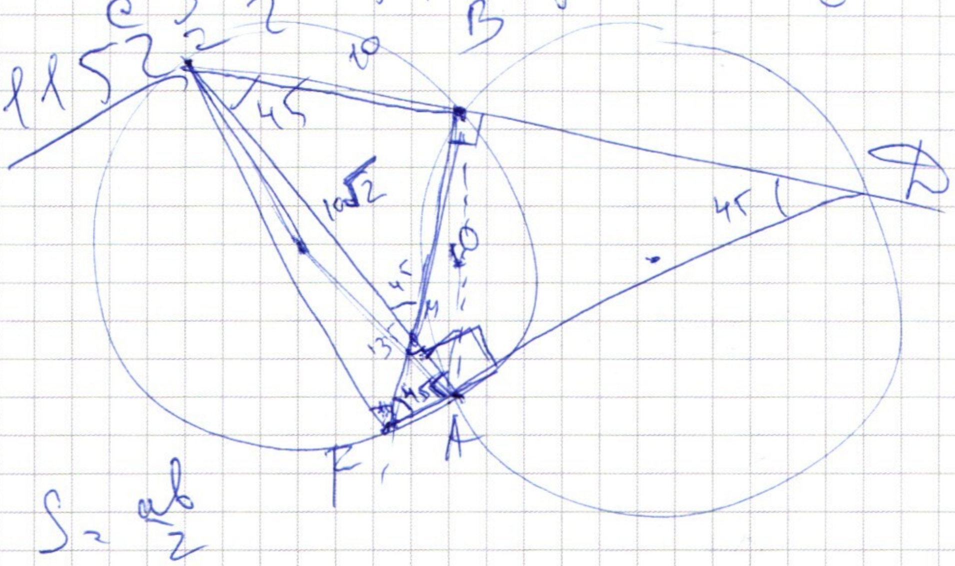
110

238

$26 \cdot 26 = 156 + 52 = 676$

~~$S_{\triangle FDA} = 576$~~

1152

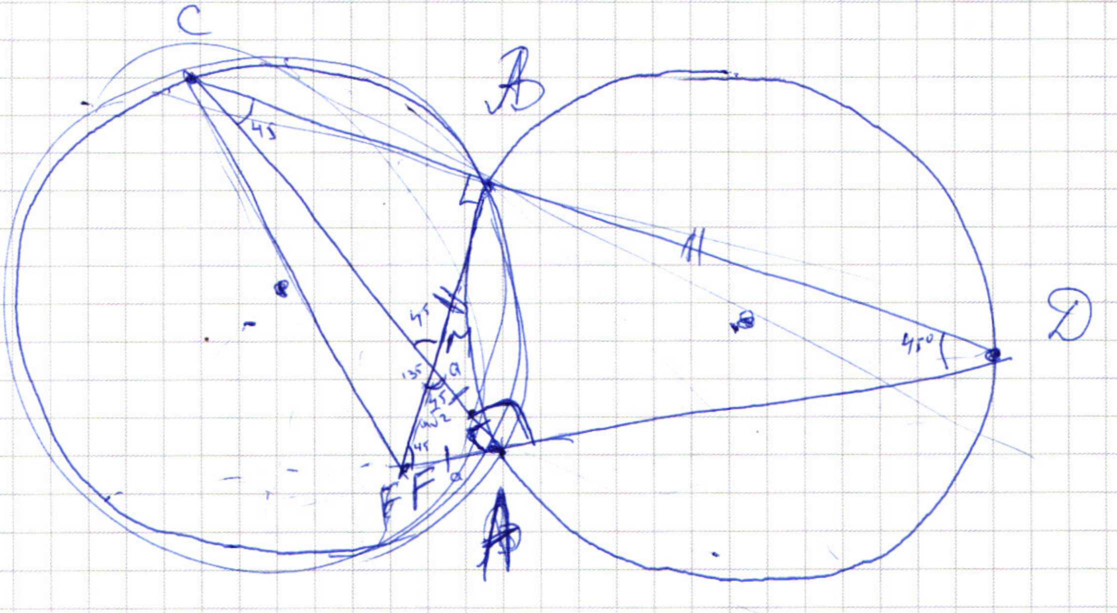


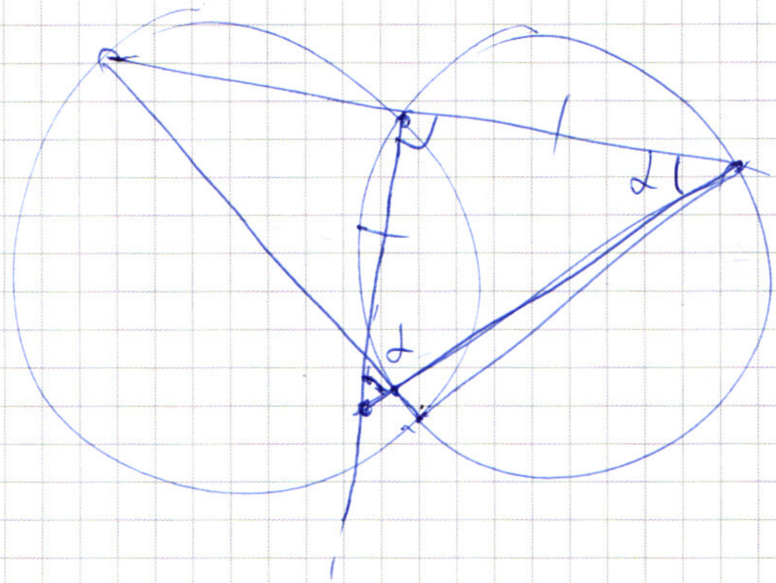
$S = \frac{ab}{2}$

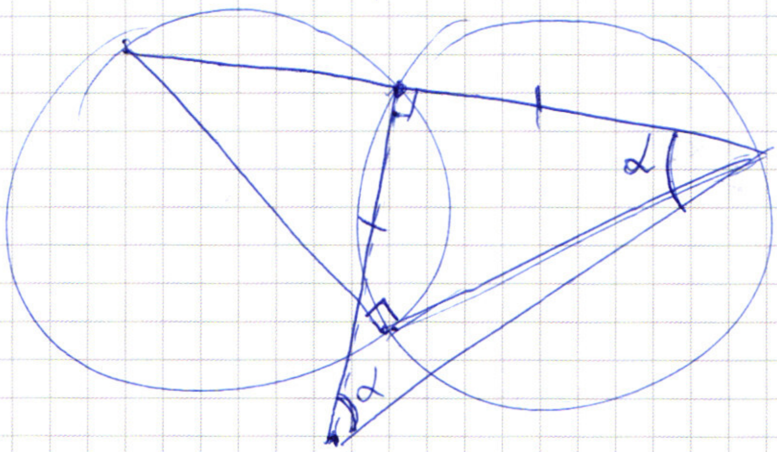
$AF = a$; ~~$FM = a\sqrt{2}$~~ $AC = AM + CM =$

$AC = \frac{(a + 10\sqrt{2})a}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)


C
B
D
A
F
45
45°


α
α


α
α