

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

7002 7 5 5 2 7 2] нам подпадают 2 различные

варианты:

1) 7 5 5 2 2 7 7 7

2) 7 5 5 4 7 7 7 7

1) $P_{\text{вс}} - 60 = \frac{8!}{2! 3! 2!} = 1680$

2) $P_{\text{вс}} - 60 = \frac{8!}{2! 4!} = 840$

$\Sigma = 1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520

$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} = \frac{67(q^{3000} - 1)}{q - 1} = 5$

$b_1 + b_2 + 50b_3 + b_4 + \dots + 50b_{3000} = 105 =$

$49b_3 + 49b_4 + \dots + 49b_{3000} = 295$

$49b_3 (q^2 + q^3 + \dots + q^{2998}) = 295 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$

$49 \left(\frac{q^2(q^{3000} - 1)}{q - 1} \right) = 295 \cdot \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$

$49q^2 = 9q^2 + 9q + 9$

$40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 1440 = 39^2$

$$q_1 = \frac{9+39}{80} = \frac{3}{5}$$

$$q_2 = \frac{9-39}{80} = -\frac{3}{8}, \text{ не подходит по условию}$$

$$q > 0$$

$$b_1 + 2b_1q + b_1q^2 + 2b_1q^3 + \dots + 2b_1q^{2499} =$$

$$= 5 + 61q + 61q^3 + \dots + 61q^{2499} =$$

$$= 5 + \frac{61(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{\frac{3}{5}61(q^{3000} - 1)}{(q-1)(q+1)} = k5 = k \frac{61(q^{3000} - 1)}{q+1}$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{3}{5} + 1\right)} = k; \quad k = \frac{3}{8} =)$$

$$\Sigma = 1 \frac{3}{8}5$$

$$\text{Ответ: } 1 \frac{3}{8}5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 70x + 24$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+5)(x+4)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} - x - 4\right) (x+5) = 0$$

$$\left[\frac{x-5}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80}} = x+4\right] \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x+4 \quad | \uparrow^2$$

$$\frac{1}{2}(x^3 - 4x - 80) = x^2 + 8x + 16 \quad | \cdot 2$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$] x=4$$

$$59 - 32 - 80 + 48 = 0$$

$x=4$ - найден

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \quad | x-4 \\ x^3 - 4x^2 \quad \quad \quad | x^2 + 2x - 12 \\ \hline 2x^2 - 20x \quad \quad \quad \\ 2x^2 - 8x \quad \quad \quad \\ \hline -12x + 48 \quad \quad \quad \\ -12x + 48 \quad \quad \quad \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{13} \quad \text{и проверим}$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{13}$$

$$(-1 - \sqrt{13})^3 - 4(-1 - \sqrt{13}) + 80 = 0$$

$$-1(-3\sqrt{13} - 3 - 13\sqrt{13}) + 4 + 4\sqrt{13} + 80 = 0$$

$$44 \sqrt{13} + 12\sqrt{13} + 84 = 0$$

$$11 \sqrt{3} \sqrt{13} (12)$$

$$121 \sqrt{13}; \quad \Rightarrow x = -1 - \sqrt{13} \text{ — не подходит}$$

$$\text{Ответ: } x = 0; 4; -1 - \sqrt{13}; -1 + \sqrt{13}$$

~4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 2x + 4 \geq 0$$

$$\textcircled{A} \quad x \geq 2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$1. \quad 2x^4 - 3x^3 \geq 0$$

$$x^3(2x - 3) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ 0 \quad \frac{3}{2} \end{array} \quad \Rightarrow x \in [2; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1.2 \quad 7x^2 - 4x \geq 0$$

$$x/(7x-4) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \end{array} \Rightarrow \text{fz} \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}} (2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4) dx \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in [2; +\infty)$$

⑦ 752

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Σ координат $z_0 = 1 \neq 1$ корень

$$\begin{array}{r} \overbrace{2x^4 + 3x^3} - 5x^2 - 4x + 4 \quad | \overbrace{x-7} \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\ \underline{5x^3 - 5x^2} \\ 0x^3 + 0x^2 - 4x + 4 \\ \underline{-4x + 4} \\ 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \end{array}$$

$$(x+1)(2x^3+5x^2-4) \geq 0$$

$$3x = -2$$

- $75 + 20 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ не подходит

$$(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) \geq 0$$

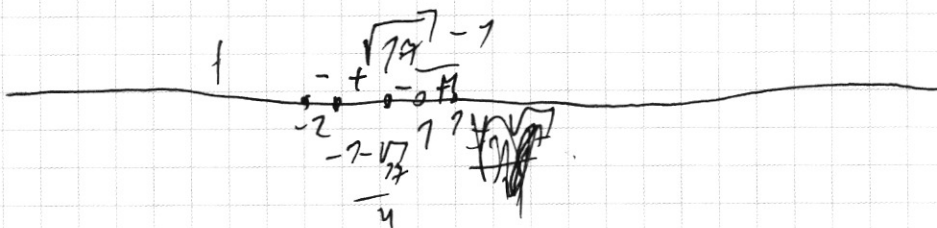
$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$$

$$(x-1)(x+2)\left(x + \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right) \geq 0$$



*

$$\text{Ответ: } x \in [-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17} - 1}{4}\right] \cup$$

$$[1, +\infty)$$

~7

$$\begin{cases} |y - 5 - x| + |y - 5 + x| = \pi \\ (|x - 8|)^2 + (|y - 5|)^2 = a \end{cases}$$

данная система имеет решение,
если $x \neq 0$ или $y \neq 0$, а другая
переменная $\neq 0$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y - 5 - x| + |y - 5 + x| = 12$$

$$1) \begin{cases} y \geq 5 + x \\ y \geq 5 - x \end{cases}$$

$$2y - 12 = 2x$$

$$y = x + 6$$

$$2) \begin{cases} y \leq 5 + x \\ y \leq 5 - x \end{cases}$$

$$y - 5 - x - y + 5 - x = 12$$

$$x = -5$$

$$3) \begin{cases} y \leq 5 + x \\ y \geq 5 - x \end{cases}$$

или

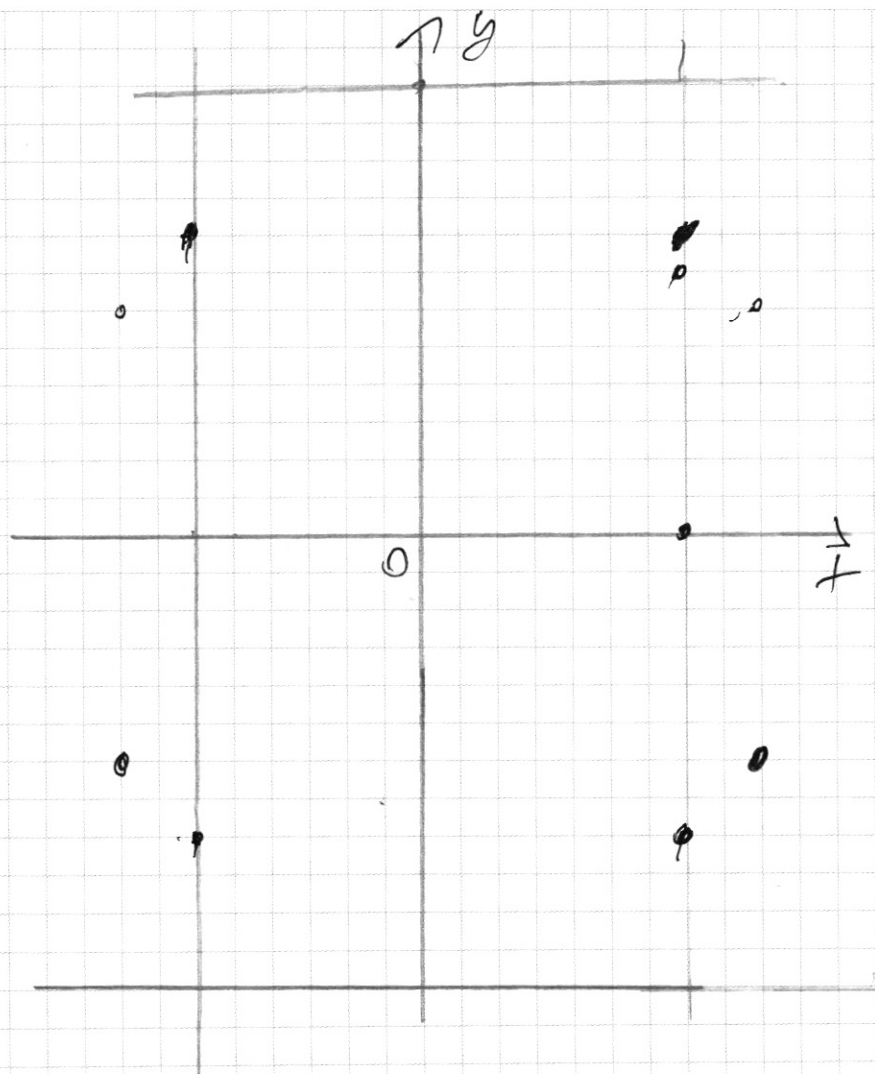
$$5 + x - y + y + x - 5 = 12$$

$$x = 6$$

$$4) \begin{cases} y \leq 5 + x \\ y \geq 5 - x \end{cases}$$

$$x + 5 - y - y + 5 - x = -12$$

$$y = 14$$

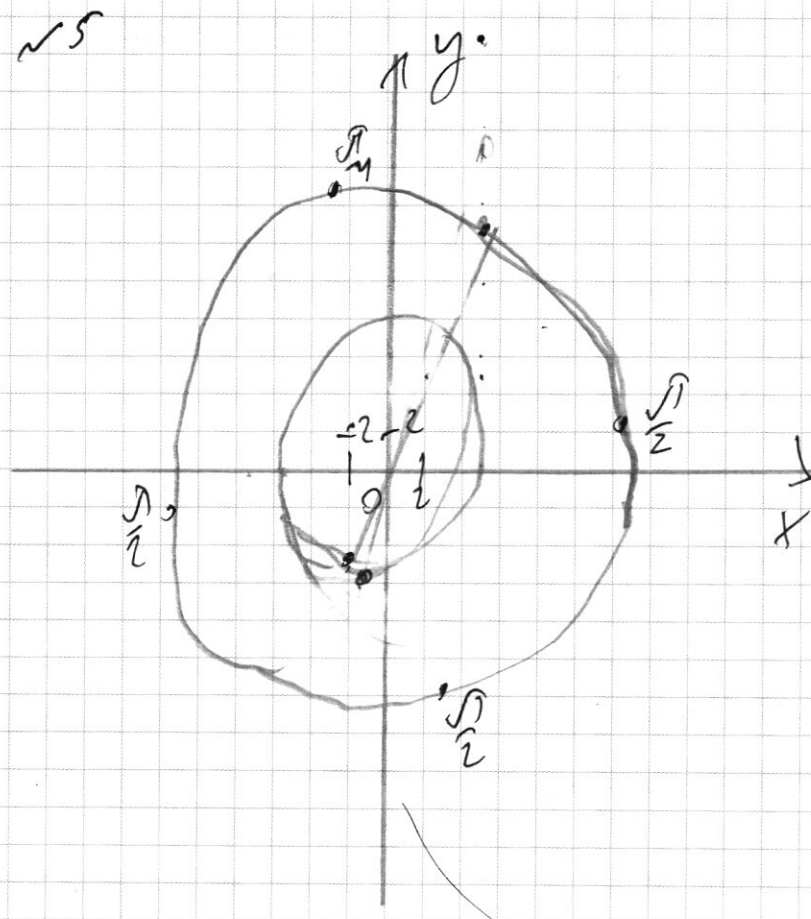


т. к. функция окружности имеет
на прямой $x=0$ и $x=1$,

т. к. функция окружности симметрична
относительно $(0;0)$ - если
в 1 четверти будет корень, то и
в 3 четверти тоже 2 корня быть не
может

Ответ: 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



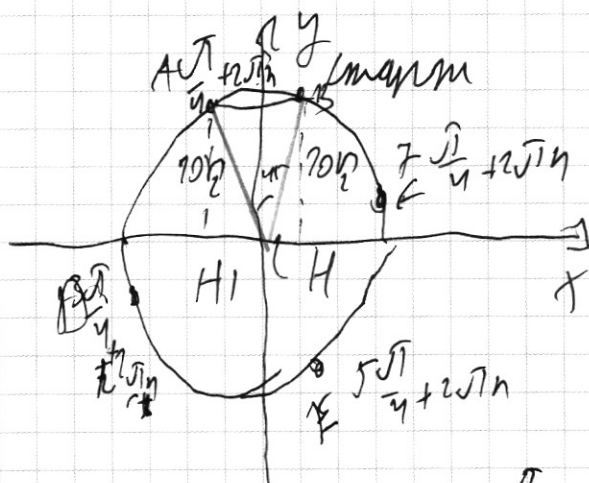
$$r = \sqrt{4 + 28} = 4\sqrt{2}$$

$$R = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = 10\sqrt{2}$$

Кратчайшее расстояние $R - r$ — это возможно
исход от $\sqrt{2}$ в одной четверти π и
в третьей $(\pi < \pi < 3\pi/2)$

Задача. Записать уравнение окружности и указать, за
которую её прообраз вращений
и т.д. получить, что

~~Вектор~~ ^{мин} ~~уравнения~~ $(0, \sqrt{2}i)$,
 но ~~вектор~~ ^{мин} ~~уравнения~~ $(\sqrt{2}, 0)$
 5×1 м. и. $U_2 = 2U_1$; $R = 2,5 \Omega$. Тогда
 от ~~суммарно~~ $(U = 4i)$, и
 мин ~~м. и.~~ будет в точке $5i$
 $4 \times 2,5 + 2 \times 1 = 10 + 2 = 12$, $n \in \mathbb{Z}$



$\angle ABC = 180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$
 как 180° , $\angle ACB = 45^\circ$

(м. и. $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$)

По теор. косинусов $AB^2 = 200 + 200$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 200 = 400 - 50\sqrt{2} =$

$$\begin{aligned}
 BH &= 5\sqrt{2} \quad \angle H = 5; \quad \sin HCB = \frac{5\sqrt{2}\sqrt{2}}{4} \\
 \cos HCB &= \frac{5}{4} \\
 \text{и } \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \sin \alpha & \quad \sin(\alpha + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}+1}{4} \Rightarrow AH = \frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}+1}{4}} = 40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \\
 &= \frac{-\sqrt{2}+1}{4} \\
 &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

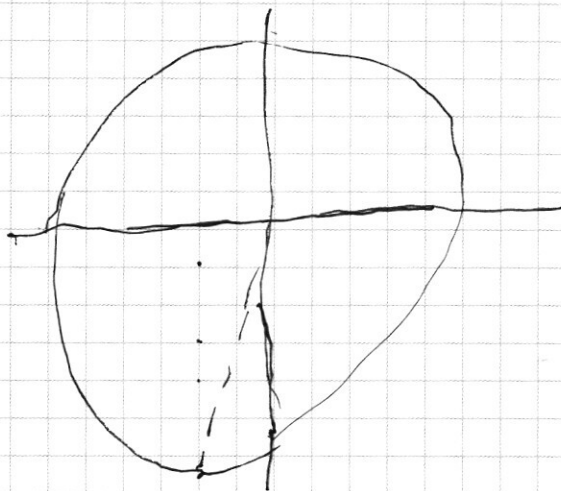
2) $10\sqrt{2} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{4}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{4}}{2}, \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{4}}{2}\right)$

Далее, по формулам приведения,
получаем следующие точки:

$D\left(-\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{4}}{2}, \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{4}}{2}\right);$
 $E\left(\frac{5\sqrt{4}-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{4}+5\sqrt{2}}{2}\right);$
 $F\left(\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{4}}{2}, \frac{5\sqrt{4}-5\sqrt{2}}{2}\right).$

Ответ: $A\left(\frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{4}}{2}, \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{4}}{2}\right);$
 $D\left(-\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{4}}{2}, \frac{5\sqrt{2}-5\sqrt{4}}{2}\right);$
 $E\left(\frac{5\sqrt{4}-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{4}+5\sqrt{2}}{2}\right);$
 $F\left(\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{4}}{2}, \frac{5\sqrt{4}-5\sqrt{2}}{2}\right).$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

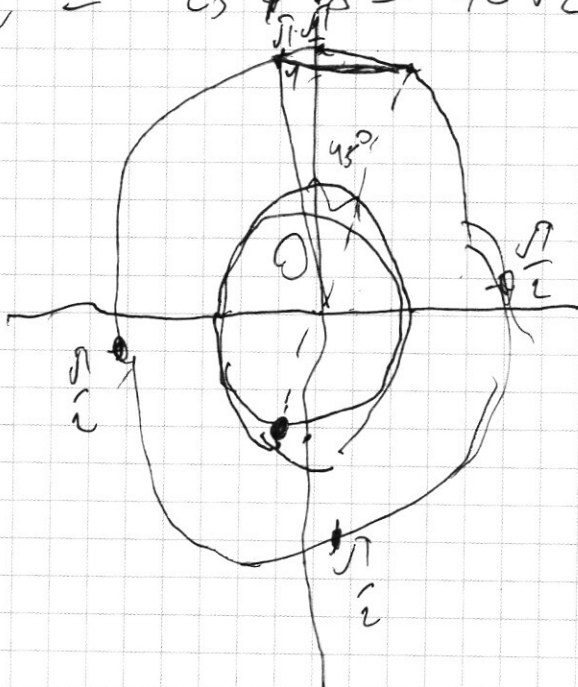


$$(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$$

$$|x-8| + |y+6| = 12$$

$$r^2 = 4 + 28 = 32 = 4\sqrt{2}$$

$$R^2 = 25 + 48 = 73 = 70\sqrt{2}$$



$$R-r = 5\sqrt{2}$$

$x=1$

$y=2$

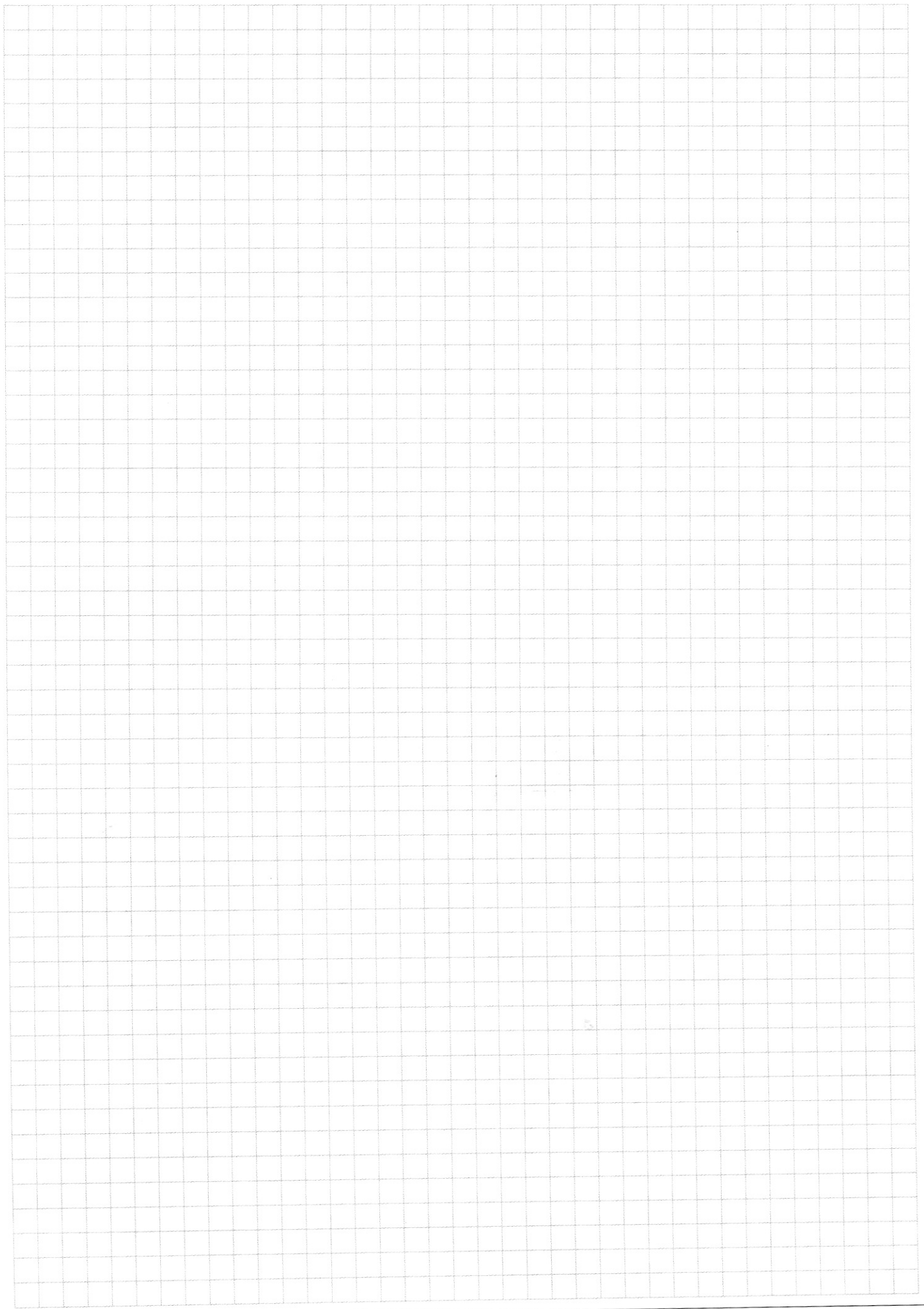
28

$$4x^2 = 16$$

$$4y^2 = 16$$

$$4x^2 - 4y^2 = 16$$

$$x^2 - y^2 = 4$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sim^3 \text{огз: } \sqrt{x^3 - 4x + 80} \geq 0$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} (x+6) \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} - x - 4 \right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x + 4 \quad (\uparrow^2)$$

$$\frac{1}{2} (x^3 - 4x + 80) = x^2 + 8x + 16$$

$$\frac{1}{2} x^3 - x^2 - 10x + 72 = 0 \quad (\div 2)$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 144 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 144 = 0$$

$$84 - 32 - 80 + 144$$

$$112 - 112 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 144 \quad | x-4 \\ \underline{x^3 - 4x^2} \\ 2x^2 - 20x \\ \underline{2x^2 - 8x} \\ -12x + 144 \\ \underline{-12x + 48} \\ 96 \end{array}$$

~4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \mid x - 2 \mid +4 \geq 0$$

$$\textcircled{0} x \geq 2$$

$$\textcircled{1} x < 2$$

$$\textcircled{0} 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 0x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4$$

$$2x^4$$

$$\frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + \frac{7}{4} - 2 + 4 \quad 3,5$$

$$x_1 \text{ и } x_2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + 3x^2 - 7x^2 + (4x^2 - 4)$$

$$2x^4 \vee 3x^3$$

$$x^3(x-3) \geq 0$$

$$x^2 \geq 4x$$

$$\cancel{x^2 - 4x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 5x^2$$

$$2x^4 - 5x^2 - 4x + 3x^3 + 4 \geq 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | x - 1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x^3 + 5x^2 = 4 \\ 2x^3 + 5x^2 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 5x^2 \\ \underline{5x^3 - 5x^2} \\ 0x^3 + 0x^2 - 4x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 = -\frac{1}{2} \\ x + 2 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

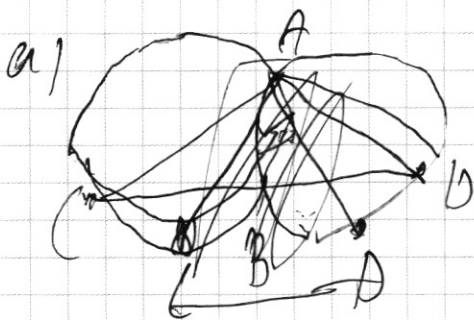
$$x = -2$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4 \quad | x + 2 \\ \underline{2x^3 + 4x^2} \\ x^2 - 4x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x^2 + 4x - 2 \\ 2x^2 + 4x - 2 \end{array}$$

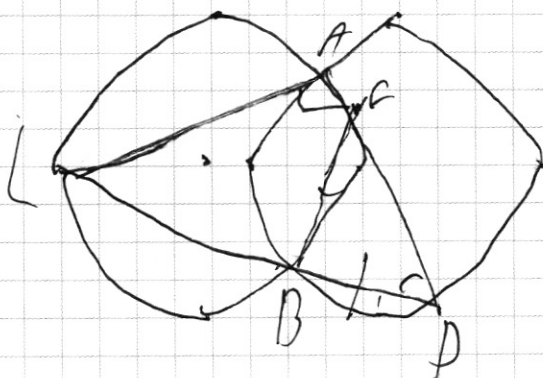
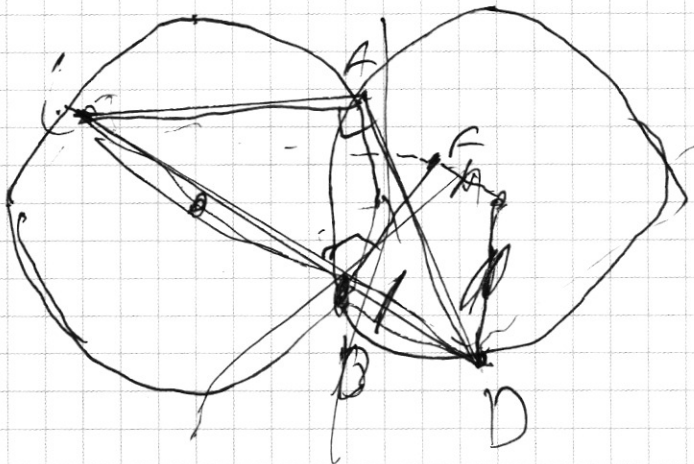
$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 4 \\ \underline{-2x - 4} \\ -2x - 4 \\ \underline{-2x - 4} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 + 75 \end{array}$$

$$D =$$

$$2x^2 + 4x - 2 \geq 0$$



7V	5V
2V	5V
3V	7V
4V	



$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 5x^2 - 4 \quad | \quad x+1 \\
 -2x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 x^2 + 0x \\
 -x^2 + x \\
 \hline
 x - 4 \\
 -x + 2 \\
 \hline
 -2x - 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{cases}
 |y - 5 - x| + |y - 5 + x| = 16 \\
 (|x+1-8|)^2 + (|y-5|)^2 = 2
 \end{cases}$$

$$a \approx 100 \quad [M; 84] + 35 \quad [40; 100]$$

$$x \approx 100$$

$$x \approx 100 \quad x \approx 100$$

$$|x+6| + |x-5| = 12$$

$$x = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$\begin{array}{l} 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{array}$$

~~4 \cdot 4~~

~ 3

$\left[\frac{8}{\sqrt{2}} \cdot 3 \sqrt{2} \right] \cdot 1$

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 1680$$

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} = 840$$

$$\Sigma = 2520$$

②

17 62 63 000

$$9 + 59 = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

$$499^2 = 99^2 + 9949$$

$$490 \quad \begin{array}{r} 152719 \\ 2 \quad 159 \\ 52 \\ 54 \end{array}$$

$$4092 - 99 - 9 = 0$$

$$D = 87 + 1440 =$$

$$= 1527 =$$

$$= 139$$

$$5063 \quad 5065 \quad \dots$$

$$4963 + 4965 \dots + 4963000 = 95$$

$$49(63 + 65 \dots + 63000) = 95$$

$$67 \frac{(9^n - 1)}{9 - 1} = 5$$

$$49(6(192 + 6(195 \dots + 6(19^{2999}))) =$$

$$= \frac{96(7(9^n - 1))}{9 - 1}$$

$$49(9^2 + 9^5 \dots) = \frac{9^{2999}}{9 - 1}$$

$$49 \cdot 9^2 \frac{(9^{3000} - 1)}{9^3 - 1}$$

$$= \frac{9(9^{3000} - 1)}{9 - 1}$$

$$49 \cdot \frac{9^2}{9^2 + 9 + 1} = 9$$