

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$4900 = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$ Заметим, что две семерки и две пятёрки по-прежнему встречаются в каждом таком восьмизначном числе. Остальные 4 цифры могут быть представлены в виде

- ① двух двоек и двух произвольных цифр.
- ② одной четвёркой и тремя произвольными цифрами. Также заметим, что нули встречаются не

каждо в вариантах „1-ого типа“: могут, т.к. тогда нуль равно 0.

~~8.7 · 6.5 · 4.3 · 1) первая цифра произвольная~~
~~2 2 2 2~~

~~2) первая цифра либо 2, либо 5, либо 7:~~

~~3 · (4 · 6.5 · 4.3 · 10 · 10) - лишние варианты~~
~~2 2~~

~~каждо в вариантах „2-ого типа“:~~

~~1) первая цифра произвольная:~~

~~9 · 4.6 · 5.4 · 3 ·~~
~~2 2~~

каждо в вариантах первого типа:

1) две произвольные цифры ~~не 2, не 5, не 7, не 0.~~

$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 28 \cdot 15 \cdot 216$

2) одна из произв. цифр 2, 5 или 7.

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \cancel{(2 \cdot 1)} \cdot \cancel{(3 \cdot 6)} \cdot 2 =$$

$$N = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 12$$

3) две произв. цифры либо 2, 5 и 7 (но все цифры различны между собой)

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 56 \cdot 30 = 1680$$

$3 \cdot 3$

4) две произв. цифры либо 2, 5 и 7 (все цифры одинаковы)

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 3 = 28 \cdot 15 \cdot 3 = 28 \cdot 45 = 1260$$

$$\left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 56 \\ \hline 30 \\ 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 45 \\ \hline 140 \\ 1120 \end{array}$$

кол-во вариантов второго типа:

12 вариантов

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 45 \\ \hline 140 \\ + 1120 \\ \hline 1260 \end{array}$$

...

...

...

...

...

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

Сумму геометрической прогрессии можно записать так: $v_1 + \dots + v_{300} = v_1 + v_1 q + v_1 q^2 + v_1 + v_1 q + \dots + v_{299} q^2 = (1 + q + q^2)(v_1 + v_1 q + v_1 q^2 + \dots + v_{299})$. Увеличив ~~на~~ члены с номерами, кратными 3, мы получим такую сумму: $(1 + q + 40 q^2)(v_1 + v_1 q + \dots + v_{299}) = 5(1 + q + q^2)(v_1 + \dots + v_{299}) \Rightarrow 1 + q + 40 q^2 = 5(1 + q + q^2)$ (почему $v_1 + \dots + v_{299} \neq 0$, т.к. все члены положительные).
 $4 - 4q + 35q^2$
 $1 + q + 40q^2 = 5 + 5q + 5q^2 \Rightarrow 35q^2 - 4q - 4 = 0$
 $D = 4 + 140 = 144 = 12^2$; $q = \frac{2 \pm 12}{35}$
 q не может быть отриц. По условию ³⁵ все члены

положительный $\Rightarrow q = \frac{2+12}{35} = \frac{14}{35} = 0,4$.

Посмотрим, как изменится сумма, если все её члены, стоящие на чётных местах, увеличить в 3 раза.

$$v_1 + 3v_2 + \dots + 3v_{3000} = v_1 + 3v_1q + v_3 + v_3q +$$

$$\dots + 3v_{2999}q = (1+3q)(v_1 + v_3 + \dots + v_{2999})$$

$$S = (1+q)(v_1 + \dots + v_{2999}) \Rightarrow \text{сумма увеличит-}$$

$$\text{ся в } \frac{1+3q}{1+q} \text{ раз. } \frac{1+3 \cdot 0,4}{1+0,4} = \frac{2,2}{1,4} =$$

$$= \frac{11}{7}.$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\left(\frac{x\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{4} \right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40 = (x+10)(x-4)$$

$$\Rightarrow 1) x = -10, x^3 - 64x + 200 = -1000 + 640 + 200 < 0$$

не подходит

$$2) x = -4$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4) \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^3 - 64x + 200 = (x-4)^2 \cdot 8 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~поиск~~ $\begin{cases} x \geq 4 \\ x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 178 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^3 - 8x^2 + 0x + 72 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x-6)(x^2-2x-12)=0 \end{cases}$

$\begin{matrix} 1 & -8 & 0 & 72 \\ 6 & 1 & -2 & -12 & 0 \end{matrix}$ $D = 1 + 12 = 13$
 $x = 1 \pm \sqrt{13}$

$\begin{cases} x \geq 4 \\ x = 6 \\ x = 1 + \sqrt{13} \\ x = 1 - \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow x = 6; 1 + \sqrt{13}$

Ответ: $\{6; 1 + \sqrt{13}\}$.

НЧ

$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \mid x+2 \mid +4 \geq 0$

1) $x \geq -2$

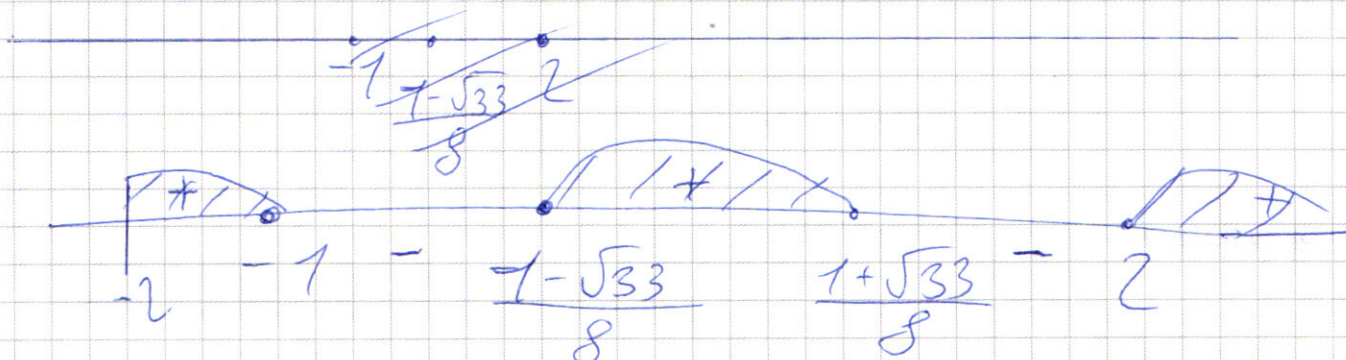
$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \mid (x+2) + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$\begin{matrix} 4 & -5 & -9 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 & 0 \end{matrix}$

$(x-2)(x+1)(4x^2-x-2) \geq 0$ $D = 1 + 32 = 33$

$(x-2)(x+1) \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8} \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right) \geq 0$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$



$$x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$2) x < -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 > 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 > 0$$

~~4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4~~ При $x < -2$ данное нерав-

сегда будет выполняться, т.к. при $x < -2$ сумма $(4x^4 + 5x^3)$ возрастает сильнее, чем убывает сумма $(5x^3 + 4x)$, ~~и~~ при $x = -2$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 > 0$$

$$x \in (-\infty; -2)$$

$$3) \begin{cases} x \in [-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

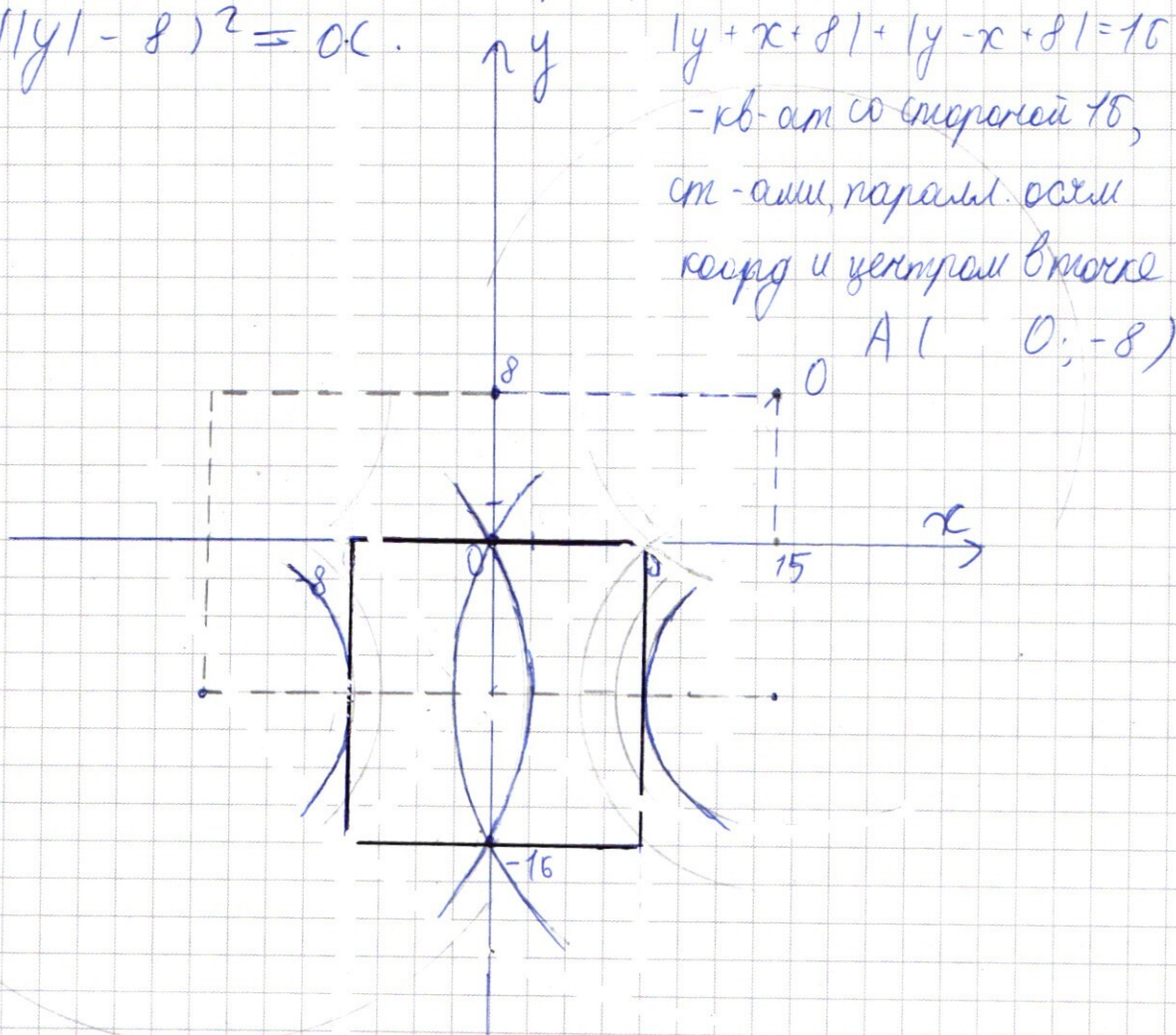
$$\text{Ответ: } (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16 \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 0 \end{cases}$$

Построим график ~~функции~~ $|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$ и уравнения $|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$ и изобразим семейство графиков $(|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 0$.



Рассмотрим семейство ~~прямых~~ графиков $(|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = 0$. Заметим, что

система будет иметь ровно два решения только в двух случаях.

1) две нижние окружности касаются нашего "вдврата";

2) окружности пересекают кв-м в точках $(0; 0)$ и $(0; -16)$

Рассмотрим ^{по радиусу} α в обоих случаях:

1) $\alpha = 15 - 8 = 7$

2) $\alpha = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

Ответ: При $\alpha = 7$ и $\alpha = 17$,

№ 5

Построим эту систему коорд.

Спишем т. бип. касадим радиус

обойх окружностей: $r_1 = \sqrt{7+8} = 3$

$r_2 = \sqrt{4+32} = 6$

Заметим, что расстояние

между радиусами наименьше,

когда ~~они~~ они находятся

на 1-й прямой, проходя-

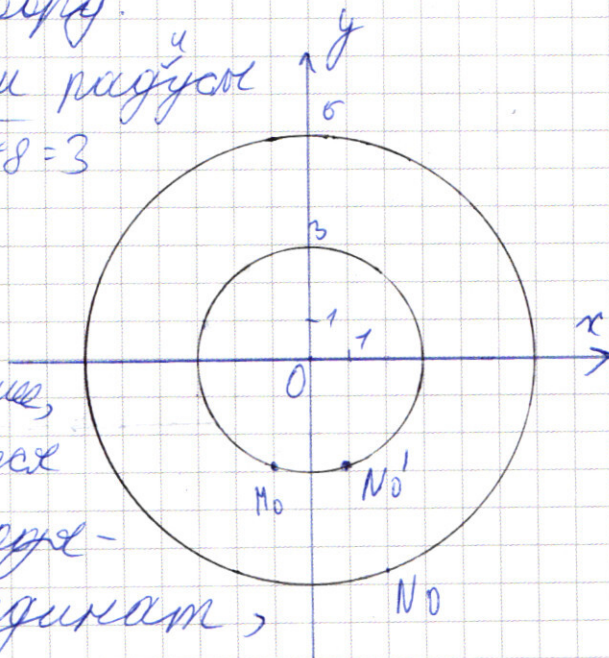
щей через центр координат,

то есть они прошли одинаковую часть окружностей, начиная с оси Oy.

Легче представить, что они движутся на 1-й окружности (допустим как окружности кароса),

но ск-ть ~~кар~~ кароса в 4 раза больше (т.к. скр.

пескар ~~изначальн~~ была в 2 раза длиннее)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ся-то карася в 2 раза больше). Тогда изначально
но пескарь был в №1.

~~Есть~~ С помощью системы урав. С помощью
уравнений движения можно вычислить
координаты, где встретятся карасо и
пескарь. После, учитывая ~~эти~~ эти
координаты на Z , мы получим, где бу-
дет пескарь, когда расстояние ~~между~~ между
рыбами наименьшее.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$4900 = 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 = \underbrace{4} \cdot \underbrace{7} \cdot \underbrace{5} \cdot \underbrace{2} \cdot \underbrace{5} \cdot \underbrace{2}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \wedge 6 \\ 216 \end{array}$$

$$4 \dots \dots$$

$$22 \dots$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \wedge 3 \\ 128 \end{array}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 1 = 0$$

$$x = -1 \pm 0$$

N2

$v_1 \quad v_1 q \quad v_1 q^2 \quad v_4 \quad v_4 q \quad v_4 q^2$

Сумма всех: $(q^2 + q + 1)(v_1 + v_4 + v_7 + v_{10} \dots + v_{2938})$

$$(40q^2 + q + 1) = 5(q^2 + q + 4)$$

N3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{x^3 - 64x + 700}) = x^2 + 6x - 40$$

$$\left(\frac{x\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{4} \right) (\sqrt{x^3 - 64x + 700}) = x^2 + 6x - 40$$

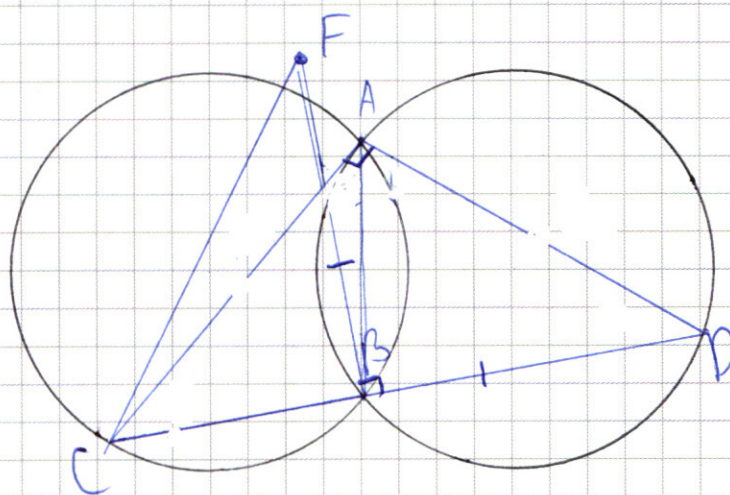
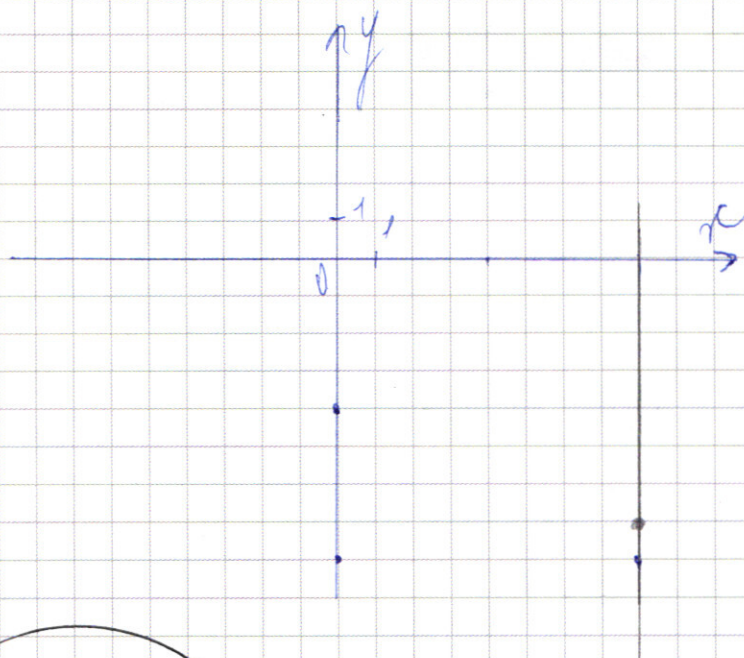
$$= (x+10)/(x-4)$$

$$\frac{52}{4} + x^3 - 64x + 701$$

1) 111
2) 511
3) 551
4) 555

5) 411
6) 641
7) 444
8) 541
9) 544
10) 444
11) 445

$$\begin{array}{r} 36 \\ \wedge 6 \\ 216 \\ 11) 475 \end{array}$$



$$1 - \pi = 11 + 1 - \pi = 12$$

$$|7x + 18| + |-x + 18| = -|25| +$$

- 10

$$|x-2| + |-x-2|$$

-15

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 170 \\ \hline 289 \end{array}$$