# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИ

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна $S$ Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма $S$ увеличится в 5 раз. А как изменится $S$, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

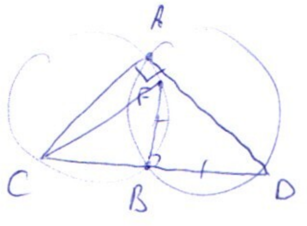
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD=90°$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF=BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по одну сторону от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$. б) Пусть дополнительно известно, что $BC=10$. Найдите площадь треугольника $ACF$.

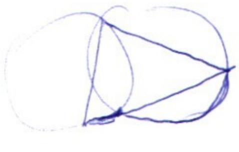
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$x^2$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 4900$ (разложим на простые множители)

| | |
|---|---|
| 4900 | 2 |
| 2450 | 2 |
| 1225 | 5 |
| 245 | 5 |
| 49 | 7 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

Каждая цифра числа не больше 9.

при разложении числа 4900 на простые множители получилось $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

т.е. каждая цифра ~~равна~~ кратна либо 2, либо 5, либо 7, и не кратна другим ~~цифрам~~ числам либо она равна 1.

~~цифр~~ т.е. в числе не может быть цифр 3, 6, 9, т.к. они кратны 3.

цифры 8 тоже не может быть, т.к. тогда произведение было бы кратно 8, может быть цифра 4, т.к. число кратно 4. Цифра 0 быть не может, т.к. тогда произв. было бы равно 0.

~~т.е. число может состоять из~~

Также мы не можем делать цифру равную произведению 2 и более простых множителей (кроме $4 = 2 \cdot 2$) т.к. даже при перемножении двух наименьших простых делителей (2 и 5) получится число $10 > 9$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

=> в числе есть 2 пятёрки и 2 семёрки.

1) В первом случае в числе есть одна четвёрка и => остальные 3 единицы.

посчитаем сколько таких чисел.

$C_8^2$ - способы расставить 5рки

$C_6^2$ - на оставшиеся места 7рки

$C_4^1$ - способы дорасставить четвёрку.

$C_3^3$ - способы дорасставить единицы.

по правилу произведения всего чисел:

$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{3! \cdot 0!} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 28 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 1 = 28 \cdot 60 = 1680.$

2) Во втором случае есть ещё две двойки и соответственно оставшиеся 2 единицы.

посчитаем числа:

$C_8^2$ - расстановка 5к.

$C_6^2$ - расстановка 7к

$C_4^2$ - расстановка 2к

$C_2^2$ - расстановка единиц.

по правилу произведения всего чисел:

$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 1 = 28 \cdot 15 \cdot 6 = 28 \cdot 90 = 2520$

Посчитаем общее кол-во чисел по правилу сложения:

$2520 + 1680 = 4200$

Ответ: всего 4200 чисел.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. ОДЗ: $x^3-64x+200 \geq 0$.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^3-64x+200}=(x+10)(x-4).$$

1) Если $x+10=0$, то $x=-10$.

проверим ОДЗ: $(-10)^3-64(-10)+(200)=-1000+640+200=-160 \Rightarrow$

$x=-10$ не уд. ОДЗ.

2) Если $x \neq -10$, то

$$\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt{2}(x-4)$$

т.к. в левой части корень, то

$x-4 \geq 0$, ~~все~~ $\Rightarrow$ возв. в квадрат

$$x^3-64x+200=8(x^2-8x+16)$$

$$x^3-\cancel{64x}+200=8x^2-\cancel{64x}+128$$

$$x^3-8x^2+72=0.$$

найдём целые корни по схеме Горнера

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -8 | 0 | 72 |
| 6 | 1 | -2 | -12 | 0 |

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0.$$

решим $x^2-2x-12=0$

$D/4=1+12=13.$

$x=1\pm\sqrt{13}$

по условию $x \geq 4 \Rightarrow$ проверим: $1-\sqrt{13}$ не подходит, т.к. $\sqrt{13}>3$.

$1+\sqrt{13} \vee 4$

$\sqrt{13} \vee 3$

$13 \vee 9$ $\Rightarrow$ корень $1+\sqrt{13}$ подходит $\Rightarrow$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{13} \\ x=6 \end{array}\right.$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\ge 0$

1) $x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2$, тогда

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\ge 0$

разложим по схеме Горнера:

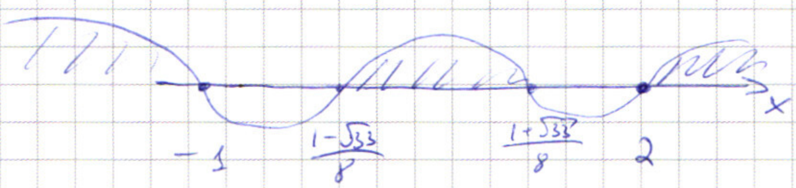
| | 4 | -5 | -9 | +4 | +4 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | -9 | 0 | 4 | 0 |
| 2 | 4 | -1 | -2 | 0 | |

$(4x^2-x-2)(x-2)(x+1)\ge 0$

$D=1+32=33$

$x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)(x-2)(x+1)\ge 0$.




сравним: $\frac{1+\sqrt{33}}{8} \overset{<}{\vee} 2$.

$1+\sqrt{33} \overset{<}{\vee} 16$

$\sqrt{33} \overset{<}{\vee} 15$

$33 \overset{<}{\vee} 225$.

сравним: $\frac{1-\sqrt{33}}{8} \overset{>}{\vee} -1$.

$1-\sqrt{33} \overset{>}{\vee} -8$.

$-\sqrt{33} \overset{>}{\vee} -9$.

$9 \overset{>}{\vee} \sqrt{33}$

$81 \overset{>}{\vee} 33$

т.к. по условию $x\ge -2$, то

$x\in[-2;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$.

2) $x<-2$, тогда

$4x^4+5x^3+11x^2+4x+4\ge 0$

$4x^4+5x^3+10x^2+x^2+4x+4\ge 0$

$\underbrace{x^2}_{\ge 0}(4x^2+5x+10)+\underbrace{(x+2)^2}_{\ge 0}\ge 0$.

$D=25-160<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2+5x+10$ всегда $>0$. (т.к. парабола, ветви вверх и $D<0$) $\Rightarrow$

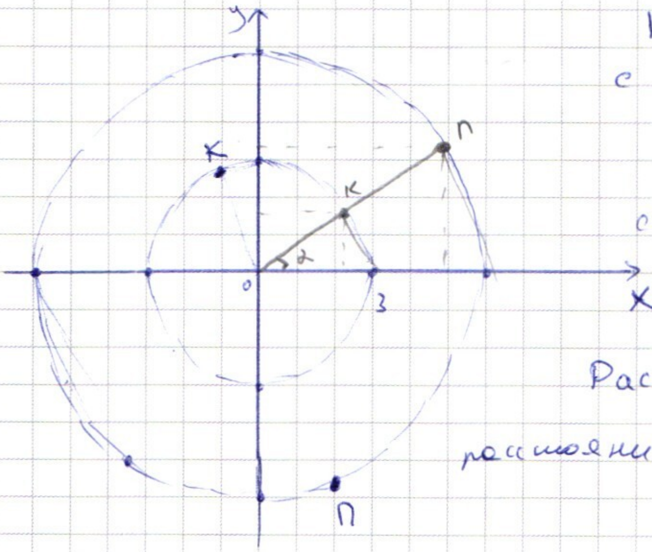
$\Rightarrow x^2(4x^2+5x+10)+(x+2)^2\ge 0$ при всех $x$, удовл. условию, т.е. при $x<-2 \Rightarrow$

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Рассмотрим плоскость.




Карась движется по окружности с радиусом $\sqrt{(-1)^2+(2\sqrt{2})^2}=3$. ($r$)

Пескарь движется по окружности с радиусом $\sqrt{2^2+(-4\sqrt{2})^2}=6$. ($R$)

Рассмотрим, в какой момент расстояние между ними минимально.

расстояние между ними: $\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cdot\cos\alpha}$, где $\alpha$ - угол между радиус-векторами к точке, где находится пескарь и к точке, где находится карась.

т.к. $\cos\alpha\in[-1;1]$, то минимальное значение $\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cdot\cos\alpha}=$
$=\sqrt{45-36\cos\alpha}$ (положительно при всех $\cos\alpha$) $\Rightarrow$ минимальное значение достигается при $\cos\alpha=1\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow$ в том случае, когда точки положения карася и пескаря лежат на 1й прямой, проходящей через центр (точка $(0,0)$)

Найдем длину окружностей: для карася $=6\pi$, для пескаря $12\pi$

Заметим, что, когда пескарь проплывает один круг, т.е. $12\pi$, карась проплывает в 2,5 раза больше $\Rightarrow 30\pi\Rightarrow$ он проплывает ровно 5 кругов $\Rightarrow$ рассмотрим период, за который пескарь проплывает круг, а карась 5.

~~в последующих~~

дальше такие периоды будут повторяться.

уравнение окружности карася: $x_1^2+y_1^2=9$.

пескаря: $x_2^2+y_2^2=36$.

рыбы находятся на одной прямой, проходящей через $(0,0)$, тогда tg углов наклона радиус-векторов у рыбок равны

~~=> координаты $x_1$ и $y_1$ карася~~ => получающиеся подобные $\Delta$ и координаты карася $x_1$ и $y_1$ относятся к координатам пескаря $x_2$ и $y_2$ также как и радиусы окр. =>

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{2}$. т.е $\begin{cases}2x_1=x_2\\2y_1=y_2\end{cases}$ ~~то~~

За один круг Карась ~~равно~~ не более 1 раза оказывается на 1 линии с пескарём

Пусть скорость карася $2{,}5v$, тогда у пескаря $v$.

карась ~~проходит~~ проплывает ~~за угол $\alpha$~~ круг за $\frac{2\pi r}{2{,}5v}$, пескарь за $\frac{2\pi R}{v}$, тогда карась изменяет положение на угол $\alpha$ за $\frac{2\pi r\cdot\alpha}{2{,}5v\cdot 2\pi}=\frac{\alpha r}{2{,}5v}$ (т.е. если угол между радиус-вект. и осью Ox у карася был $\alpha_0$, то стал $\alpha_0+\alpha$ за время $\left(\frac{\alpha r}{2{,}5v}\right)$)

аналогично пескарь проплывает угол $\beta$ за $\frac{\beta R}{v}$.

чтобы карась и пескарь были на 1й линии (проход. через $(0;0)$)

$tg(\alpha_0+\alpha)=tg(\beta_0+\beta)$ (tg углов должны быть равны) (а также знаки синуса и косинуса должны быть одинаковы у карася и у пескаря.)

$\alpha_0$ — угол в т.$(-1;\sqrt{5}r)$, $\beta_0$ — угол в т.$(2,-4\sqrt{5})$.

~~Когда~~ время их плавания до „встречи" на одной линии равно =>

$\frac{\alpha r}{2{,}5v}=\frac{\beta R}{v}$

$3\alpha=15\beta$ => $\alpha=5\beta$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём $tg(\alpha_0) = -2\sqrt{2}$

$tg(\beta_0) = -2\sqrt{2}$.

$tg(\alpha_0+\alpha) = tg(\alpha_0+5\beta) = \frac{tg\alpha_0 + tg5\beta}{1-tg\alpha_0 \cdot tg5\beta} = \frac{-2\sqrt{2}+tg5\beta}{1+2\sqrt{2}tg5\beta}$

$tg(\beta_0+\beta) = \frac{tg(\beta_0)+tg\beta}{1-tg\beta_0 \cdot tg\beta} = \frac{-2\sqrt{2}+tg\beta}{1+2\sqrt{2}tg\beta}$

$\frac{-2\sqrt{2}+tg\beta}{1+2\sqrt{2}tg\beta}$

Если тангенсы равны и корни и векторы в 1й четверти круга, то синусы и косинусы их местоположения равны.

$\begin{cases} \sin(\alpha+\alpha_0) = \sin(\beta_0+\beta) \\ \cos(\alpha+\alpha_0) = \cos(\beta_0+\beta) \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha\cdot\cos\alpha_0 + \cos\alpha\cdot\sin\alpha_0 = \sin\beta_0\cos\beta + \cos\beta_0\cdot\sin\beta \\ \cos\alpha\cdot\cos\alpha_0 - \sin\alpha_0\sin\alpha = \cos\beta_0\cos\beta - \sin\beta_0\cdot\sin\beta \end{cases}$

т.к. $\begin{cases} \sin\alpha_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos\alpha_0 = -\frac{1}{3} \\ \sin\beta_0 = -\frac{4\sqrt{2}}{6} \\ \cos\beta_0 = \frac{2}{6} \end{cases}$, т.е. $\frac{\text{координата}}{\text{радиус окр.}}$ $\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos\alpha_0 = -\frac{1}{3} \\ \sin\beta_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos\beta_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{3}\cdot\sin\alpha + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\beta + \frac{1}{3}\sin\beta \\ -\frac{1}{3}\cos\alpha - \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\alpha = \frac{1}{3}\cos\beta + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\beta \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha = -2\sqrt{2}\cos\beta + \sin\beta \\ -\cos\alpha - 2\sqrt{2}\sin\alpha = 1\cos\beta + 2\sqrt{2}\sin\beta \;|\cdot\cancel{2\sqrt{2}} \end{cases}$

$\cancel{(2\sqrt{2}-1)\cos\alpha}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha = -2\sqrt{2}\cos\beta + \sin\beta \;|\cdot 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}\cos\alpha - 8\sin\alpha = 2\sqrt{2}\cos\beta + 8\sin\beta \;|\cdot\cancel{2\sqrt{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} -9\sin\alpha = 9\sin\beta \\ -9\cos\alpha = 9\cos\beta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\sin\beta \\ \cos\alpha = -\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 5\beta = -\sin\beta \\ \cos 5\beta = -\cos\beta \end{cases}$

т.к. синусы углов противоположны, то $5\beta = \cancel{\beta + 2\pi k + \pi}$

между углами $5\beta$ и $\beta$ разница в $\pi k$, где $k$-нечётное

~~т.е. $|4\beta| = \pi k$. $\Rightarrow |\beta| = \frac{\pi k}{4}$~~

~~т.к. $\beta$-угол, который проходит несиорь, а во взятом периоде $|\beta| \le 2\pi$, то $\left|\frac{\pi k}{4}\right| \le 2\pi \Rightarrow |\pi k| \le 8\pi \Rightarrow |k| \le 8 \Rightarrow$~~

~~т.к. $k$-нечётное, то $k = 1, 3, 5, 7$, т.е.~~ ~~, т.к. $k$-нечётное,~~

~~то $k \in \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$.~~

~~1) $k = -7$, тогда~~ ~~Если $5\beta > \beta$, то~~

~~$5\beta = \beta - 7\pi$.~~

~~$4\beta = -7\pi$~~

~~$\beta = -\frac{7\pi}{4}$.~~

тогда $5\beta - \beta = \pi k$

$4\beta = \pi k$

т.к. $\beta$-поворот ~~чере~~ несиорь, то за период он проходит 1 круг $\Rightarrow \beta \le 2\pi \Rightarrow$

$\cancel{\pi k} \cdot \beta = \frac{\pi k}{4} \Rightarrow \frac{\pi k}{4} \le 2\pi$

$\pi k \le 8\pi$

$k \le 8$, т.к. $k$-нечётное,

то $k = 1, 3, 5, 7$.

1) $k = 1$.

$5\beta = \beta + \pi$.

$\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin(\beta+\beta_0) = \sin\beta\cdot\cos\beta_0 + \cos\beta\cdot\sin\beta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6} = \frac{\sqrt{2}-4}{6} \\ \cos(\beta+\beta_0) = \cos\beta\cdot\cos\beta_0 - \sin\beta\sin\beta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{4}{6} = \frac{\sqrt{2}+4}{6} \end{cases}$$

~~координаты~~

2) $k = 3$.

$4\beta = 3\pi$

$\beta = \frac{3\pi}{4}$ $\begin{cases} \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin(\beta+\beta_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{4}{6} = \frac{\sqrt{2}+4}{6} \\ \cos(\beta+\beta_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{\sqrt{2}+4}{6}. \end{cases}$$

3) $k = 5$.

$\beta = \frac{5\pi}{4}$ $\begin{cases} \sin\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin(\beta+\beta_0) = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4-\sqrt{2}}{6} \\ \cos(\beta+\beta_0) = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4-\sqrt{2}}{6} \end{cases}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $k = 7$.

$\beta = \frac{7\pi}{4}$ $\begin{cases} \sin\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\beta = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin(\beta+\beta_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6} = \frac{-\sqrt{2}-4}{6} \\ \cos(\beta+\beta_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6} = \frac{\sqrt{2}-4}{6} \end{cases}$$

координати пескаря: $x = \cos(\beta+\beta_0)\cdot \overset{R}{6}$

$y = \sin(\beta+\beta_0)\cdot 6$

~~$x_2 =$~~

~~$y_2 =$~~

~~Ответ~~

расстояние между рыбаком минимально, когда пескарь находится в координатах

$(\sqrt{2}+4; \sqrt{2}-4)$

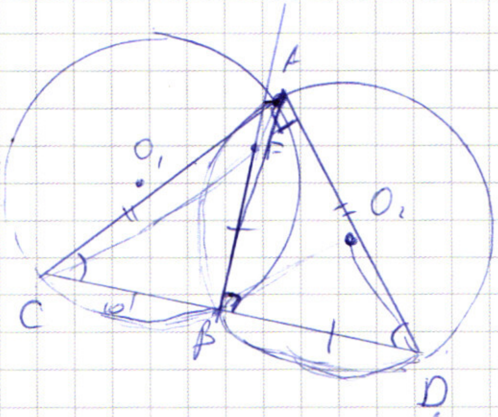
$(-(\sqrt{2}+4); \sqrt{2}+4)$

$(4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$

$(\sqrt{2}-4; -(\sqrt{2}-4))$

Ответ: $(\sqrt{2}+4; \sqrt{2}-4)$; $(-\sqrt{2}-4; \sqrt{2}+4)$; $(4-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2})$;
$(\sqrt{2}-4; -\sqrt{2}-4)$.

№ 6.




а) ~~угол BDA опирается на дугу $\overset{\frown}{AB}$ =>~~

~~$\angle BDA = \frac{1}{}$~~

дуга AB первой окружности равна дуге AB второй окружности, т.к. по т. в одной или равных окр. равные хорды стягивают равные дуги, а обе дуги стягивает общие хорда AB => $\angle BDA = \angle ACD$, т.к. они ~~[illegible]~~ опираются на ~~одну~~ равные дуги и их ~~[illegible]~~ вершины лежат на окружностях, а их ~~[illegible]~~ стороны пересекают окружности соотв. => по признаку равнобедренного △CAD - равнобедренный => AC = AD.

~~В [illegible]~~

в первой окружности $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{AB}$

во второй окружности $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{ABD} - \overset{\frown}{AB}$

т.к. AC = AD, то они стягивают равные ~~хорды~~ дуги в равных окружностях => $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ABD}$ => т.к. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}$, то $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD}$ => углы CAB и BAD равны, т.к. они в равных окружностях опираются на равные дуги, а также CB = BD, т.к. если в равных окр. дуги равны, то стягивающие их хорды равны => AB является медианой и биссектрисой в р/б треугольнике => AB - высота => перпендикуляр из CD из B - высота △ABC

т.к. △ADC - прямоугольный по условию и равнобедр. из доказанного, то в нём по св-ву прям.△ медиана равна половине гипотенузы => AB = BD, а т.к. по усл. BF = BD и F лежит на высоте (из вышедоказанного), то F = A =>

CF = CA = AD.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $\angle ABD$ прямой ($AB$ - высота к $CD$), то $\angle ABD$ опирается на диаметр $\Rightarrow$ $AD$ - диаметр окружности.

т.к. $AC = CF = AD$ и по условию радиус $r = 13$, то $d = 26 \Rightarrow AC = CF = AD = 26$.

Ответ: $CF = 26$.

б) $BC = 10$

т.к. $A = C \Rightarrow S_{ACF} = 0$

Ответ: $S_{ACF} = 0$.

№7.

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y-x+8| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$ - это 4 окружности с центрами $(15; 8)$; $(15; -8)$; $(-15; 8)$; $(-15; -8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

L M K N

решим $|y+x+8| + |y-x+8| = 16$

1) $\begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x \geq -8 \end{cases}$

$2y = 0$

$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x < 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y+x \geq -8 \\ y-x < -8 \end{cases}$

$2x = 16$

$x = 8 \Rightarrow \begin{cases} y > -16 \\ y < 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+x < -8 \\ y-x \geq -8 \end{cases}$

$-2x = 16$

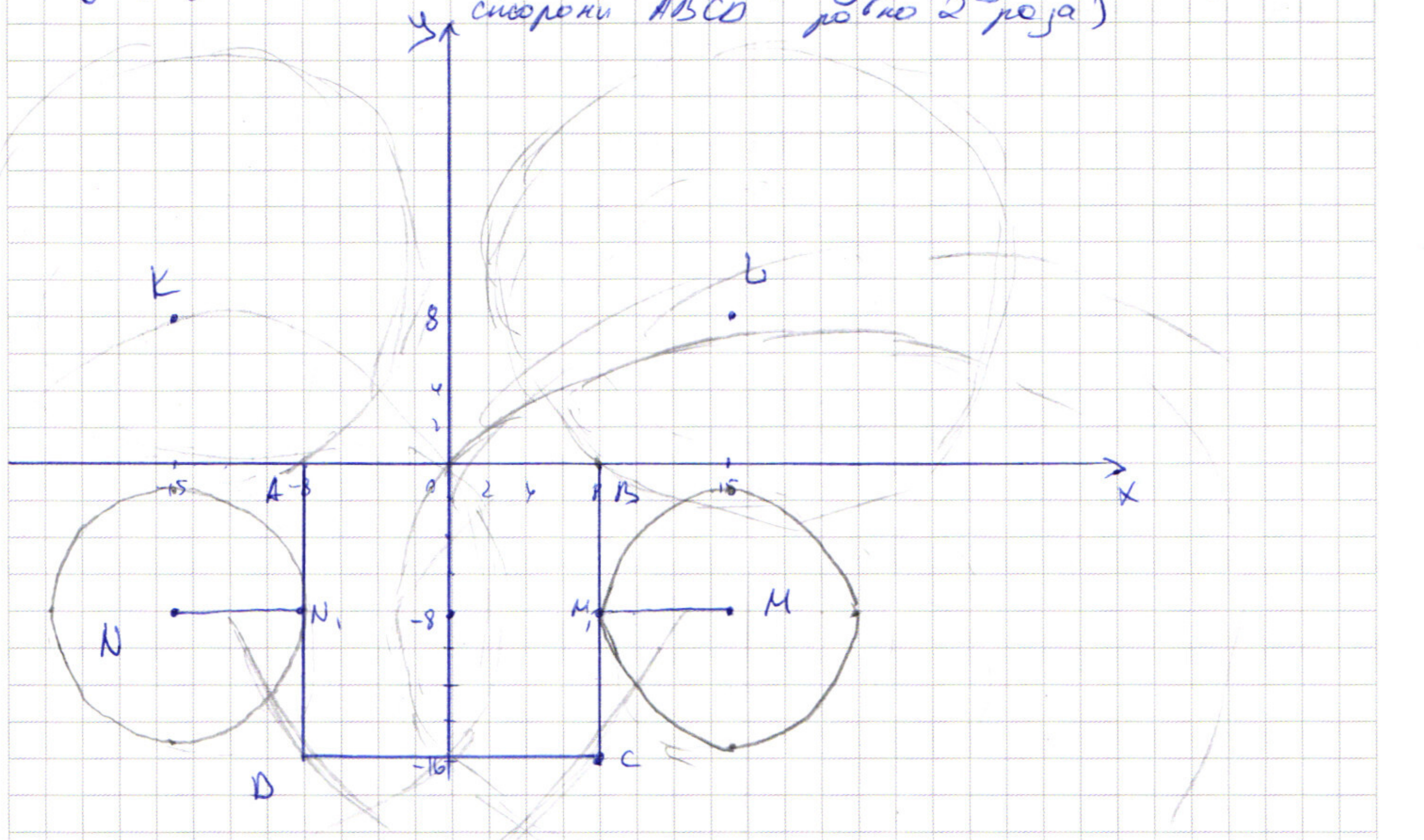
$x = -8$ $\begin{cases} y < 0 \\ y > -16 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y+x < -8 \\ y-x < -8 \end{cases}$

$-2y = 32$

$y = -16$ $\begin{cases} x < 8 \\ x > -8 \end{cases}$

Изобразим (2 решения есть, когда окружности пересекают стороны ABCD ровно 2 раза)




т.е. $|y+x+8|+|y-x+8|=16$ - стороны квадрата ABCD.

~~при а~~ ~~$a \in [0; 7)$~~

минимальное расстояние от K до квадрата $= KA = \sqrt{49+64} = \sqrt{113}$

от L до квадрата: $LB = \sqrt{113}$

от M до квадрата - перпендикуляр от M к BC $= MM_1 = 7$.

от N до кв. - перп от N до AD $= NN_1 = 7$.

1) при $\sqrt{a} < 7$ : 0 решений.

2) при $\sqrt{a} = 7$: 2 решения

3) при $\sqrt{a} > 7$ окружности с центрами M и N пересекают квадрат каждая 2 раза.

т.к. они симметричны относительно OY и квадрат ~~симметричен~~ относ. OY => в двух точках ~~они~~ совпадут =>

в точках (0; 0) и (0; -16) точки пересечения окр. и квадрата двух окружностей совпадут в силу их симметричности относ. Oy и

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 12

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

симметричности квадрата ABCD относительно Oy.,
$r = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

окружности с центрами в точках K и L ~~через~~ первый раз пересекают квадрат ~~в точке~~ при радиусе $LB = \sqrt{113}$ и последний раз при радиусе $LD = KC = \sqrt{24^2+225} = \sqrt{576+225} = \sqrt{801} = 3\sqrt{89}$
в промежутке между этими значениями каждая из них пересекает ABCD по 2 раза => т.к. $17 > \sqrt{113}$ и $17 < \sqrt{801}$, то
при $r=17$ ~~две~~ точек пересечения будет больше 2х.

4) окружности с центрами N и M последний раз пересекают ABCD при $r = NB = NC = MA = MD = \sqrt{23^2+64} = \sqrt{529+64} = \sqrt{593}$
$\sqrt{593} < \sqrt{801}$ => при $\sqrt{a} \in (\sqrt{593}; \sqrt{801})$ не менее 3х точек пересечения (одна из точек пересечения окружности с центром K и ABCD может совпасть с точкой пересечения окр. с центром L и ABCD, тогда точек пересечения этих окр и ABCD - 3)

5) при $\sqrt{a} = \sqrt{801}$ окр. с ц. в т. N и M не пересекают ABCD, окр с ц. в т. K и L пересекают в Т. D и C => 2 решения

6) при $\sqrt{a} > \sqrt{801}$ ни одна окр не пересекает ABCD => нет решений.

получаем, что 2 точки пересечения при

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{a}=7\\ \sqrt{a}=\sqrt{801}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=49\\ a=801\end{array}\right.$$

Ответ: $a=49$;

$a=801$.

№2.

$$\begin{cases} b_1, b_2, \dots b_{3000} - \text{геометрическая} \\ b_1+b_2+\dots+b_{3000}=S \\ b_1+b_2+40b_3+b_4+b_5+40b_6+\dots+40b_{3000}=5S \end{cases}$$

$b_1+3b_2+b_3+3b_4+\dots+3b_{3000}=?$

$\cancel{b_2^2=b_3 b_1 \Rightarrow b_3=\frac{b_2^2}{b_1}; \quad b_6}$ $b$

1) $b_1+b_2+40b_3+\dots+40b_{3000}=b_1+b_1q+b_1q^3+b_1q^4+\dots+b_1q^{2999}+40b_1q^2(1+q^3+q^6+\dots+q^{2997})=$

$=b_1(1+q+q^3+q^4+\dots+q^{2999})+40b_1q^2(1+q^3+q^5+q^{2997})=5S$

2) $b_1+3b_2+b_3+3b_4+\dots+3b_{3000}=$

$=b_1(1+q^2+q^4+\dots+q^{2998})+3b_1q(1+q^2+q^4+\dots+q^{2998})=$

$=b_1(1+q^2+q^4+\dots+q^{2998})(1+3q)=?$

3) $\cancel{5b_1+5b_2+\dots+5b_{3000}=5S=b_1+b_2+40b_3+\dots+40b_{3000}}$

$b_1+b_2+b_3+\dots+b_{3000}=$

$=b_1(1+q^2+q^4+\dots+q^{2998})+b_1q(1+q^2+q^4+\dots+q^{2998})=S \Rightarrow$

$b_1(1+q^2+q^4+\dots+q^{2998})(1+q)=S.$

$$\frac{b_1+3b_2+b_3+\dots+3b_{3000}}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_{3000}}=\frac{X}{S}=\frac{1+3q}{q}$$

$39b_3+39b_6+\dots+39b_{3000}=4S.$

$39b_1q^2(1+q^3+q^6+\dots+q^{2997})=4S.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$ – положительны.

$b_1 + b_2 + \ldots + b_{3000} = S$

$b_2 = b_1 \cdot q$ 　 $64 + 225 =$

$b_3 = b_1 \cdot q^2 \ldots$ 　 $b_{3000} = b_1 q^{2999}$

$b_2^2 = b_1 \cdot b_3$

$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{3000} = b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{2999}) = S$

$b_1 + b_2 + 40b_3 + \ldots + 40b_{3000} = b_1(1 + q + 40q^2 + \ldots + 40q^{2999}) = 5S$

$\Rightarrow 39b_3 + 39b_4 + \ldots + 39b_{3000} = 4S$

$24 \cdot 24 = 576$ 　 $576 + 225 = 801$

$b_1 + 3b_2 + b_3 + 3b_4 + \ldots + 3b_{3000} = b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{2999} + 3(b_2 + b_4 + \ldots + b_{3000}) =$

$= b_1 + b_1 q^2 + b_1 q^4 + \ldots + b_1 q^{2998} + 3b_1(q + q^3 + \ldots + q^{2999})$

$5|3^{<4}$

| | 1 | 0 | -64 | 200 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 10 | 36 | |
| -10 | 1 | -10 | 36 | |
| 5 | 1 | 5 | 39 | |
| -5 | 1 | -5 | | |
| 2 | 1 | 2 | -60 | |
| -2 | 1 | -2 | -60 | |
| 10 | 1 | 10 | | |
| 8 | 1 | 8 | 0 | |
| -8 | 1 | -8 | 0 | |

$901 | 9$

$\left(\frac{x}{2\sqrt2} + \frac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$

$\frac{x + 10}{2\sqrt2} \cdot \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x-4)(x+10)$

$\geq 0$

1) $x + 10 = 0$

$x = -10$

$-100 + 64 + 200 \geq 0$

2) $x \neq -10$

$x^3 - 64x + 100 = 8(x-4)^2$

$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$

$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$

$x^2 - 2x - 12 = 0$

$D/4 = 1 + 12 = 13$

| | 1 | -8 | 0 | 72 |
|---|---|---|---|---|
| -2 | 1 | -10 | -10 | |
| -3 | 1 | -18 | 33 | |
| 4 | 1 | -4 | -16 | |
| -4 | 1 | -12 | 48 | |

| | 1 | -8 | 0 | 72 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 1 | 9 | |
| -9 | 1 | -17 | | |

| | 1 | -8 | 0 | 72 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | -2 | -12 | 0 |

$200 | 2$

$2^3 \cdot 5^2$

$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8$

$23 \cdot 23 = 69 + 46 = 529$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7^2$

$x^2 + y^2 = 7^2$

- 1 | 0 | -64 | 200

☑ черновик 　 ☐ чистовик 　 Страница № 1

(Поставьте галочку в нужном поле) 　 (Нумеровать только чистовики)

$4x^4 + x^3 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$

1) $x \geq -2$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$\cancel{x(4x^3 - 5x^2 - 9x + 4) \geq 0}$

$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$

$(4x^2 - x - 2)(x+1)(x-2) \geq 0$

$D = 1 + 32 = 33$

| | 4 | 5 | 11 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 9 | 20 | 24 |
| -1 | 4 | 1 | 10 | |
| -2 | 4 | 3 | 5 | -6 |
| -4 | 4 | -11 | 55 | |
| $-\frac{1}{2}$ | 4 | 3 | 10,5 | |

| | 4 | +5 | 11 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | 1 | 10 | -6 | |
| 1 | 4 | 6 | | | |
| | 4 | | | | |

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$

$x^2(4x^2 + 5x + 10) + (x+2)^2$

$4 \quad D = 25 -$

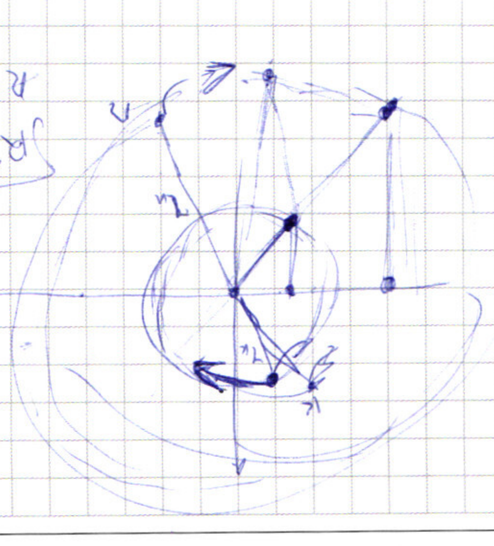
| | 4 | -5 | -9 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | -3 | |
| -2 | 4 | -13 | 17 | |
| 1 | 4 | -1 | -10 | |
| -1 | 4 | -6 | 3 | |
| 4 | 4 | 11 | | |
| -4 | 4 | -21 | | |
| $\frac{1}{2}$ | 4 | -3 | -10,5 | |
| $-\frac{1}{2}$ | 4 | -7 | | |
| $\frac{1}{4}$ | 4 | -4 | -10 | |
| $-\frac{1}{4}$ | 4 | -6 | | |

| | 4 | -5 | -9 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | -1 | -10 | 6 | |
| -1 | 4 | -9 | 0 | 4 | 0 |
| 2 | 4 | 3 | 2 | 0 | |

$\cos\alpha\cos\beta \cdot \sin\alpha\sin\beta \cdot \cos\alpha\cos\beta$

$(4x^3 + 5x^2 - 3x\cancel{\ldots})$

$= 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)