МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12, \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим на множители число 700:

$700 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

→ Т.к. ~~все цифры являются делителями числа 700, то чтобы посчитать~~ произведение цифр равно 700 → нам нужно расставить множители в на 7 мест, это и будет кол-вом восьмизначных чисел:

$C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^1\cdot C_3^3 = \frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 4\cdot 1 =$

$= 4\cdot 7\cdot \cancel{6}^{3}\cdot 5\cdot 4 = \cancel{3360}\ 1680$

Ответ: ~~3360~~ 1680

№2

$b_1, b_2, \dots b_{3000}$

Пусть знаменатель геометрической прогрессии равен q, тогда $S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$

$b_1 + b_2 + 50b_3 + \dots 50b_{3000} = S + 49(b_3 + b_6 + \dots b_{3000})$

$b_3, b_6, \dots b_{3000}$ — геометрическая прогрессия, где знаменатель равен q^3, а первый член $= b_1\cdot q^2$, тогда ~~его~~ её сумма равна $S_1 = \frac{b_1 q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$

Тогда:

$9\cancel{10}S = 49\cancel{b}\cdot S_1 \rightarrow \frac{9b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{49b_1q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$

$9(q^2+q+1) = 49q^2$

Где $\left[\begin{array}{l} q = 0{,}6 \\ q = -\frac{3}{8} \end{array}\right.$ (не подходит, т.к. все члены >0) $\rightarrow q = 0{,}6$

Рассмотрим сумму $b_1+2b_2+b_3+2b_4+\ldots+2b_{3000}$:

$b_1+2b_2+\ldots 2b_{3000} = S + b_2+b_4+\ldots b_{3000}$

$b_2, b_4, \ldots b_{3000}$ – геом. прогрессия, где знаменатель $= q^2$, а первый член $= b_1 q$, тогда общая сумма равна $S+\dfrac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1}$

$$\frac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1} : S = \frac{q}{q+1} = \frac{0,6}{1,6} = \frac{3}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1} = \frac{3}{8}S \rightarrow S+\frac{b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1} = 1\frac{3}{8}S$$

$\rightarrow$ Ответ: в $1\frac{3}{8}$ раза

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24$$

$$(x+6)\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = (x+6)(x+4)$$

$x \neq -6$ $\quad (x^3-4x+80 \geq 0)$

$$\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}} = x+4 \quad \text{(возведём в квадрат)}$$

$$x^3-4x+80 = 2x^2+16x+32$$

$$x^3-2x^2-20x+48=0$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2+2x-12=0 \end{array}\right. \qquad \frac{D}{4} = 1+12=13$$

~~Корень~~ $x = -1-\sqrt{13}$ не удовл. $x = -1\pm\sqrt{13}$ ~~оба корня~~

О.Д.З $(x^3-4x+80 \geq 0)$ ~~удовлетворяют О.Д.З.~~

$\rightarrow$ Ответ: 4; $-1+\sqrt{13}$; ~~$-1-\sqrt{13}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

1) $x\geq 2$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

$x^2(2x^2-3x+6)+(x-2)^2\geq 0$

При $x\geq 2$; $x^2\geq 0$, $2x^2-3x+6>0$, $x-2\geq 0$ $\rightarrow$ выражения ~~больше~~ ≥ 0 при всех $x\geq 2$

2) $x<2$:

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0$

Сумма коэффициентов 0 $\rightarrow$ один из корней уравнения $2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$ равен 1, тогда:

~~$(x-1)(2x^2+x-2)\geq 0$~~

~~$\left[\begin{array}{l} x=1 \quad 2x^2+x-2=0 \\ D=1+16=17 \end{array}\right.$~~

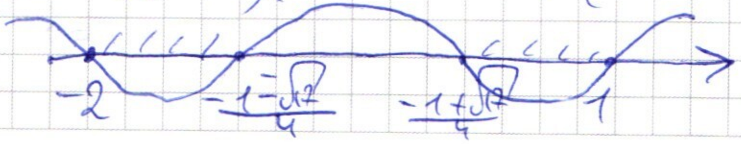
$(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geq 0$

$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geq 0$

$2x^2+x-2=0$

$D=1+16=17 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$

$(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)\geq 0$



$\rightarrow x \in$ ~~$\left[-2; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right]$~~

$\rightarrow \begin{cases} x \in \left[-2; -\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 1\right] \\ x \geq 2 \end{cases}$

Ответ: $\left[-2; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; 1\right] \cup [2; +\infty)$

№7

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

① $y \geq x+6$:

$y-6-x+y-6+x=12$

$2y=0 \rightarrow y=0$

$x+6 \leq 0 \rightarrow x \leq -6$

Подставим во второе уравнение:

$\begin{cases} (|x|-8)^2+36=a \\ x \leq -6 \end{cases}$

Т.к. y - единственный → это уравнение имеет 2 корня, ~~а т.к. $x \leq 6$~~ → $(|x|-8)^2$ должно принимать одинаковые значения при каких-то двух различных x, а т.к. $x \leq -6 \rightarrow |x| \geq 6 \rightarrow$
$\rightarrow 6 \leq |x| \leq 10 \rightarrow (|x|-8)^2 \leq 4 \rightarrow \begin{cases} a > 36 \\ a \leq 40 \end{cases}$

② $\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq x+6 \end{cases}$

$x+6-y+y-6+x=12$

$2x=12 \rightarrow x=6$; $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 12 \end{cases}$

Подставим во второе:

$(|y|-6)^2+4=a$

Аналогично получаем, что $(|y|-6)^2 \leq 36 \rightarrow \begin{cases} a > 4 \\ a \leq 40 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть водомерка за время t прошла дугу длиной L → жук прошёл дугу длины $\frac{L}{2}$. ~~Теперь рассмо Тепер~~ ~~у т~~ Так же угол до передвижения был α. Т.к. отношение радиусов $= 2{,}5$ → отношение углов до и после передвижения равно $2{,}5 \cdot 2 = 5$ → пока водомерка угол, жук пройдёт $\frac{\alpha}{5}$ → до первой встречи жук пройдёт угол $\frac{180}{4} = 45^\circ$ → ~~след~~ вторая точка будет через 135°, третья через 225° и последняя через 315°

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $y < x-6$

$x+6-y-y+6-x=12$

$-2y=0 \rightarrow y=0$

$0<x-6 \rightarrow x>6$

Подставим:

$\begin{cases} (|x|-8)^2+36=a \\ x>6 \end{cases}$

Аналогично $x\in(6;10) \rightarrow (|x|-8)^2<4$

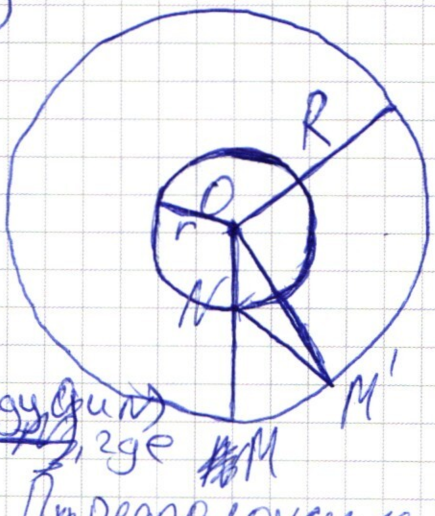
$\rightarrow \begin{cases} a>36 \\ a<40 \end{cases}$

Из 1; 2; 3 получаем, что

$a\in(4;40)\setminus\{36\}$

Ответ: $a\in(4;40)\setminus\{36\}$

№5



Во первых, докажем, что если расстояние между насекомыми кратчайшее $\rightarrow$ все 3 точки лежат на одной прямой (точки ~~O, M, N~~ M между O и N), где MN – кратчайшее расстояние). Предположим, что это не так, и $NM' \le NM$ (см. рисунок)

Тогда $NM = \frac{R}{\cancel{2r}} - r = r$, а ~~NM~~ $NM' > OM - ON = \cancel{NM}$
$\to NM' > NM$, противоречие $\to$ точки ONM лежат на одной прямой

• Теперь найдём количество этих точек: Т.к. скорость водомерки в два раза больше скорости паука, то:

$S = 2\pi r$, где r – радиус маленькой окружности

Точка M_0 в маленькой окружности $\to OM_0 = r$

$\vec{OM_0} = \{-2; -2\sqrt{7}\}$

$|\vec{OM_0}| = \sqrt{4+28} = 4\sqrt{2} = r$

Точка N_0 в большой окружности $\to$
$\to R = |\vec{ON_0}| = \sqrt{25+25\cdot 8} = 10\sqrt{2}$

~~Расст~~ $\to \frac{R}{r} = 2{,}5$

S водомерки $= 2\pi r$, а S паука $= 5\pi r$, причём
V водомерки $= 2 V$ паука $\to$ ~~пока~~ когда паук пройдёт 1 круг, водомерка пройдёт 5 кругов $\to$ все три точки будут 5 раз на одной прямой $\to$ всего 4 точки у паука, найдём их координаты:

Т.к. O, N, M лежат на одной прямой и $ON = 2{,}5\, OM \to 2{,}5\vec{OM} = \vec{ON} \to$ т.к. O имеет координаты $(0; 0) \to$ координаты точки N в 2 раза больше соответствующих координат точки N (т.е. $N(x; y) \to M\left(\frac{x}{2{,}5}; \frac{y}{2{,}5}\right)$. Изначально все 3 точки лежат на одной прямой, т.к. вектора OM_0 и ON_0 коллинеарны и не параллельны. ~~Пусть водомерка~~

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0$

$x=1$ – корень

$(x-1)(2x^3+5x^2-4) = 2x^4+5x^3-4x-2x^3-5x^2+4=$

$=2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$

$2x^3+5x^2-4=0 \qquad x=-2$

$(x+2)(2x^2+x-2)=0$

$2x^3+x^2-2x+4x^2+2x-4=$

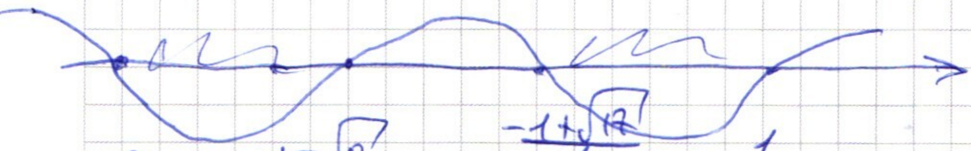
$=2x^3+5x^2-4$

$2x^2+x-2=0$

$D=1+16=17$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$(x-1)(x+2)(\ )(\ )\geq 0$



$-2 \qquad \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \qquad \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \qquad 1$

$\begin{cases} x\in\left[-2;\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4};1\right] \\ x\geq 2 \end{cases}$

Ответ: $\left[-2;\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4};1\right]\cup[2;+\infty)$

№5

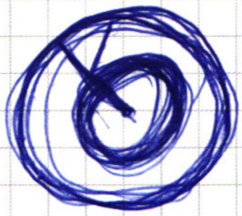
Пусть O – начало координат

$\vec{OM_0} = \{-2; -2\sqrt{7}\}$

$|\vec{OM_0}| = \sqrt{4+4\cdot7} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\vec{ON_0} = \{5; 5\sqrt{7}\}$

$R = \sqrt{25+25\cdot7} = 5\cdot2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$



Минимальное расстояние =

$= \Delta r = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, причём

эти точки лежат на прямой OM_0

• Пусть за время t жук прошёл круг, тогда водомерка прошла 2 больших круга, а длина большого круга в 2,5 р. ↑ малого → она прошла 5 кругов → 5 разных точек, ~~причём точки~~ причём точки O, M, N лежат на 1 прямой, причём соответствующие координаты в 2 раза отличаются

$v_в = 4v_ж$

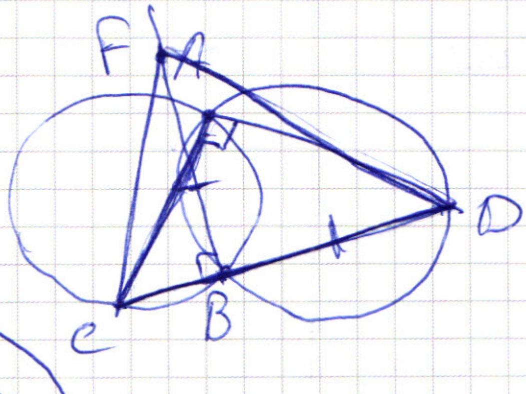
6 ~~$\cdot2$~~ ~~$-4\sqrt{2}+1$~~

$x\cdot4 - 8$

~~30~~

120·

№6



$\times\,28$

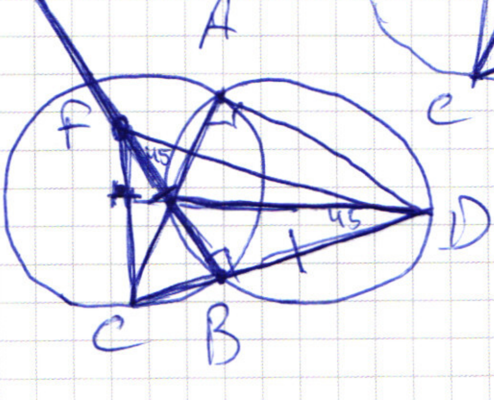
12

16

4

28

3360



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1$

→ цифры должны быть делителями 700, ~~причём среди~~

$\cancel{C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1}$

$C_8^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 =$

$= 45 \cdot 14 = 90 \cdot 7 = 630$

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

Ответ: 630

№2

$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q-1}$ 3 6 12 $\cancel{3 \cdot (2^3 - 1)}$

$10 S_{12} = S_1 + 49(b_3 + b_6 + \dots b_{3000}) = S_1 + 49(b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^5)$

– геом. прогрессия, где $b_1 = b_1 \cdot q^2$, $q^1 = q^2$

$S_2 = \frac{b_1 q^2 (q^{\frac{1000}{3}} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1 \cdot q^2 (q^{\frac{40}{3}} - 1)}{q^2 - 1}$ 1680

$S_3 = b_2 + b_4 + \dots b_{3000} = b_1 q + b_1 q^3 \dots$

$b_1 = b_1 q$

$q = q^2$

$S_3 = \frac{b_1 q \cdot (q^n - 1)}{q^2 - 1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+84$

$\frac{x+6}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^3-4x+80}=(x+6)(x+4)$

$\cancel{x\neq 6}$ $x\neq -6$

$\sqrt{\frac{x^3-4x+80}{2}}=x+4$

$x^3-4x+80=2(x^2+8x+16)$

$x^3-2x^2-20x+48=0$

$x^3+2x^2-12x-4x^2-8x+48=$
$=x^3-2x^2-20x+48$

$x=4$ - корень

$64-32-80+48=0$

$(x-4)(x^2+2x-12)=0$

$x^2+2x-12=0$

$\frac{D}{4}=1+12=13$

$x=1\pm\sqrt{13}$ оба корня подходят

Ответ: 4; $1\pm\sqrt{13}$

№4

$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$

① $x\geq 2$

$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$

$2x^4-3x^3+6x^2+(x-2)^2\geq 0$

$x^2(2x^2-3x+6)+(x-2)^2\geq 0$

т.к. $x\geq 2\to 2x^2-3x+6\geq 0$; $x^2\geq 0$; $x-2\geq 0$

→ верно

$\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

② $x<2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

$|y-x-6|+|y+x-6|=12$

① $y \geq x+6$: $y \geq x-6$

$y-x-6+y+x-6=12$

$y=0 \to x \leq -6$

$(|x|-8)^2+36=a$

$|x| \geq 6$

$\to |x|-8 \geq -2$

$\cancel{a \geq 36}$ $36 \leq a \leq \cancel{52}\ 40$

② $\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x-6 \end{cases}$

$x+6-y+y+x-6=12$

$2x=12$

$x=6$

$(|y|-6)^2+4=a$

$\begin{cases} a \geq 4 \\ a < 36 \end{cases}$

$y \leq 12$

$y \geq 0$

Ответ: $(4;52] \setminus \{36\}$

③ $y \leq x-6$

$x+6-y-y-x+6=12$

$-2y=0$ $y=0$

$\to x>6$

$(|x|-8)^2+36=a$

~~$36 < a < 52 \setminus \{40\}$~~

$36 < a < 40$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2

$S = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$

$10S = \frac{10b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$

$49(b_3+b_6+b_9) = 49(b_3+b_3\cdot q^3+\ldots$

$S_1 = \frac{b_3(q^{3000}-1)}{q^3-1} = \frac{49b_1\cdot q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$

$\frac{9b_1(q^{3000}-1)}{q-1} = \frac{49b_1q^2(q^{3000}-1)}{q^3-1}$

$9(q^2+q+1) = 49q^2$

$40q^2 - 9q - 9 = 0$

$D = 81 + 4\cdot 9\cdot 40 = 1440 + 81 = 1521$

$q = \frac{9\pm 39}{80} \to q = \frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} =$

$= 0,6$

$S_2 = \frac{b_2\cdot(q^{3000}-1)}{q^2-1} = \frac{b_1q\cdot(q^{3000}-1)}{q^2-1} : \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} =$

$= \frac{q}{q+1} = \frac{0,6}{1,6} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \to$ в $1\frac{3}{8}$ раза

Ответ: в $1\frac{3}{8}$ раза

$16 \times 9 = 144$

$1440 + 81 = 1521$

$39 \times 39 = 1521$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)