

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

157

Заметим, что $700 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$,
т.е., искомого числа содержат либо цифры $1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7$,
либо $1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7$ (если мы умножили одну из цифр
на фигуру, то будет число, состоящее более, чем из 1 знака
(за исключением умнож. на 1 и $2 \cdot 2$, которое мы учли во втором
различии)). ~~Расс~~

Итак, в первом случае цифры $1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7$. Кол-во чисел
определяется по формуле перестановки с повторениями
 $P(3, 2, 2, 1) = C_{3+2+2+1}^3 \cdot C_{2+2+1}^2 \cdot C_{2+1}^2 \cdot C_1^1 = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 =$
 $= \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{1!}{0! \cdot 1!} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} =$
 $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680 = \frac{(3+2+2+1)!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!}$

Во втором случае цифры $1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7$, по формуле
перестановки с повторениями рассмотрим числа
 $P(4, 1, 2, 1) = C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{1!}{0! \cdot 1!} =$
 $= \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 42 \cdot 20 = 840 = \frac{(4+1+2+1)!}{4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!}$

Итак, по правилу сложения всего $1680 + 840 = 2520$ способов,
т.е. 2520 чисел, удовл. условию.

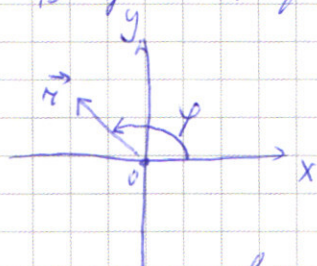
Ответ: 2520.

Итак, пусть некоторое число заданное произведением из
начала коорд. Вектор радиус-вектор $\vec{r}_2$, водомерки $\vec{r}_1$.

$$\text{Тогда } r_2 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$$

$$r_1 = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

Введем полярную систему коорд. с углом φ , как на рис.



т.е., скорости водомерки в 2 раза больше

или скорости v_2 лодки $v_1 = 2v_2$, а $r_1 = \frac{2}{5}r_2$.

По условию скор. движения лодки ω_2 и

водомерки ω_1 относятся как

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\frac{v_2}{r_2}}{\frac{v_1}{r_1}} = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

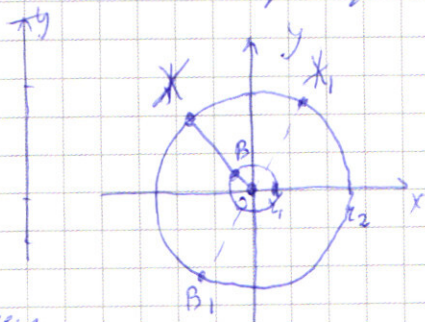
Рассим к лодке изобразим угол φ_2 , у водомерки φ_1 . Тогда

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{5\sqrt{7}}{5} = \sqrt{7}$$

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{-2\sqrt{7}}{-2} = \sqrt{7}$$

$\varphi \rightarrow$ они находятся на одной дуге окружности
($\varphi_1 \neq \varphi_2$, т.е., по-в и гетверши, а по-в и гетверши)

Пусть до первого водомерки пройдем угол $\Delta\varphi$. Тогда водомерка
на пройдем $5\Delta\varphi$ (верным, очевидно, что расстояние крат-
чайшее, когда от поворота на один и тот же радиус
дуги ω с центром в $(0,0)$, и оно будет $r_2 - r_1$).



X - лодка
B - водомерка
X1 - X в начале
B1 - B в начале

$$XB = r_2 - r_1$$

В другой стороне, между ними

Этот угол $\pi \Rightarrow 5\Delta\varphi - \Delta\varphi = \pi$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Тогда лодка вывел координаты центра

$$\begin{aligned} \text{на угол } \varphi_0 = \varphi_2 + \Delta\varphi, \quad \sin \varphi_0 &= \sin(\varphi_2 + \Delta\varphi) = \\ &= \sin \varphi_2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \varphi_2 = \\ &= \frac{5\sqrt{7}}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{7}+1)}{10 \cdot 2} = \\ &= \frac{4+\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

Далее, т.к., $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \in \mathbb{N}$, то на 1 оборот лодки пройдем 5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

объектов В. А. на Т.р., после встречи при угле φ_0 до нормаль-
ного направления в этот угол они сфокусируются и встретятся. (Пусть
клетки раз двух сфокусируются на $\Delta\varphi_0$. Тогда водители про-
ходит $2\pi + \Delta\varphi_0 = 5\Delta\varphi_0$

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Т.р., они будут встречаться при углах
 $\varphi_i = \varphi_0 + k\Delta\varphi_0 + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

А т.к., $\sin \varphi_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $\cos \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_2 \cos \frac{\pi}{2}}{\cos(\varphi_2 + \Delta\varphi)} = \cos \varphi_2 \cos \frac{\pi}{4} =$
 $-\sin \varphi_2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{5}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5(\sqrt{2}-1)}{4}$, то

все 4 направления (т.к., $\sin$ и $\cos$ имеют период 2π , а $k=4$)
 $4\Delta\varphi_0 = 2\pi$, т.е., т.к., $\frac{2\pi}{\Delta\varphi_0} = 4$.

Ищем $(x \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_0 + 2\pi n + \varphi_{\text{раз}} & \quad \begin{cases} x_1 = r_2 \cos \varphi_1 = 10\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{5(\sqrt{2}-1)}{4}\right) = -\frac{25(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = -\frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} \\ y_1 = r_2 \sin \varphi_1 = 10\sqrt{2} \cdot \frac{5(\sqrt{2}+1)}{4} = \frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \Delta\varphi_0 + 2\pi n + \varphi_{\text{раз}}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= r_2 \cos \varphi_2 = r_2 \cos\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = -r_2 \sin \varphi_0 = -\frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2} \\ y_2 &= r_2 \sin \varphi_2 = r_2 \sin\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = r_2 \cos \varphi_0 = -\frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 + 2\Delta\varphi_0 + 2\pi n + \varphi_{\text{раз}}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= r_2 \cos \varphi_3 = r_2 \cos(\varphi_0 + \pi) = -r_2 \cos \varphi_0 = \frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} \\ y_3 &= r_2 \sin \varphi_3 = r_2 \sin(\varphi_0 + \pi) = -r_2 \sin \varphi_0 = -\frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\varphi_4 = \varphi_0 + 3\Delta\varphi_0 + 2\pi n + \varphi_{\text{раз}}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= r_2 \cos \varphi_4 = r_2 \cos\left(\varphi_0 + \frac{3\pi}{2}\right) = r_2 \sin \varphi_0 = \frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2} \\ y_4 &= r_2 \sin \varphi_4 = r_2 \sin\left(\varphi_0 + \frac{3\pi}{2}\right) = -r_2 \cos \varphi_0 = \frac{25\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} \end{aligned}$$

Итак, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — углы встречи, а $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ — координаты точек, где не во время встречи (встречи и раз-
деления)

ван момент, когда расхождение минимально).

Ответ: пусть $x_0 = \frac{25\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{2} = -x_1$
 $y_0 = \frac{25\sqrt{2}(\sqrt{7}+1)}{2} = y_1$

Поскольку в момент, когда расхождение минимально, будет равно из точек $(x_0; y_0)$, $(-y_0; x_0)$, $(x_0; -y_0)$, $(y_0; x_0)$.

152

1. Разобьем все числа на группы:

$b_1, b_2, b_3; b_4, b_5, b_6; b_7, b_8, b_9; \dots; b_{2998}, b_{2999}, b_{3000}$.

Для $k \in \{3; 6; 9; 12; \dots; 3000\}$ верно, что $b_k = q b_{k-1} = q^2 b_{k-2}$.

q - шаг прогрессии. Пусть имеем $A = \{3; 6; 9; 12; \dots; 3000\}$.
 (т.е., все числа, делящиеся на 3 от 1903000).

Тогда $b_k = q^2 b_{k-2}$, $b_{k-1} + b_{k-2} = q^2 b_{k-2} (q+1) \Rightarrow \frac{b_k}{b_{k-1} + b_{k-2}} = \frac{q^2}{q+1}$

$$\sum_{k=3}^{3000} \frac{b_k}{b_{k-1} + b_{k-2}} = \frac{b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}}{(b_1 + b_2) + (b_4 + b_5) + (b_7 + b_8) + \dots + (b_{2998} + b_{2999})} = \frac{b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}}{b_3 \cdot \frac{q+1}{q^2} + b_6 \cdot \frac{q+1}{q^2} + b_9 \cdot \frac{q+1}{q^2} + \dots}$$

$$\dots + b_{3000} \cdot \frac{q+1}{q^2} = \frac{1}{\frac{q+1}{q^2}} = \frac{q^2}{q+1}$$

Пусть $b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000} = S_0$
 Тогда $(b_1 + b_2) + (b_4 + b_5) + \dots + (b_{2998} + b_{2999}) = S - S_0 = S_1$
 Тогда это выражение выше

есть

$$\frac{S_0}{S - S_0} = \frac{q^2}{q+1} = \frac{S_0}{S_1} \Rightarrow S_1 = \frac{q+1}{q^2} S_0$$

Тогда $S = S_1 + S_0 = \frac{q+1}{q^2} S_0 + S_0 = \frac{q^2 + q + 1}{q^2} S_0$ (1)

При увелич. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ в 50 раз S_0 раз их сумма растет в 50 раз, а сумма остальных не меняется, т.е., при этом случае

$$10S = S_1 + 50S_0 = \frac{50q^2 + q + 1}{q^2} S_0$$
 (2)

Величин (2) по (1): $10 = \frac{50q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1} \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$q = \frac{0 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 40 \cdot 9}}{80} = \frac{0 \pm \sqrt{81 + 1440}}{80} = \frac{0 \pm \sqrt{1521}}{80} = \frac{0 \pm \sqrt{37.132}}{80}$$

$$\Rightarrow \frac{0 \pm 39}{80}$$

$$\begin{cases} q = -\frac{3}{8} \\ q = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{все члены положительны} \Rightarrow q > 0 \Rightarrow q = \frac{3}{5} \quad q = \frac{3}{5}$$

2. Приведём аналогичную ситуацию: разобьём все члены на группы $v_1, v_2; v_3, v_4; \dots, v_{2000}, v_{2001}$.

$$v_2 = q v_1, \quad v_4 = q v_3, \dots, v_{2001} = q v_{2000}.$$

$$\frac{v_2 + v_4 + v_6 + \dots + v_{2001}}{v_1 + v_3 + v_5 + \dots + v_{2000}} = \frac{v_2 + v_4 + v_6 + \dots + v_{2001}}{\frac{v_2}{q} + \frac{v_4}{q} + \frac{v_6}{q} + \dots + \frac{v_{2001}}{q}} = q = \frac{S_0'}{S_1'}$$

$$\text{Пусть } v_2 + v_4 + v_6 + \dots + v_{2001} = S_0'$$

$$v_1 + v_3 + v_5 + \dots + v_{2000} = S_1'$$

$$S_0' + S_1' = S = S_0' + \frac{S_0'}{q} = \frac{q+1}{q} S_0' = S.$$

При ~~увеличении~~ ^{увеличении} $v_2, v_4, \dots, v_{2001}$ в q раз их сумма S_0' ^{увеличится} в q раз, а сумма $v_1, v_3, \dots, v_{2000}$ останется той же. Пусть тогда $S_1' = S_0'$. Тогда

$$S' = S_1' + q S_0' = \frac{q+1}{q} S_0'.$$

$$\text{Тогда } \frac{S'}{S} = \frac{\frac{q+1}{q} S_0'}{\frac{q+1}{q} S_0'} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 1} = \frac{6+5}{3+5} = \frac{11}{8} \quad S' = \frac{11}{8} S.$$

Ответ: возрастёт в $\frac{11}{8}$ раз.

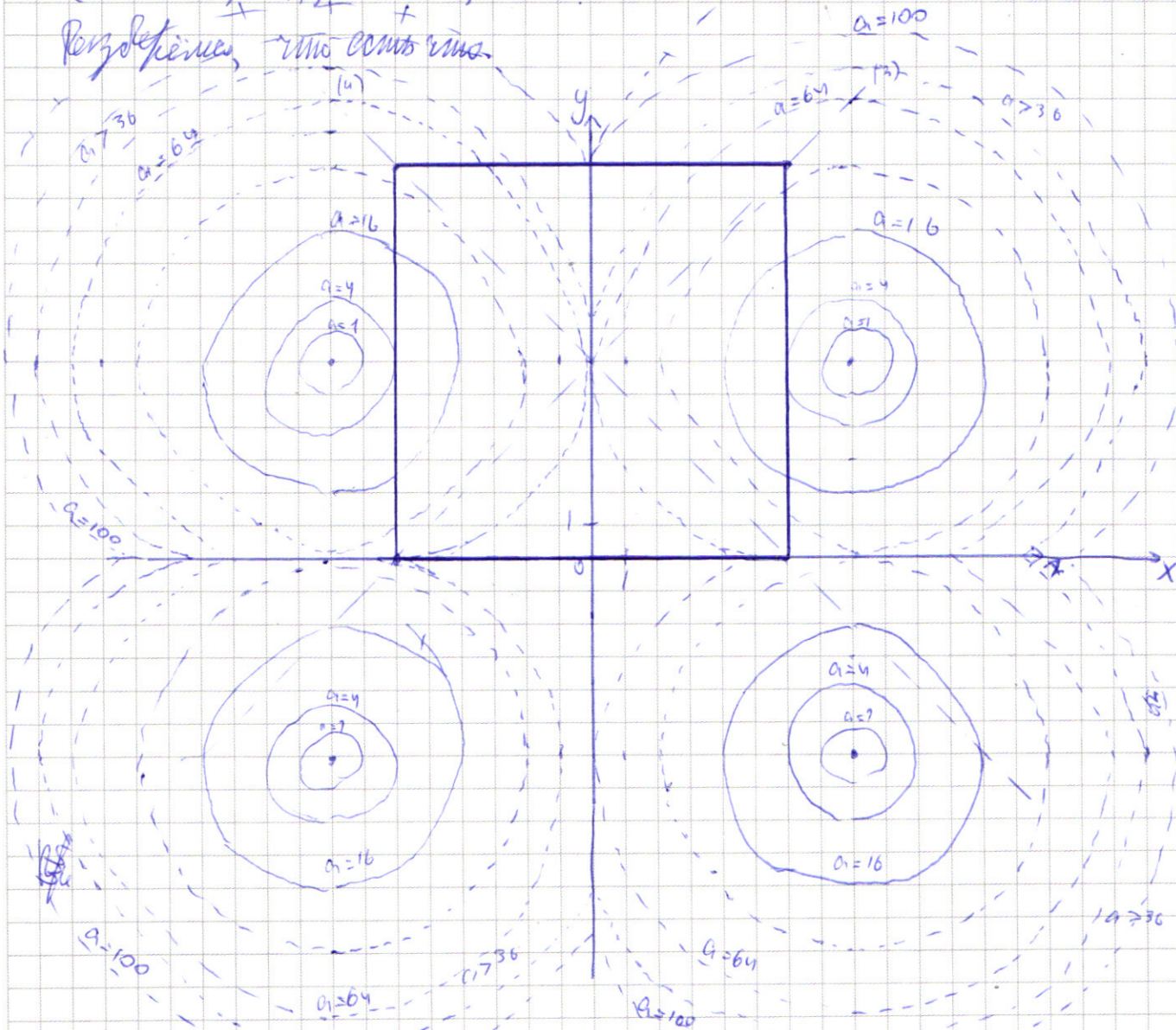
н.т.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \end{cases}$$

(График на странице 7)

$$\begin{cases} (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a, & |a| \end{cases}$$

Результаты, что есть это



В уравнении (1) два модуля. Рассмотрим прямые условия
для каждого и построим соответствующие функции:

$$y-6-x \geq 0 \quad (3) \quad y-6+x \geq 0 \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} y = x + 6 \\ x \mid 0 \ 1 \\ y \mid 6 \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y = x + 6 \\ x \mid 0 \ 1 \\ y \mid 6 \ 7 \end{array}$$

Когда два графика (1) выше каждого из прямых (3) и (4)
($y \geq x+6$, $y \geq -x+6$), (1) имеет вид $y-6-x+y-6+x=12 \Rightarrow y=12$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Когда график (1) имеет касательную из семейства (3) и (4),
 $(y < x+6, y < -x+6)$ (1) имеет вид $-y+6+x -y+6-x=12$
 $y=0$.

Рассмотрим 2 случая:

(1) Вмесе (3), вмесе (4):

$$y-6-x -y+6-x=12$$

$$x=-6$$

(1) Вмесе (4), вмесе (3):

$$-y+6+x+y-6+x=12$$

$$x=6$$

Построим эти участки и найдем квадрат (центром в
 $(0,6)$, сторона 12 и границами $y=x+6$ и $y=-x+6$.

Что же такое (2)? Т.к., тем и ~~може~~ ~~находим~~ и x ,
и y в модуле, то график симметричен и относительно
 Oy , и относительно Ox . Тогда ~~нужно~~ ~~решения~~ y ~~сметают~~ ~~одно~~
число (1), как и (2) симм. ось Oy , как видно из графиков.

График $(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$ есть окружность с центром в
точке $(8;6)$ и радиусом $\sqrt{a}$. Тогда $(x-8)^2 + (y-6)^2 = a$

Есть окружность (5) в I четверти, следовательно
отражения в II, III и IV четверти. Тогда центр этой
окружности также симм. ось Ox и Oy и будут

$(8;6)$, $(-8;6)$, $(-8;-6)$, $(8;-6)$

На графике изображен график (2) при ~~(маленький радиус и ко-
ординаты симметричные
использ. с (5) симм.)~~
~~и симметричные относительно~~ Ox и Oy . Т.к., до центра Ox в до квадрата
даны, тем до симметрично все отражения, то они все находятся

и пересечений. А вот верхние ^{гипер-циркули (т.е. это больше 0)} при $a = 4$ касаются O (при $a < 0$ (2) не имеют
 смысла, т.е. левая часть неопределена), имеют две точки
 (т.е. из этих гипер-циркулей в т.ч. $(8; 6)$ и $(-8; 6)$, а
 вершины квадрата $y = -6$ и $y = 6$, и радиус все по осям
 12, и из-за радиуса равно с тем же y -коорд., что и
 центр квадр.) Далее при увелич. a корень станет 4,
 от тех точек, когда радиус будет равен радиусу от O . Минимум
 в O достигается и не так как в O , т.е. $a = \sqrt{(8-6)^2 + (-6-0)^2}$
 $= \sqrt{4 + 36} = 40 = (-8-(-6))^2 + (-6-0)^2 = 40$, миним. O
 поменяется квадрат, корень станет 4. далее эта точка будет
 удаляться от O вверх, пока O не коснется Oy . Из этого вида
 при радиусе 8 x -координата точек из центров по модулю
 равна 8, т.е. $a = 64$, и эта точка пересечения исчезнет.
 останется лишь пересечение с верхней стороной. Эта
 точка пересечения будет "подниматься" при увелич. a
 к оси Oy , и останется на ней (эта точка есть только
 у верхних стр., миним. значения не пересекают) когда
 у нее будет коорд. $(0; 12)$. Тогда a будет
 $a = (8-0)^2 + (6-12)^2 = (-8-0)^2 + (6-12)^2 = 64 + 36 = 100$.
 В этот момент только одна точка пересеч. — $(0; 12)$. При
 дальнейшем росте a точка пересеч. O .

Итак,

a	кол. решений
$a < 4$	0
$a = 4$	2
$a \in (4; 64]$	4
$a \in (64; 100)$	2
$a \in [100]$	1
$a > 100$	0

На основе анализа в этом T таблице имеет, что это 2 реше-
 ния при $a \in \{4\} \cup (64; 100)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x \in \{4\} \cup (64; 100)$.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+6)(x+4)$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x \geq -4 \\ \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x \geq -4 \\ x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x \geq -4 \\ (x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

Подставляем эти корни в $f(x)$ и проверяем, чтобы оно было ≥ 0 :

$$\begin{aligned} f(-6) &= -216 + 24 + 80 < 0 \quad \text{не подходит} \\ f(4) &= 64 - 16 + 80 > 0 \\ f(6) &= 216 - 24 + 80 > 0 \end{aligned}$$

Тогда $x \in \{4\} \cup (64; 100)$.

Ответ: $x \in \{4\} \cup (64; 100)$. (Без учета комплексных чисел).

ОДЗ:

$$f(x) = x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$(x+6)(x^2 - 4x + 16) \geq 0$$

и проверяем, чтобы оно было ≥ 0 .

$$f'(x) = 0, \text{ т.е. } 3x^2 - 4 = 0$$

$$x = \dots$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x \geq -4 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x \geq -4 \\ x = 4 \\ x = -1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ x = 4 \\ x \geq -4 \\ x = 6 \\ x = -8 \end{cases}$$

и 4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2/x - 2/4 \geq 0.$$

① $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^3 \cdot x^2 + x \cdot x^2 + 1 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot 2x - x \cdot 2x - 1 \cdot 2x + 4 \cdot 2x^2 + 4 \cdot x + 4 \cdot 1 \geq 0.$$

$$(2x^2 + x + 1)x^2 - (2x^2 + x + 1)2x + (2x^2 + x + 1)4 \geq 0$$

$$(2x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 4) \geq 0.$$

Т.к., все слагаемые всегда > 0 , то
и их произведение тоже.
 $\forall x \in \mathbb{R}.$

$$\boxed{x \geq 2} \quad x \in [2; +\infty).$$

$$2x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$x \notin \mathbb{R}$$

$\downarrow$
 $2x^2 + x + 1 > 0$
(при $x=1$ оно больше,
значит не меньше)

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 4}$$

$$\downarrow$$

$$x \notin \mathbb{R}$$

$\downarrow$
 $x^2 - 2x + 4 > 0$
(при $x=1$ оно
больше, значит
не меньше)

② $x < 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

~~$x \neq 1$~~

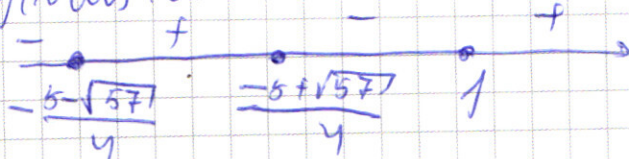
$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4)$$

$$2x^3 \cdot x - 2x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$f(x) = (x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0.$$

Метод итераций:

$$g(10000) \geq 0.$$



$$x \in \left[\frac{-5 - \sqrt{57}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{57}}{4} \right] \cup [1; 2)$$

(т.к., $x < 2$).

$$2x^3 + 5x^2 - 4 = 0.$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 32}}{4} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4}.$$

Заметим, что $\sqrt{57} < 8$

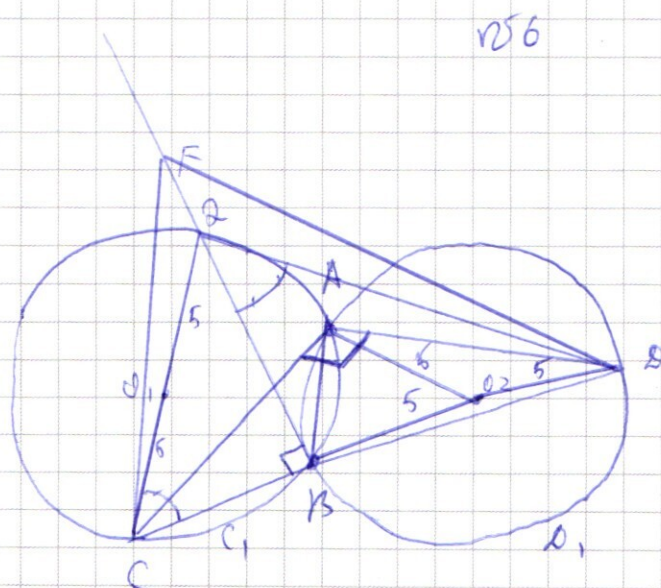
$$\frac{-5 + \sqrt{57}}{4} < \frac{-5 + 8}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$

Объединим промежутки из пунктов ① и ②:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$V \in \left[\frac{-5 - \sqrt{57}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{57}}{4} \right] \cup [1; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left[\frac{-5 - \sqrt{57}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{57}}{4} \right] \cup [1; +\infty).$



Решение:

①. Через C, A, D можно провести ω , касан. к обеим окружностям

②. $BF = BD \Rightarrow \triangle FBD$ - равноб. $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$,
($\angle FBD > 90^\circ$)

③. $\omega_1 = \omega_2$; $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle CCB = \angle CAB = \frac{1}{2}(\angle CFB + \angle CBD)$
 $\angle CCB + \angle CBD = 180^\circ$;

$\angle CCB = \angle CBQ \Rightarrow \angle CAB = \angle BCD$

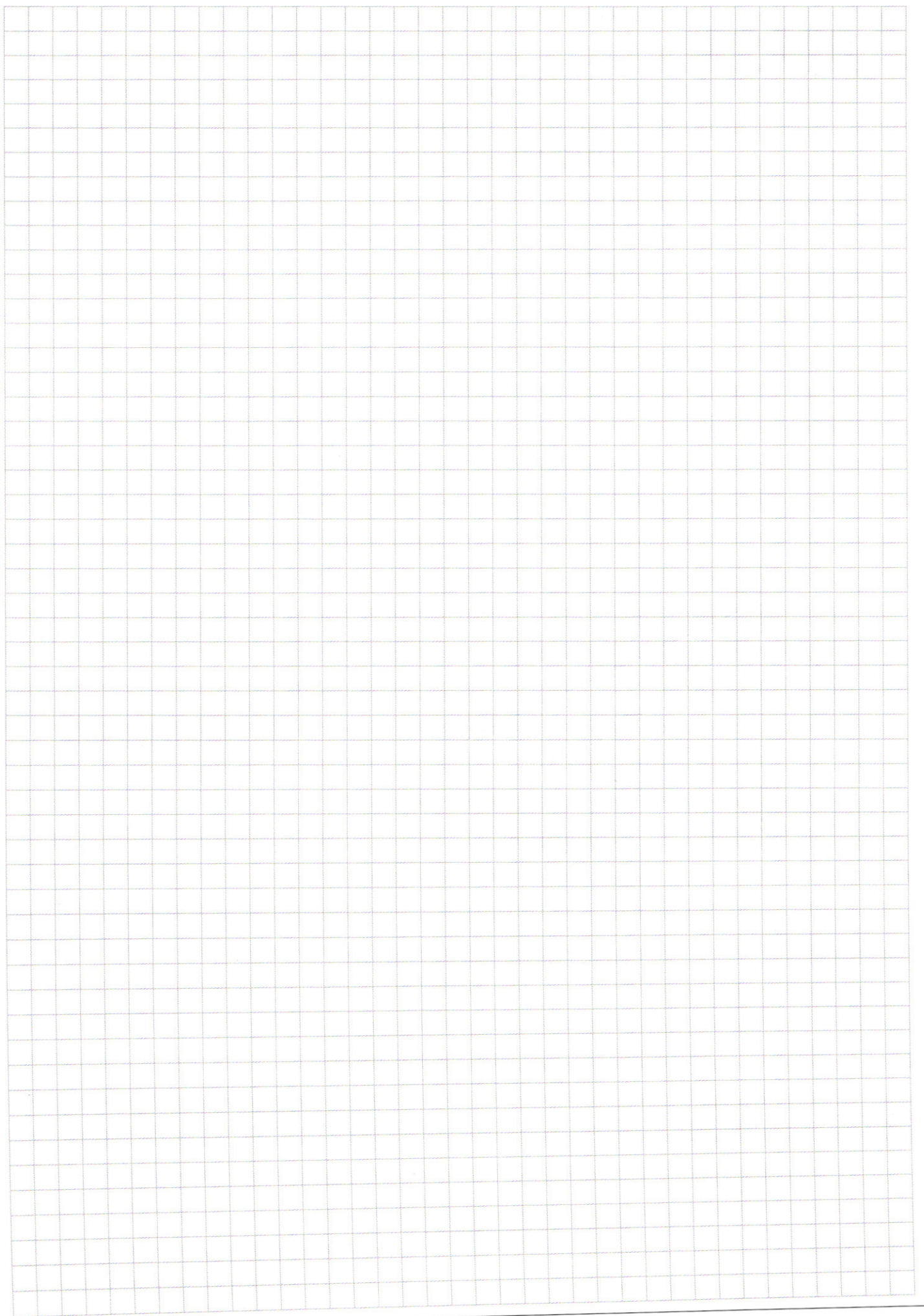
Доказ:

$\omega_1(O_1; 5) \cap$
 $\omega_2(O_2; 5) = \{A; B\}$.
 $C \in \omega_1, D \in \omega_2$,
 $B \in CD, \angle CAD = 90^\circ$.
 $BF \perp CD, BF = BD$.
(A и F по одну стор. от CD)

Найти:

CF ?

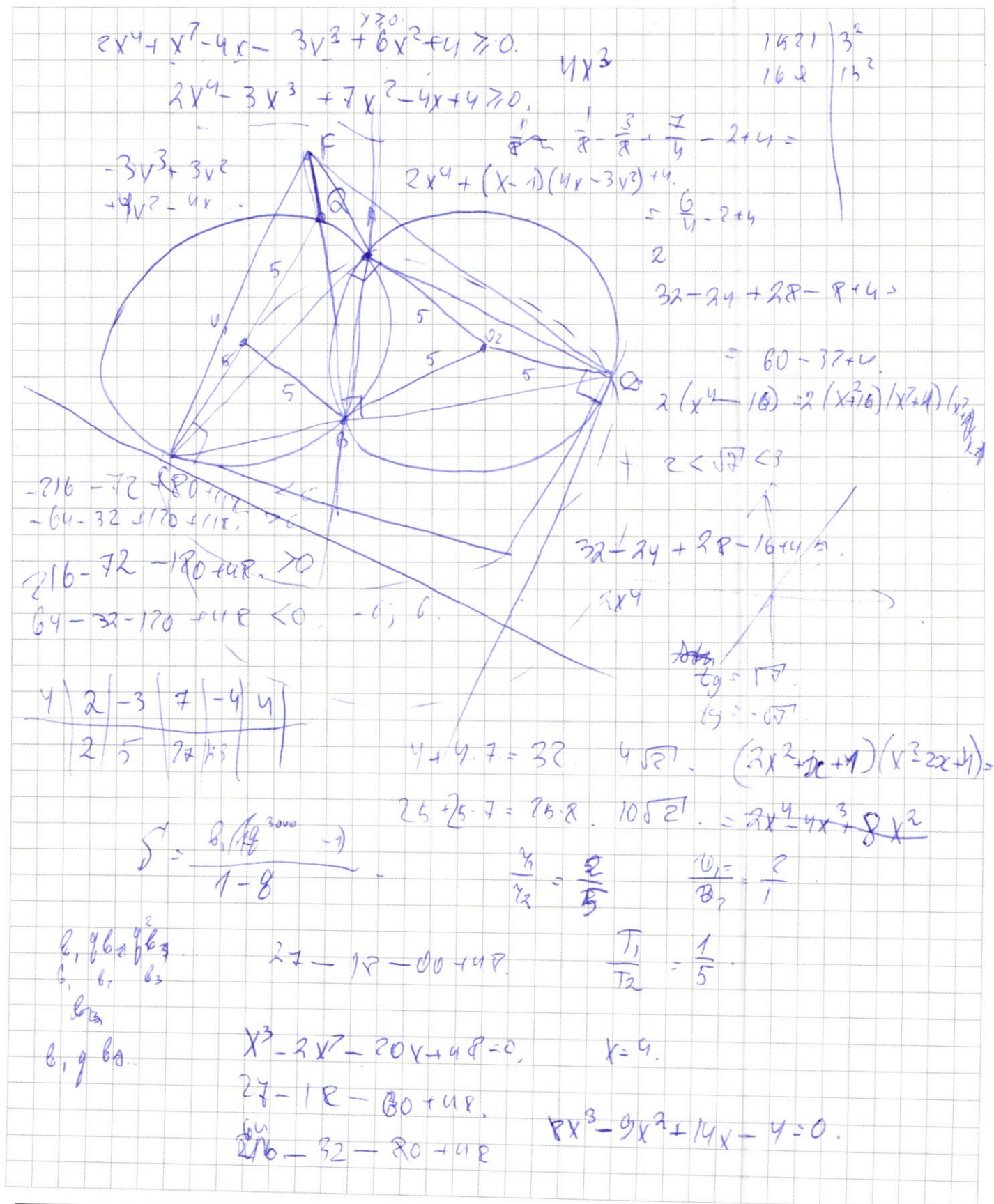
б) $BF = 6$. S_{ABCD} ?

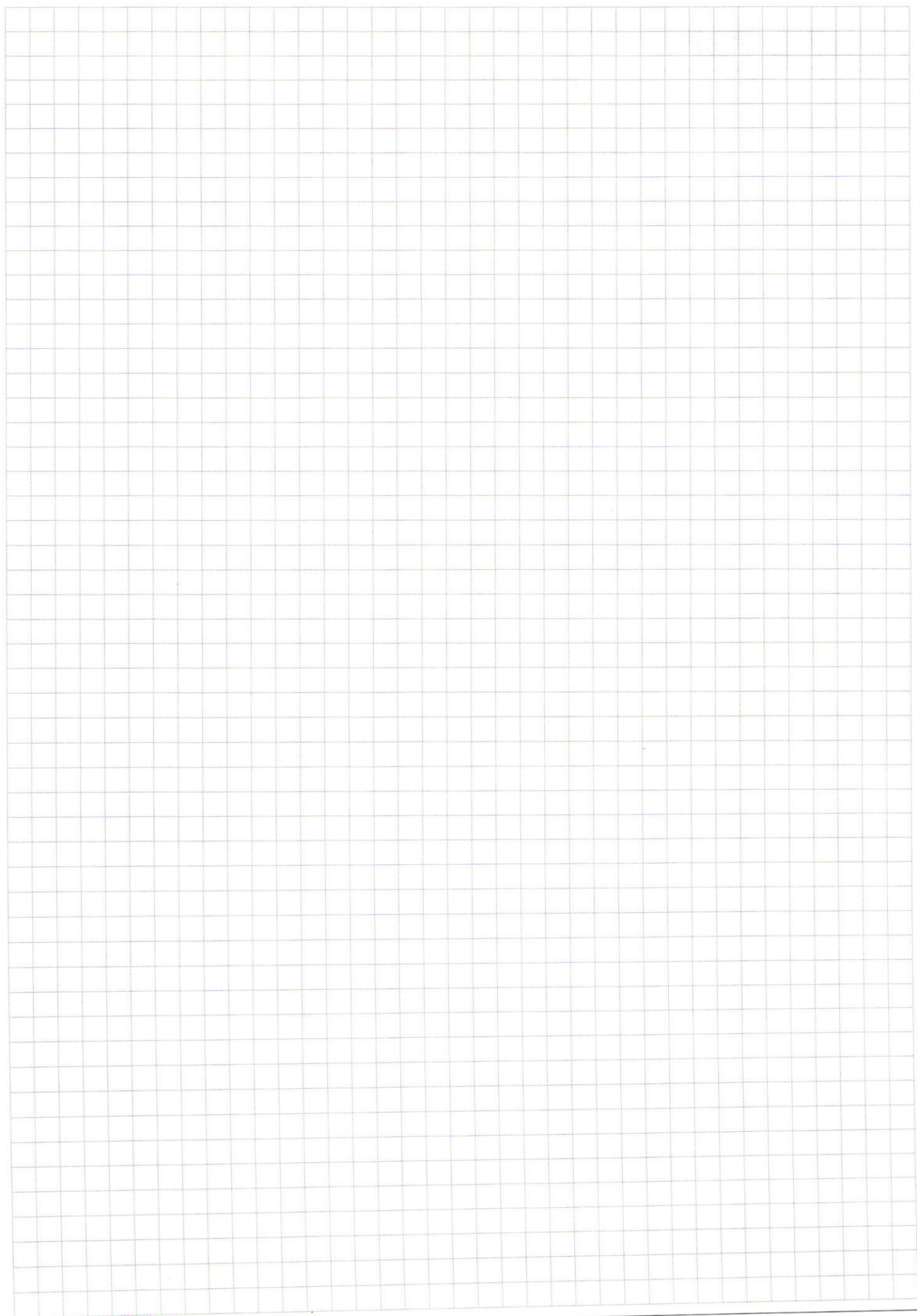


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$700 \mid 2^2$$

$$7 \mid 5^2$$

$$7$$

$$700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$C 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2$$

$$7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2 \cdot 2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$P_8(2, 1, 2, 1) = 4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!$$

$$= 24 + 2 + 2 = 28$$

$$P_8(4, 1) = 4! \cdot 1! = 24$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$4 \cdot 1$$

$$P_8(3, 2) = 6$$

$$3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$7 \cdot 2$$

$$\begin{array}{l} 2 \mid 1 \mid 1 \mid 2 \quad 1 \\ 2 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \quad 2 \\ 2 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \quad 3 \\ 2 \mid 2 \mid 1 \mid 1 \quad 4 \\ 1 \mid 2 \mid 1 \mid 2 \quad 5 \\ 1 \mid 2 \mid 1 \mid 2 \quad 6 \\ 1 \mid 2 \mid 2 \mid 1 \quad 7 \\ 1 \mid 2 \mid 2 \mid 1 \quad 8 \\ 1 \mid 1 \mid 2 \mid 2 \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 8 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 \end{array}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$$

$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$1$$

$$3, 1, 2, 2$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{40320}{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{40320}{24} = 1680$$

$$y - 12 = 12$$
$$y = 24$$

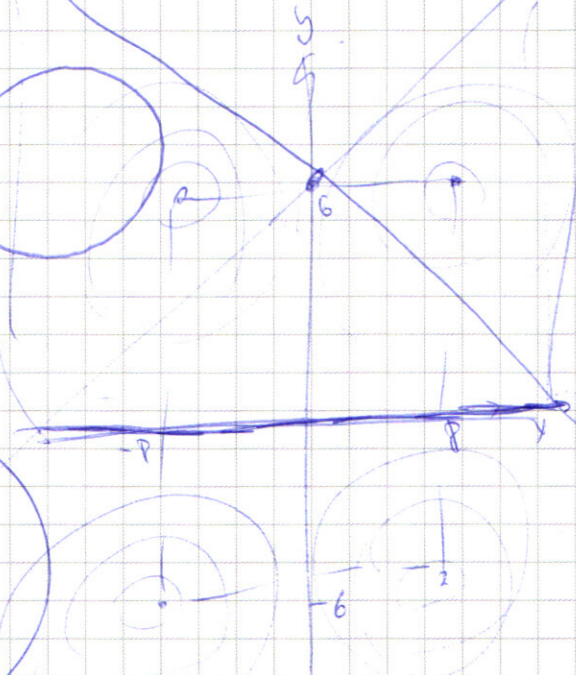
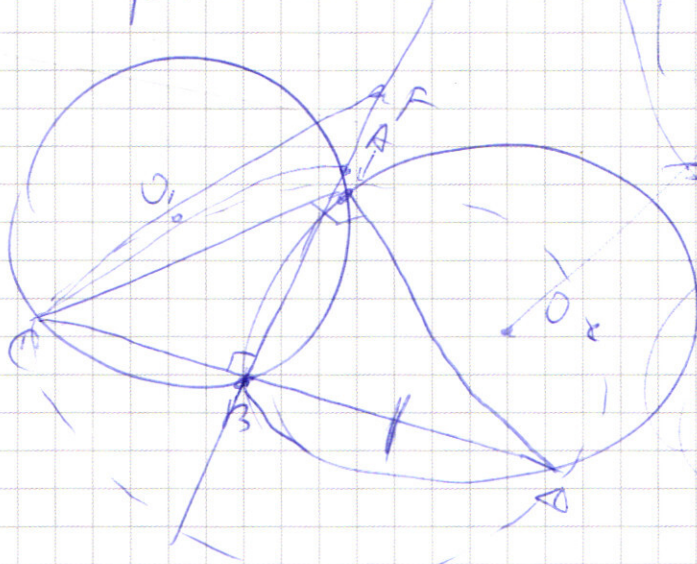
$$y = 6 - x = 0 \quad \text{---} \quad y = 6 + x = 0$$

$$y = x + 6.$$

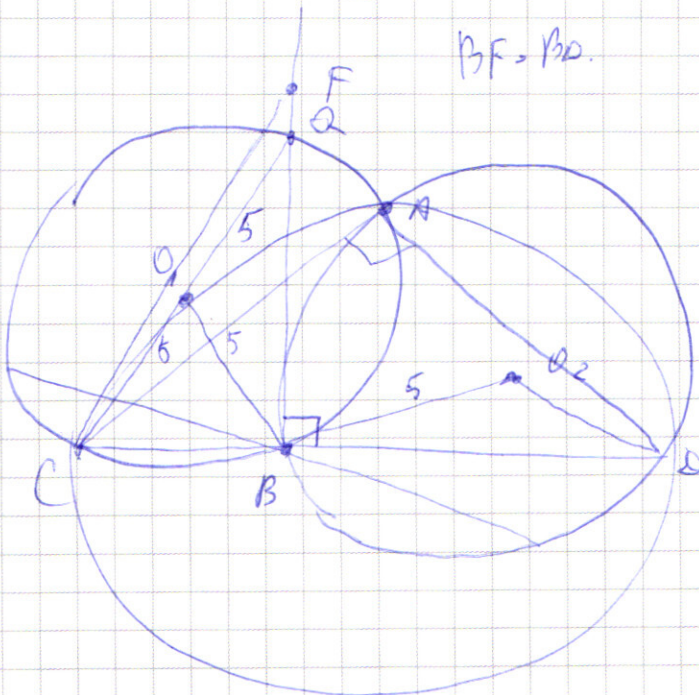
$$y = -x + 6$$

$$y = v + b \geq 0. \quad x = -b.$$

$$-2y + 12 = 12$$
$$y = 12.$$



BF = BD.



4	1	+
4	2	+
4	3	+
6	4	+
5	5	+
6	1	
6	7	+

44 10
35.