

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_1 \dots a_8 : a_1 \cdot a_2 \dots \cdot a_8 = 700$$

$$700 = 7 \cdot 100 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$100 = 4 \cdot 25$$

вариант 1: 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1

вариант 2: 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1

3 S_1 - кол-во рассл. первого

S_2 - второй ответ на задачу S_1 и S_2

$$S_1 = C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8 \cdot 21 \cdot 10$$

~~$$S_1 = C_8^3 \cdot C_5^2 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8 \cdot 21 \cdot 10$$~~

$$S_2 = C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^3$$

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 8 \cdot 21 \cdot 10$$

$$S_1 + S_2 = 8 \cdot 21 (10 + 10) = 8 \cdot 21 \cdot 20$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 168 \\ \hline 3520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 168 \\ 16 \\ \hline 1008 \\ 168 \\ \hline 2688 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 126 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 120 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 120 \\ \hline 420 \\ 21 \\ \hline 2520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 126 \\ \hline 420 \\ 21 \\ \hline 2520 \end{array}$$

Ответ: ~~2688~~ 3520

$b_1, b_2 \dots b_{3000}$

~~b_1, b_2~~ ~~$\frac{b_{n+1}}{b_n} = d$~~

$b_1 + b_1 \cdot d + b_1 \cdot d^2 + \dots + b_1 \cdot d^{2999}$

$b_3 = d^2 \cdot b_1$

$b_6 = d^5 \cdot b_1$

$b_1 \cdot d^2$

$S = b_1 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d - 1}$

$b_{3000} = d^{2999} \cdot b_1$

$\delta = d^3$

$b_3 \rightarrow 50b_3$

$1 + \delta^2 + \delta^3 + \dots + \delta^{999}$

$S' = S + 49(b_3 + b_6 + \dots b_{3000})$

$\frac{\delta^{1000} - 1}{\delta - 1}$

~~$b_1 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d - 1} + 49 \cdot b_1 \cdot d^2 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d^3 - 1}$~~

~~$S + 49 \cdot b_1 \cdot d^2 (1 + d^3 + \dots + d^{2997})$~~

$S + 49 \cdot b_1 \cdot d^2 \left(\frac{d^{3000} - 1}{d^3 - 1} \right)$

~~$49 \cdot b_1 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d - 1}$~~

~~$49 \cdot \frac{d^2}{d^3 - 1} = \frac{9}{d - 1}$~~

los

$d \neq 1$

$49d^3 - 49d^2 = 9d^3 - 9$

$40d^3 - 49d^2 + 9 = 0$

$d = 1$ - корень

$$\begin{array}{r} 40d^3 - 49d^2 + 9 \mid d-1 \\ - 40d^3 + 40d^2 \\ \hline -9d^2 + 9 \\ -9d^2 + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

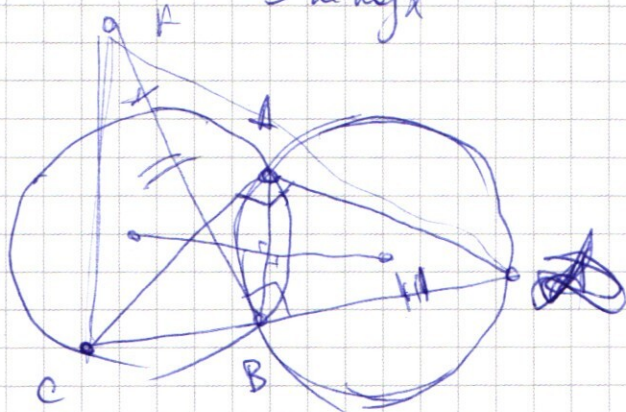
$$40d^2 - 9d - 1$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 = 221$$

$$d = \frac{9 \pm \sqrt{221}}{80}$$

$$\Rightarrow \frac{9 + \sqrt{221}}{80}$$

не корень?



корень?

$$D = 100 - 4 \cdot 24 = 4 \cdot 2^2$$

$$x = \frac{-10 \pm 2}{2} = -5 \pm 1$$

$$\{-6, -4\}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\quad} = (x+6)(x+4)$$

$$-6$$

корень

$$x^3 - 4x + 80 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = 4$$

$$2(x+6)$$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = \sqrt{\frac{-125 + 10 + 80}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{-64 + 16 + 80}{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$x^3 - 4x + 80 = 0 \quad x = -3$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 6x + 4)$$

$$x^3 - 2x^2 - 12x + 64$$

$$x = 4$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} \cdot \frac{x+10}{(x+4)} \quad \text{поделим на } x+6$$

$x = -6$ - корень $\rightarrow$ 6 сб

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32 \quad \uparrow 2$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x \geq -4$$

$$x = -4$$

$$-64 - 32 + 80 + 48$$

$$\frac{-96}{-96}$$

$$x = -5$$

$$x = 2$$

$$8 - 8 - 40 + 48$$

$$x = 3$$

$$64 - 16 + 20$$

$$48$$

$$128$$

$$2^7 = 128$$

Th. Виета.

корни-делители
на

$$27 - 18 - 60 + 48 = -1$$

$$-48, -24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x = 3$$

$$27 - 18 - 60 + 48 = -1$$

$$64 - 32 - 80 + 48 = -12$$

$$4$$

$$x = 4$$

поделим

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 : x - 4 \\ \underline{x^3 - 4x^2} \\ 2x^2 - 20x + 48 \\ \underline{2x^2 - 8x} \\ -12x + 48 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = (2\sqrt{13})^2$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

0.2.3.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2)$$

$$x > 2 \quad x^2 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2)$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

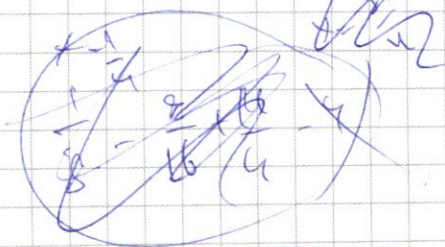
$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$f_1(x) =$$

$$8x^3 - 9x^2 + 14x - 4 = 0$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4 = 32$$

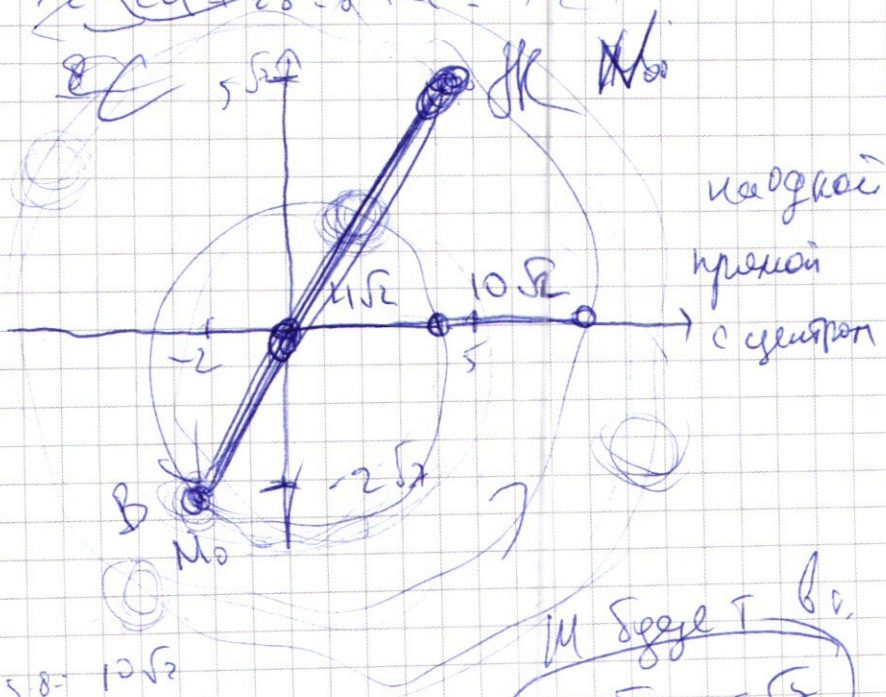


$$R_1 = \sqrt{2^2 + 7 \cdot 5^2}$$

$$4 + 4 \cdot 7 = 32$$

$$R_2 = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 5^2}$$

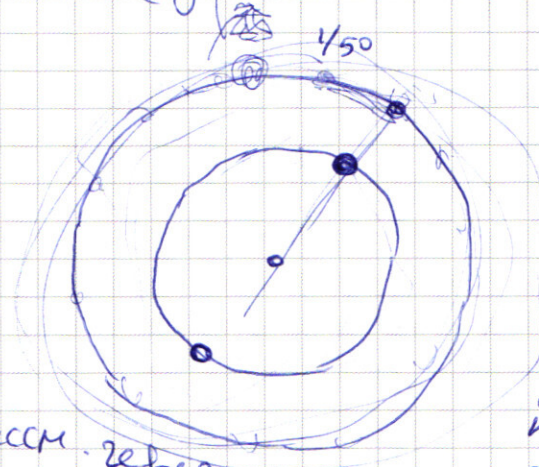
$$7 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 15 \cdot 5 = 10\sqrt{2}$$



$$-5, -5\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\min d = 6\sqrt{2}$$



$$R_1 = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$R_2 = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 2}{\pi \cdot 100 \cdot 2} = 0,16$$

$$= \frac{16}{100} \left(\frac{4}{25} \right)$$

рассм. эфф
круг первого

(и пересекает $12,5 \text{ км}$)

будут не min

$$\omega_2 = 2x$$

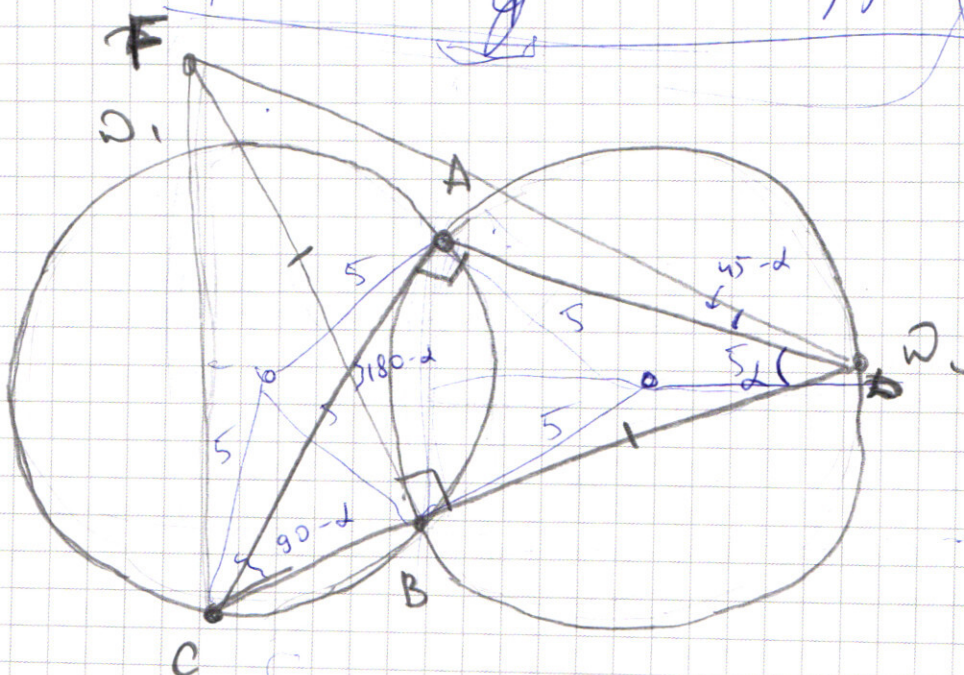
$$\omega_1 = 2 \cdot \frac{25x}{4} \cdot 2 = \frac{25}{2} x$$

$$\omega_2 = 2x$$

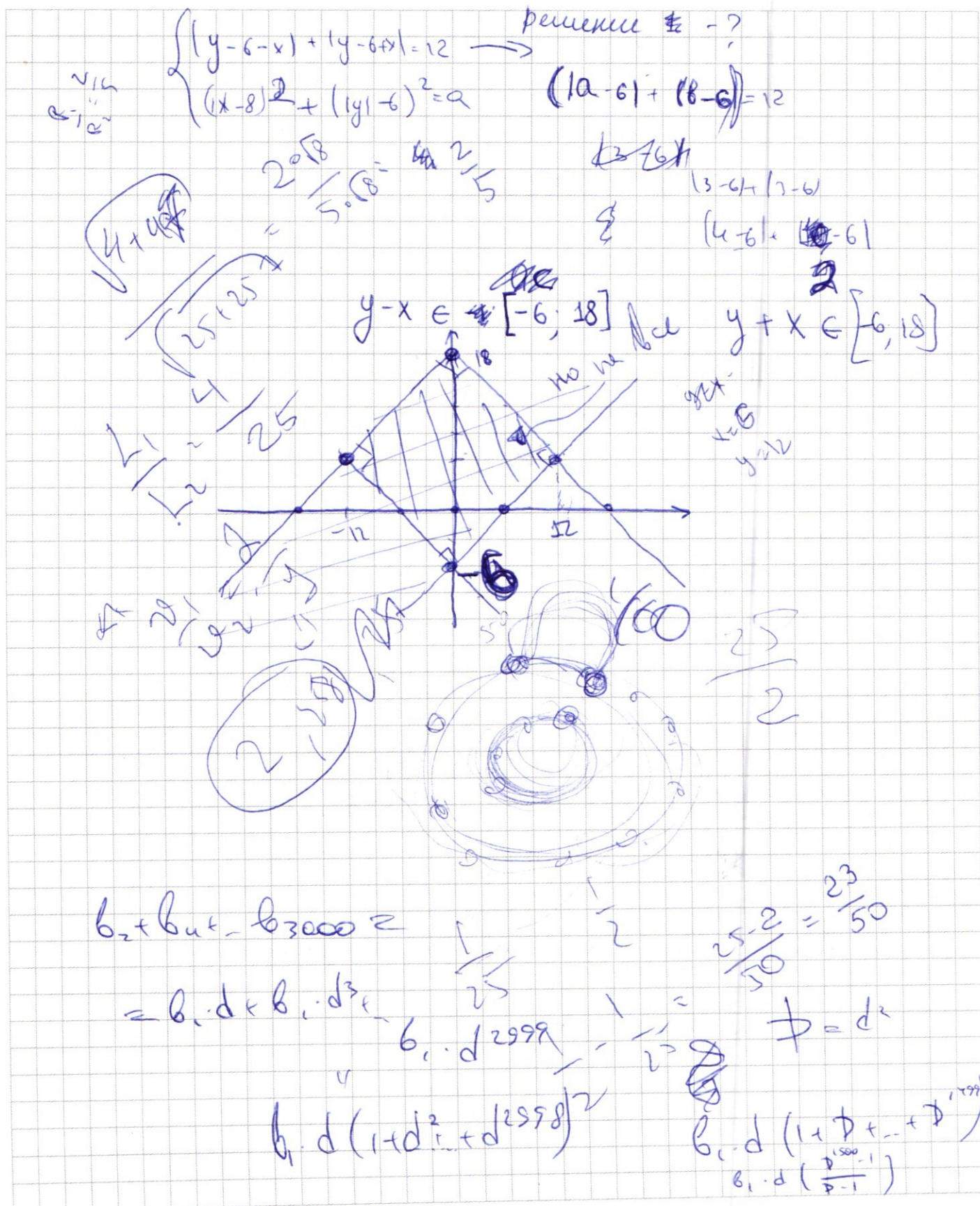
$$\omega_1 = 25x$$

$$2x \cdot t_1 = 25x \cdot t_2$$

L_1 - длина дуги



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 > 0$$

$$1) x \geq 2$$

$$f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 6x^2 - 4x + 4$$

$$+ 4 = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

Найдем экстремумы

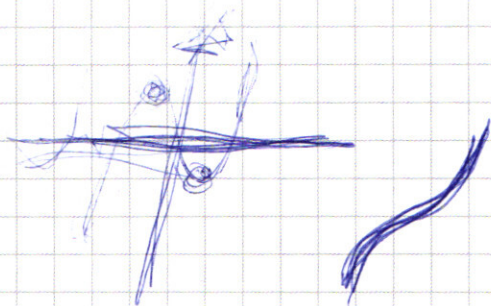
$$8x^3 - 9x^2 + 14x - 4 = 0$$

$$x = 2, x = 1$$

$$\begin{array}{r} x=2 \\ 64 - 36 + 28 - 4 = 52 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$8 \cdot \frac{1}{8} - 9 \cdot \frac{1}{4} + 14 \cdot \frac{1}{2} - 4 = 1 - \frac{9}{4} + 7 - 4 = 1 - \frac{9}{4} + \frac{28}{4} - \frac{16}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$



$$f''(x) =$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$24x^2 - 18x + 14 = 12x^2 - 9x + 7 = 0$$

Δ =

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 12 \cdot 7 < 0 \Rightarrow$$

⇒ одна вещ. корень $x = \frac{1}{4}$ не подходит.

$$2) x < 2$$

$$f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(2-x) + 4 =$$

$$= 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$$

$$x = 1 - \text{корень}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline 5x^3 - 5x^2 \\ - 5x^3 - 5x^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ \hline 2x^3 + 5x^2 - 4 \end{array} \right.$$

$$f(x) = (x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4)$$

$$\begin{array}{r} -4x + 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ 2x^3 - 16 + 20x - 4 \\ \hline x = -2 \end{array}$$

2.

$$f(x) = (x-1)(x+2) \cdot \left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4 \\ - 2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 - 4 \\ - x^2 + 2x \\ \hline -2x - 4 \\ - 2x - 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x+2 \\ \hline 2x^2 + x - 2 \end{array} \right.$$

$$2x^2 + x - 2$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$



$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ ((x)-8)^2 + ((y)-6)^2 = a \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(-x, -y)$$

-5 -5

x, y координаты точки

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

$(-y, x) \rightarrow (-y, -x)$

$(5-6-5) + (5-6+5) = 10$

$(-5-6-(-5)) + (-5-6-(-5)) = 16$

$$2x^2 + x - 2$$

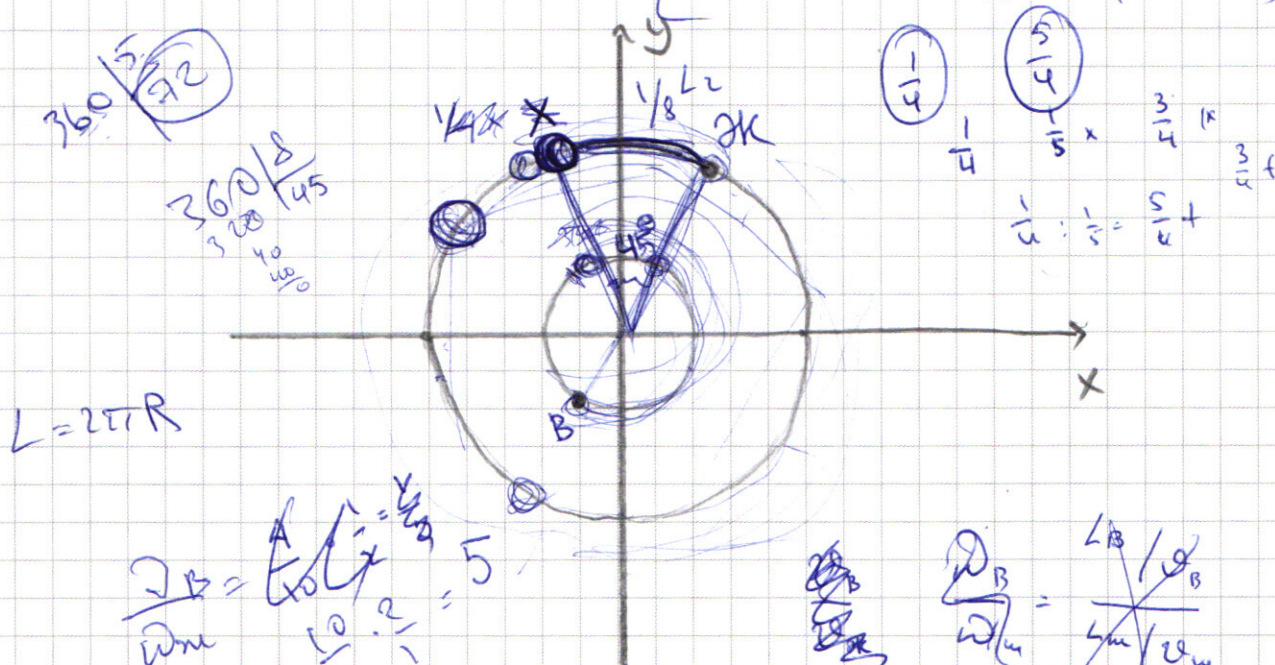
$$\Delta = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x = 1 \quad x = -2 - 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 1$$

$$\sqrt{17} \approx 4.123 > 4$$

Ответ: $x \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$



$S = \frac{1}{2} L x$

$S + x = 5x$

$S = 4x$

$x = S/4$

$x \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \right)$

$\left\{ x, x + \frac{1}{5} L_2, x + \frac{2}{5} L_2, \dots \right\}$

$\frac{2B}{\omega_m} = \frac{L_B}{v_m} \cdot \frac{v_B}{L_m} = 5$

$\frac{L_B \cdot v_m}{L_m \cdot v_B}$

$\frac{L_B}{L_m} = \frac{2}{5}$

$\frac{v_m}{v_B} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{\omega_B}{\omega_m} = \frac{1}{5}$

$x + \frac{3}{5} L_2, x + \frac{4}{5} L_2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad | \cdot \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x^2 + 4)(x+6) \quad | : (x+6)$

$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$

$x = -6$ в ответ

$x \geq -4$

$| \cdot 2$

$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$

$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$

$x = 4$ - корень - в ответ

$| : (x-4)$

$x^2 + 2x - 12 = 0$

$D_1 = 1 + 12 = (\sqrt{13})^2$

$x = -1 \pm \sqrt{13}$

$x = -1 - \sqrt{13} < -1 - \sqrt{9} = -4 \Rightarrow$ не кор.

$-1 + \sqrt{13}$ - кор.

$\downarrow$

Ответ: $\{-6; -4; -1 + \sqrt{13}\}$

$$\frac{49d^2}{d^3-1} = \frac{9}{d-1}$$

$$d \neq 1$$

~~49d^3~~ $49d^3 - 49d^2 = 9d^3 - 9$

$40d^3 - 49d^2 + 9 = 0 \quad | : (d-1)$

$$\begin{array}{r|l} 40d^3 - 49d^2 + 9 & d-1 \\ \hline 40d^3 - 40d^2 & 40d^2 - 9d - 9 \\ \hline -9d^2 + 9 & \\ -9d^2 + 9d & \\ \hline -9d + 9 & \end{array}$$

$40d^2 - 9d - 9 = 0$

$D = 81 + 4 \cdot 9 \cdot 40 = 1521 = 39^2$

$d = \frac{9 \pm 39}{80} = \left\{ -\frac{3}{8}, \frac{48}{80} \right\} \Rightarrow$

не подходит, т.к. все члены $\checkmark$
0

$\Rightarrow d = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = \left(\frac{3}{5} \right)$

Теперь необходимо найти

$$\frac{S + (b_2 + \dots + b_{3000})}{S} = ?$$

$S = b_1 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d - 1}$

$b_2 + \dots + b_{3000} = b_1 \cdot d \cdot (1 + d + \dots + d^{2999})$

$$b_1 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d - 1} + b_1 \cdot d \cdot \left(\frac{d^{3000} - 1}{(d-1)(d+1)} \right)$$

$$b_1 \cdot d \cdot \left(\frac{d^{3000} - 1}{d^2 - 1} \right)$$

$$b_1 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d - 1}$$

$$1 + \frac{d \cdot \left(\frac{d^{3000} - 1}{(d-1)(d+1)} \right)}{\frac{d^{3000} - 1}{d-1}} = 1 + \frac{d}{d+1}$$

$d \neq 1$

$= 1 + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + 1} = 1 + \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 8} = \frac{3}{8} \text{ т.к.}$

$= \frac{11}{8}$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $700 = \cancel{8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2$

Заметим, что т.к. у нас произв.-цифр, то множит. ко-
могут быть $> 9 \Rightarrow 2 \cdot 5, 5 \cdot 5, 2 \cdot 7, 5 \cdot 7$ и коэф $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ имеется всего лишь 2 набора цифр, в к-ре дающих

$700 : \{7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}, \{7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1\}$

1-й набор даёт S_1 способов, а второй - S_2 .

Тогда ответ будет равен $S_1 + S_2$.

$$S_1 = C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

ко-во способов коэф 7, 5, 2

$$S_2 = C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5$$

$$S_1 + S_2 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (6 + 3) = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9 = 2520$$

Ответ: 2520

2. $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$

$$3d = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$S = b_1 + \dots + b_{3000} = b_1 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d - 1}$$

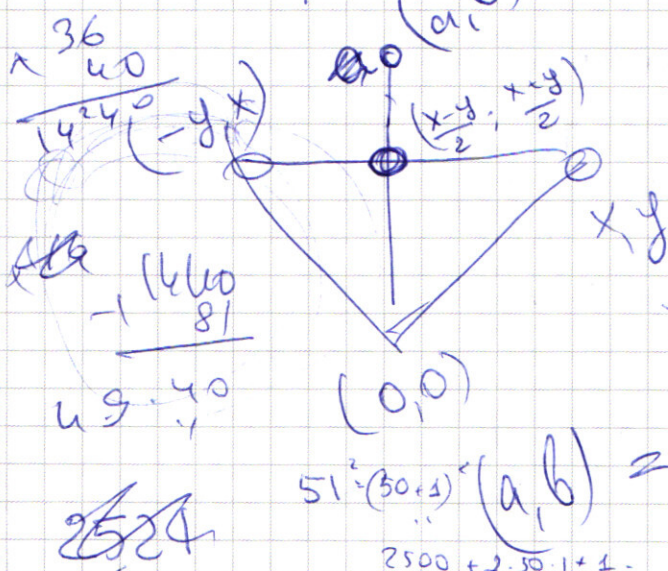
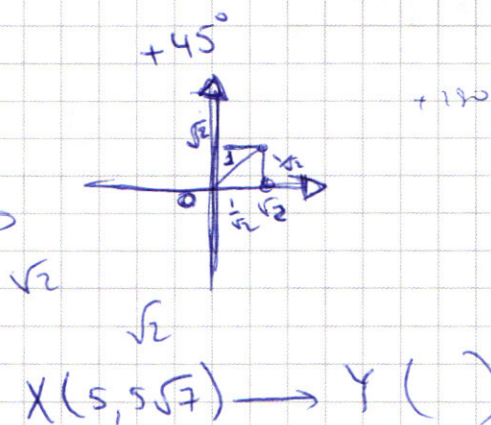
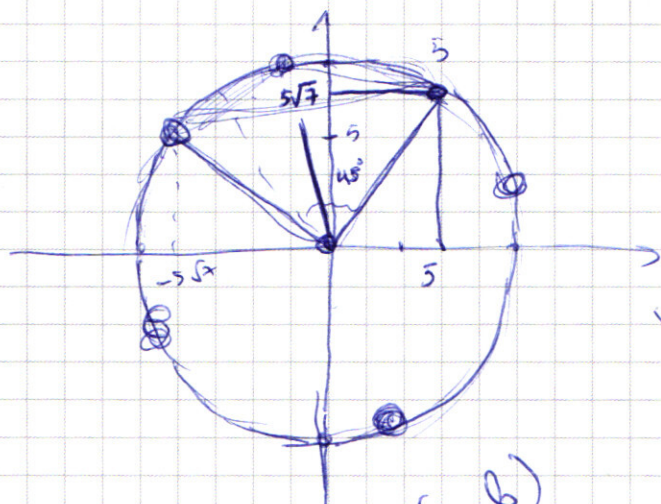
$d \neq 1$, т.к. числа
~~разные~~ S не дел.
в 10 раз

3 S' - сумма ум. прогрессии, тогда

$$S' = S + 49(b_3 + \dots + b_{3000}) = S + 49b_1 \cdot d^2 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d^3 - 1} =$$

$$= b_1 \cdot (d^{3000} - 1) \left(\frac{1}{d - 1} + \frac{49d^2}{d^3 - 1} \right) = 108$$

$$49b_1 \cdot d^2 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d^3 - 1} = 9 \cdot \frac{d^{3000} - 1}{d^3 - 1} \cdot b_1$$



$$a \cos \varphi + b \sin \varphi \rightarrow$$

$$a \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi$$

$$x = \frac{x-y}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{4}}}$$

$$51^2(30+1) \cdot (a,b) = \left(\frac{x-y}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{4}}}, \frac{x+y}{2} \right)$$

$$2500 + 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1 =$$

1521

$$x=5$$

$$y=5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{5-5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$\left(\frac{x-y}{2} \right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} \right)^2$$

$$\frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{x+y}{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$

1 случай

$$x \geq 2$$

$$f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4$$

$$f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \quad f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4$$

$$f''(x) = 24x^2 - 18x + 14 = 12x^2 - 9x + 7$$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 7 \cdot 12 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ у $f'(x)$ нет экстремума $\Rightarrow f'(x)$ имеет не более 1 корня.

замечим при этом, что $f'(2) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на интервале от $[2; +\infty)$

$$f(2) > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \geq 0} \quad \forall x \geq 2 \Rightarrow x \in [2; +\infty)$$

2 случай

$$x \leq 2$$

$$f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(2-x) + 4$$

$$f(x) = 2x^4 + x^2 - 4x - 6x^2 + 3x^3 + 4$$

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$$

$x = 1$ — корень

$\hookrightarrow$

$$f(x) = (x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4)$$

$x = -2$ — корень

$$f(x) = (x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2)$$

4. $2x^2 + x - 2 = 0$

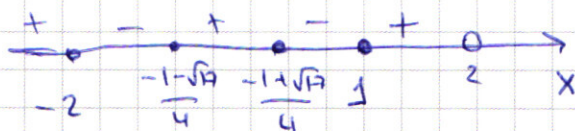
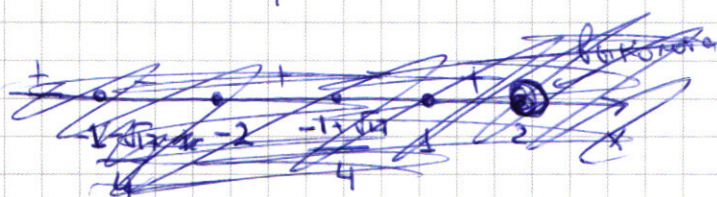
$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 17$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 2$

~~$\frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 1$~~

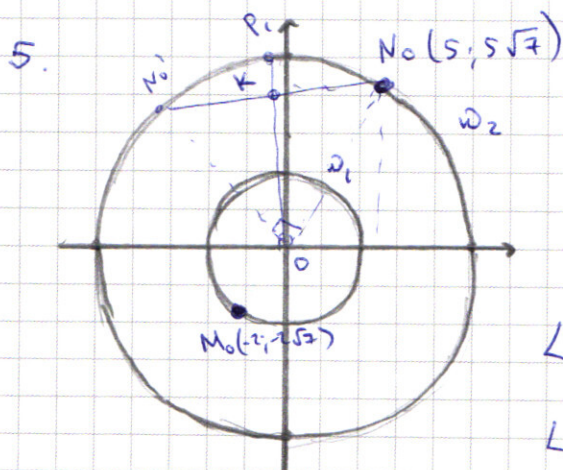
$-2 < \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$ ~~< -2~~



2 слуге) $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

1 слуге) $x \in [2; +\infty)$

||
Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$



Назовем окружность, по которой движется муха ω_2 , веротерка - ω_1 .

Тогда $R_2 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

$R_1 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$L_2 = 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot \pi$

$L_1 = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi$

$\Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{5}{2}$

0-узел
начало
коорд.

Заметим, что в стартовой позиции M_0 , начало коорд. и N_0 лежат на одной прямой. $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

За метим также, что min расстояние достигается, когда водомерка и шук лежат на одной прямой относительно с центром окружности (тогда их расст. = $R_2 - R_1 = 6\sqrt{2}$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ можем предположить, что водомерка движется по 2 окружности со скоростью в 5 раз превосходящей шук и min расст. достигается, когда они наход. в одной точке.

Тогда найдём их первое пересечение. Это случится, когда шук пройдёт $\frac{1}{8}$ окружн., а водомерка $5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ (целая наход. диаметр противоположно).

$\frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ \Rightarrow$ найдём точку как продолж. медианы (и бисс.) в $\triangle$ ^{прямоуг.} полученным ~~с~~ N_0 , центром и N_0 , свм. на 90° в попер. напр-ии.

$\Rightarrow N_0'$ - результир. поворота ~~N.~~ N_0 на 90° относительно O
 $N_0'(-5\sqrt{2}, 5)$, $\Rightarrow K$ - сер MN_0' . $K(\frac{5-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5+5\sqrt{2}}{2})$

Продолжим OK до пересек с ω_2 . $OK \cap \omega_2 = P_1$.

$$\frac{OK}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_1(\frac{\sqrt{2}(5-5\sqrt{2})}{2}, \frac{\sqrt{2}(5+5\sqrt{2})}{2})$$

Т.к. $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 5$, то ~~через~~ через каждую $\frac{1}{5}$ окружности

водомерка будет совпадать с шук (шук пройдёт $\frac{1}{5}$; водомерка $1 \frac{1}{5}$) $\Rightarrow$ точки P_1, P_2, P_3, P_4 будут иметь следующие координаты

$$P_1 \left(\frac{\sqrt{2}(5-5\sqrt{3})}{2}; \frac{\sqrt{2}(5+5\sqrt{3})}{2} \right), P_2 \left(\frac{\sqrt{2}(5-5\sqrt{3})}{2}; \frac{-\sqrt{2}(5+5\sqrt{3})}{2} \right);$$

$$P_3 \left(\frac{\sqrt{2}(5+5\sqrt{3})}{2}; \frac{\sqrt{2}(5-5\sqrt{3})}{2} \right); P_4 \left(\frac{\sqrt{2}(5+5\sqrt{3})}{2}; \frac{-\sqrt{2}(5-5\sqrt{3})}{2} \right)$$

Ответ: расстановка будет крайними в точках

$$P_1 \left(\frac{5\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2}; \frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} \right), P_2 \left(\frac{5\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2}; \frac{-5\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} \right),$$

$$P_3 \left(\frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}; \frac{5\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2} \right), P_4 \left(\frac{5\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}; \frac{-5\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2} \right)$$

7. Заметим, что y -е симметрично относительно $x \Rightarrow$ если пара (x, y) подходит, то пара $(-x, y)$ тоже подходит.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & (2) \end{cases}$$

из (1):

$$x \in [y-12; y]$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a$$

при $a \neq 0$ имеет беск. много решений $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ с учетом того, что 1 имеет > 2 решения $a=0 \Rightarrow$

$|x|=8, |y|=6$ Тогда ответы

$$x=-8; y=-6$$

$$x=8; y=-6$$

Ответ: $a=0$