

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр.  Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?
2. [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n$ с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна S , а $a_1 > 0$. Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма S увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится S , если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?
3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 + 2x - 58} + 5)|x^3 - 7x^2 + 13x - 3| \leq 0$.
4. [5 баллов] Решите уравнение $3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x - 4| + 16 = 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(2; 2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.
6. [5 баллов] а) Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E и пересекает вторично окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{3}{2}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что $BD = 1$.
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 64, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Минимально возможная сумма $80 \cdot 1 = 80$,
максимально возможная $80 \cdot 6 = 480$.
Если на кубике выпала одна из сумм
 > 400 , ~~то~~ капицер n , то если на каж-
дом кубике выпало бы $7 - x_i$; $x_i \rightarrow$ значение
выпавшее на ~~каждом~~ кубике i , то полу-
чалась бы сумма $560 - n$, т.е. сумма
меньшая 160 , т.к. $n > 400$, если же снова
на каждом кубике положить значение на
 $7 - n$, то получится именно этот способ
выпадения кубиков, при котором $n > 400$.
Для каждого способа получения числа
 $n > 400$, соответствует $\pm$ способ полу-
чения числа $n \leq 160$ и наоборот, поэто-
му количество способов получить ~~число~~ сумму не
 $>$ чем 160 , т.е. ≤ 160 , больше чем получить
сумму > 400 , т.к. добавляются способы
получения равно 160 . (т.к. они существуют)
т.е. $n >$ чем $\pm$ капицер когда все
факты
Ответ: $\leq 160 \rightarrow$ больше способов получить
чем > 400

$$\underbrace{(\sqrt{x^3+2x-58}+5)}_{\sqrt{0}} \underbrace{|x^3-7x^2+13x-3|}_{\sqrt{0}} \leq 0.$$

Тут введение числа >0 на ≥ 0 , ≤ 0 , это возможно, только если число ≥ 0 , равно 0, т.к. иначе $>0 \times >0 \Rightarrow >0$, но не ≤ 0 . $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |x^3-7x^2+13x-3| = 0.$$

$$x^3-7x^2+13x-3=0;$$

$$(x-3)(x^2-4x+1)=0;$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$D=16-4=12=(2\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

023.

$$\sqrt{x^3+2x-58} \geq 0$$

$$x^3+2x-58 \geq 0$$

Проделаю проверку ~~каждой~~ найденной

1) ~~значений~~ $x=3$

$$27+2 \cdot 3-58 < 0, \text{ не урв.}$$

$$2) x=2-\sqrt{3}$$

$$(2-\sqrt{3})^3+2(2-\sqrt{3})-58 = \text{не урв.}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 3^3 & 2 \cdot 3 \end{matrix} \Rightarrow < 58, \text{ т.к. } 3^3+2 \cdot 3 < 58.$$

$$3) (2+\sqrt{3})^3+2(2+\sqrt{3})-58 = 8+3\sqrt{3}+12\sqrt{3}+18+4+2\sqrt{3}-58 =$$

$$= 30+17\sqrt{3}-58 = 17\sqrt{3}-18$$

$$\sqrt{15 \cdot 17} = 25,5 > 18 \Rightarrow \text{урв. усл.}$$

$$\sqrt{3} > 1,5, \text{ т.к. } 3 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 2,25 < 3.$$

Ответ: $x=2+\sqrt{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S \quad \sim 2$$

d - разность прогрессии.
 n - кол-во членов.
 $a_1 \rightarrow$ первый член

$$a_1 \cdot n + \frac{1+d(n-1)}{2} = S$$

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 + \dots + a'_n = 2S \quad \text{где } a'_1 = a_1, d_1 = 3d = 28$$

$$a_1 \cdot n + \frac{1+3d(n-1)}{2} = 2S$$

Разложим на 2, ~~суммы~~ ~~первой~~ прогрессии и она будет равняться сумме второй.

$$2a_1 \cdot n + 1 + dn - d = a_1 \cdot n + \frac{1+3d(n-1)}{2}$$

$$a_1 n + 1 + dn - d = \frac{1+3d(n-1)}{2}$$

$$2a_1 n + 2dn - 2d + 2 = 1 + 3d(n-1)$$

$$2a_1 n - dn + d + 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{dn - d - 1}{2n}$$

Сумма 1-ой прогрессии

$$a_1 \cdot n + \frac{1+d(n-1)}{2}$$

$$\frac{dn - d - 1 + 1 + dn - d}{2}$$

$$\frac{2dn - 2d}{2}$$

если $d_2 = 4d$
 $a_2 = a_1$ $\Rightarrow$ то сумма в 2,5 раза

Сумма второй прогрессии
где $d_2 = 4d_1, a_2 = a_1$

$$a_2 \cdot n + \frac{1+4d(n-1)}{2}$$

$$\frac{dn - d - 1 + 1 + 4dn - 4d}{2}$$

$$\frac{5dn - 5d}{2}$$

Отберем: в 2,5 раза

№4.

$$3x^4 + \underline{x^2 - 8x - 4x^2} / (x-4) + \underline{16} = 0$$

$$(x-4)^2 - 4x^2 / (x-4) + 3x^4 = 0$$

$$|x-4| = \alpha \quad \alpha \geq 0.$$

$$\alpha^2 - 4x^2 \cdot \alpha + 3x^4 = 0;$$

$$D = 16x^4 - 4 \cdot 3x^4 = 4x^4 = (2x^2)^2$$

$$x_1 = \frac{4x^2 - 2x^2}{2} = x^2$$

$$x_2 = \frac{4x^2 + 2x^2}{2} = 3x^2$$

Возвратная замена

$$\begin{cases} |x-4| = x^2 \\ |x-4| = 3x^2 \end{cases}$$

1) $x-4 = x^2, x \geq 4$

$$x^2 - x + 4 = 0$$

$D < 0$ нет корней

2) $x-4 = 3x^2, x \geq 4$

$D < 0$, нет корней

3) $4-x = x^2, x < 4$

$$x^2 + x - 4 = 0;$$

$$D = \sqrt{17}^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{17} < 5, \quad \frac{\sqrt{17}-1}{2} < 4, \quad \frac{\sqrt{17}-1}{2} < 2 < 4$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 < 4$$

4) $4-x = 3x^2, x < 4$

$$3x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 48 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{6} = -1\frac{1}{3} < 4$$

$$x_2 = \frac{-1+7}{6} = 1 < 4$$

~~Все найденные корни удов-короче~~
~~кающего~~

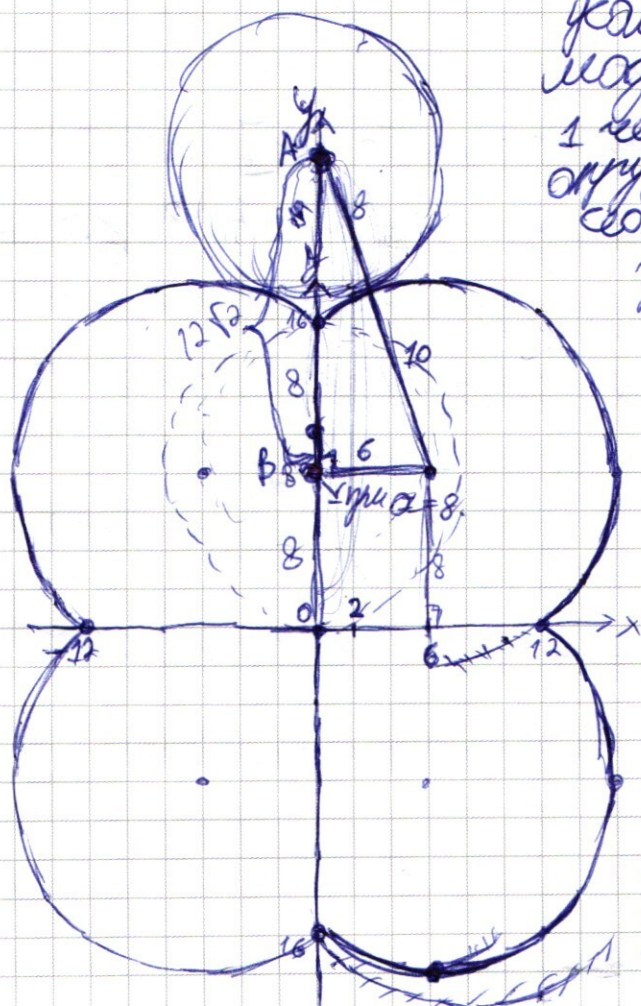
Ответ: $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, 1, -1\frac{1}{3}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 64 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100 \end{cases}$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 100$$



← Это график окружности с центром в $x=6, y=8$ и радиусом 10, но только x и y по модулю, поэтому только в I четверти это график этой окружности, где x и y являются собой >0 . Во II четверти симметрично к графику в I четверти относительно оси y , т.к. $y > 0, |y| = y$, а $x < 0$ и в каждой x , поэтому значение как в симметричной точке. И еще, т.к. вместо x берем $|x|$ то симметрично в II четв. график симметричен I-ой четв. относительно $x=0$. В III четв. симметрично I-ой относительно $(0,0)$ начала координат, т.к. x и y берется по модулю.

Нам $x^2 + (y-a)^2 = 64 \rightarrow$ окружность четв. координат касаясь на оси y , а радиус равен $\sqrt{64} = 8$ единиц. При $a=8$, касается в 1 точке, $(0,16)$ из графиков видно, что при $a > 8$ вплоть до a при котором $x^2 + (y-a)^2 = 64$ касается $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$ в 1 точке, будет по 2 решения, а когда касается в 1 точке, то в II четверти тоже касается $x^2 + (y-a)^2 = 64$ в 1 точке. Когда касаются в 1 точке то проведем линию

центров, она пройдет через точку касания
 и её длина как у радиуса в окружности: $8+10=18$.
 Расстояние от $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$ до осей,
 равняется 6. По теореме Пифагора
 $18^2 - 6^2 = BA^2$ (точки B и A отмечены на графике).
 $BA = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$. Расст от B до $O(0,0) = 8$.
 В итоге расст от A до $O(0,0) = 12\sqrt{2} + 8$.
 Это и есть наибольшее значение a , расстояние
 от оси $x^2 + (y-a)^2 = 64$ с самым большим по
 оси y центром. $a \in (8; 12\sqrt{2} + 8]$, когда
 центр от ~~$x^2 + (y-a)^2 = 64$~~ $x^2 + (y-a)^2 = 64$, на
 ходится имеет положительную координату
 по y . Под осью x график симметричен
 графику под осью x . Центр
 от $x^2 + (y-a)^2 = 64$, на оси y , то переде-
 сие значения a под осью x , симметрично
 как тем, что под осью, тогда ~~$a \in$~~

$$a \in [-12\sqrt{2} - 8; -8)$$

Ответ: ~~$a \in [-12\sqrt{2} - 8; -8)$~~

$$a \in [-12\sqrt{2} - 8; -8) \vee (8; 12\sqrt{2} + 8]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2/x - 4 + 16 = 0;$$

$$3x^4 + x^2 - 4x + 16 - 4x - 4x^2/x - 4 = 0;$$

$$x(x-4) - 4(x-4) - 4x^2/x - 4 = 0;$$

$$(x-4)^2 - 4x^2/x - 4 + 3x^4 = 0;$$

$$|x-4| = a$$

$$a^2 - 4x^2a + 3x^4 = 0$$

$$D = 16x^4 - 12x^4 = 4x^4 = 2x^2$$

$$x_1 = \frac{4x^2 + 2x^2}{2} = 3x^2$$

$$x_2 = \frac{4x^2 - 2x^2}{2} = x^2$$

$$x^2 - x + 4 = 0$$

$$D = 1 - 16 < 0$$

$$x < 4$$

$$4 - x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$|x-4| = x^2 \quad x > 4, \text{ не}$$

$$|x-4| = 3x^2 \quad x > 4, \text{ не}$$

$$x-4 = x^2 a$$

$$x-4 = 3x^2$$

$$3x^2 - x + 4 = 0$$

$$D < 0$$

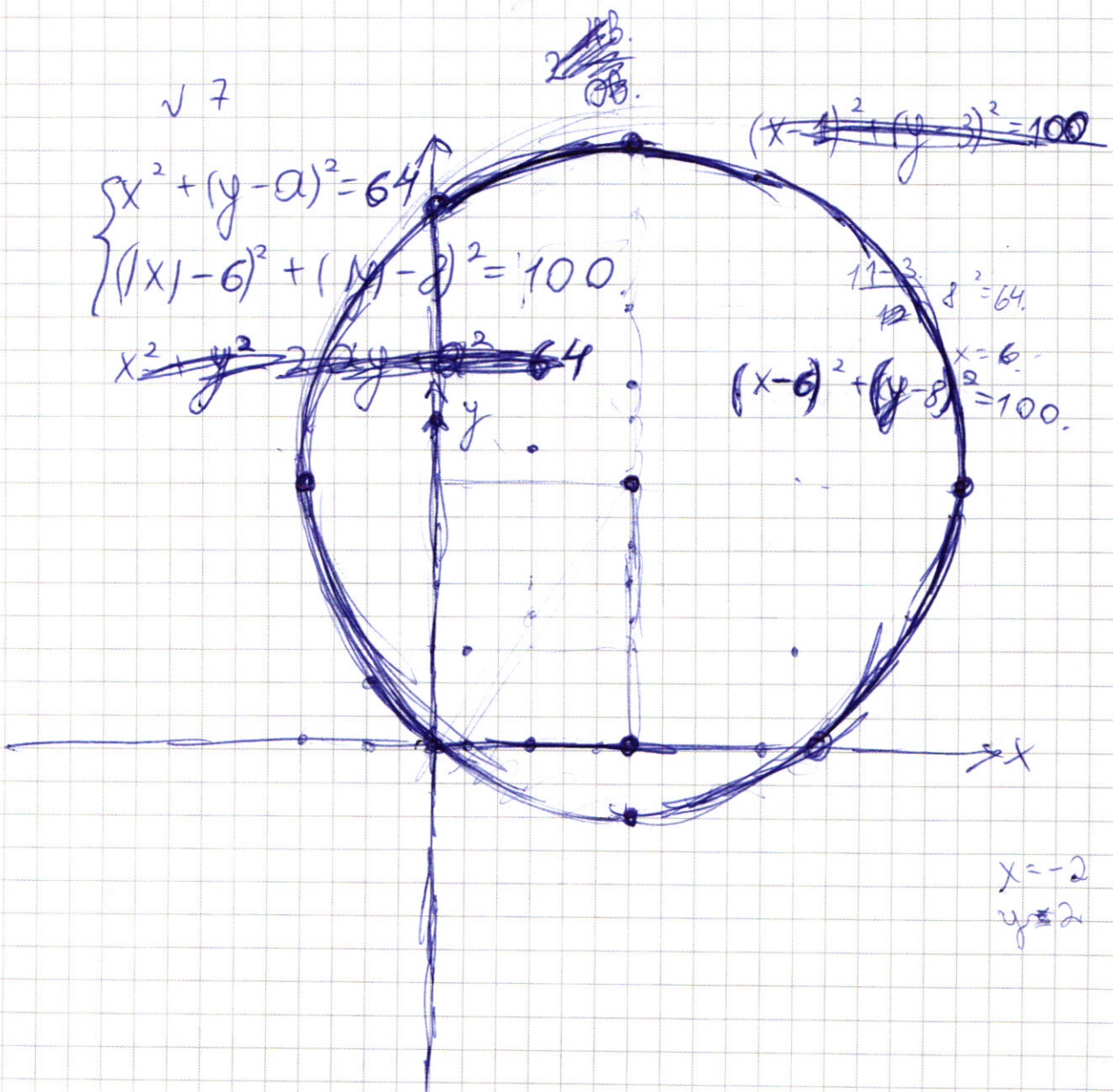
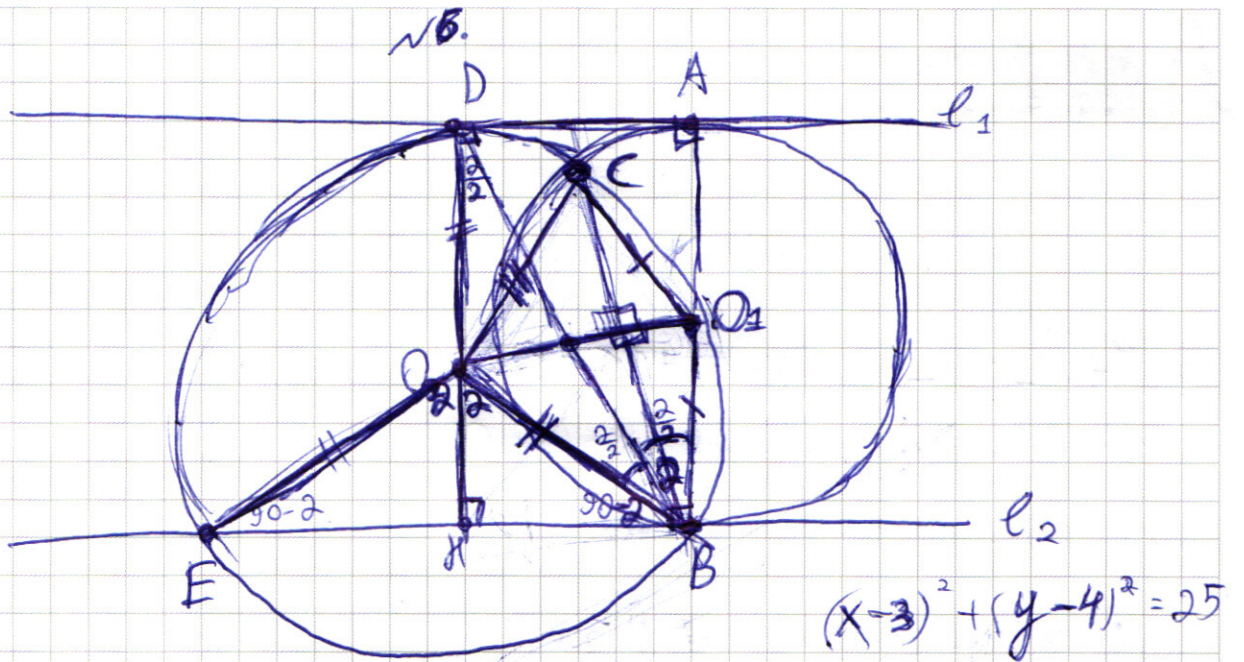
$$4 - x = 3x^2$$

$$3x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 \cdot 3 = 49 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + 7}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1 - 7}{6} = -1\frac{1}{3}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1
сумма > 400 или сумма ≤ 160 !?

$$80 \cdot 6 = 480$$

$$80 - 480$$

$$80 - 160$$

$$401 - 480$$

2
5

→ сумма
кандидатов

сумма на каждой
пути одинакова,
это важно

№2.

$$a_1, a_2, \dots, a_n. \quad \text{и} \quad a_1 > 0.$$

№3

$$(\sqrt{x^3 + 2x - 58} + 5) | x^3 - 7x^2 + 13x - 3 | \leq 0.$$

$$\sqrt{\quad} \geq 0$$

$$\geq 0$$

$$> 0 \cdot \geq 0 = \leq 0 \Rightarrow = 0$$

$$x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$$

$$x^3 + 2x - 58 \geq 0$$

$$x^3 + 2x - 58 \geq 0$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2(a_1 \ a_1+d \dots a_1+dn) = (a_1 + a_1+3d + \dots + a_1+3dn)$$

~~$$2a_1 \cdot n + \frac{(1+dn)n}{2} = a_1 \cdot n + \frac{(1+3dn)n}{2}$$~~

$$a_1 n + \frac{n+dn^2}{2} = \frac{n+3dn^2}{2}$$

$$a_1 n = \frac{2dn^2}{2}$$

$$a_1 n = 2dn^2$$

$$a_1 = 2dn$$

$$a_1 \cdot n + \frac{(1+dn)n}{2} = \frac{2dn^2 + n + dn^2}{2} =$$

$$\text{Итого} \rightarrow \frac{2,5dn^2 + \frac{n}{2}}{2}$$

$$a_1 \ a_1+4d \ a_1+4dn$$

$$n \cdot a_1 + \frac{(1+4dn)n}{2} = \frac{2dn^2 + \frac{n+4dn^2}{2}}{2} =$$

$$\frac{2dn^2 + \frac{n+dn^2}{2}}{2}$$

$$= 4dn^2 + \frac{n}{2}$$

$$3,5dn^2 + \frac{n}{2}$$

$$2dn^2$$

~~$$2dn^2 + \frac{n}{2}$$~~

Итого =

$$a_1 \cdot n + \frac{(1+3dn)n}{2} = \frac{2dn^2 + \frac{3dn^2 + n}{2}}{2} = \frac{2dn^2 + 1,5dn^2 + \frac{n}{2}}{2}$$

5.3.2
0.2.1
5.3.2
0.2.1

$$2\left(2,5dn^2 + \frac{n}{2}\right) = 3,5dn^2 + \frac{n}{2}$$

$$5dn^2 + n = 3,5dn^2 + \frac{n}{2}$$

$$1,5dn^2 = \frac{n}{2}$$

$$X^3 + 2X - 58 \geq 0;$$

$$58 = 27 + 31$$

$$(X-3)(X^2+3X+9) + 2X - 21 = 0$$

$$X^3 - 27 \quad X - 27 + X = 0$$

$$X(X^2+2) - 58 = 0;$$

$$X^3 - 27 + 2X - 27 =$$

$$(X-3)(X^2+3X+9) + 2X - 21 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \\ 2 \quad 4+2 \\ 2 \quad 6 \\ 3 \end{array}$$

$$X^3 + 3X^2 + 9X - 3X^2 - 9X - 27$$

$$(X-27)$$

$$(X-3)(X^2+3X+9) + 2X - 21 = 0$$

$$(X-3)(X^2+3X+11) - 21 = 0$$

$$X^3 - 7X^2 + 13X - 3 = 0$$

$$(X-3)(X^2 - 4X + 1) =$$

$$27 - 63 + 13 \cdot 3 - 3 = 0$$

$$27 + 39 - 66 = 0$$

$$= X^3 - 4X^2 + X - 3X^2 + 12X - 3$$

$$X=3$$

$$X^2 - 4X + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 = 12 = 2\sqrt{3}$$

$$X_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$X_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$X^3 + 2X - 58$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 469 \end{array}$$

$$(2+\sqrt{3})^3 + 2(2+\sqrt{3}) - 58$$

$$8 + 12\sqrt{3} + 18 + 9 = 58 = 35 - 58 + 12\sqrt{3}$$

$$-23 \approx 12\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ \times 146 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$144 \cdot 3$$

$$469 \rightarrow 432$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$d^2 - (2x - d)^2 = d^2 - (4x^2 - 4xd + d^2) = 4xd - 4x^2 =$$

$$= 2\sqrt{x(x-d)}$$

$$P = d + 2\sqrt{x(x-d)}$$

$$S = 2\sqrt{x(x-d)} \cdot 2\sqrt{x(x-d)} \cdot (d - 2\sqrt{x(x-d)}) (d + 2\sqrt{x(x-d)})$$

$$S = (4x(x-d) \cdot (d^2 - 4x(x-d)))$$

$$(4x^2 - 4xd)(d^2 - 4x^2 + 4xd)$$

$$4x^2d^2 - 4xd^3 - 16x^4 + 16x^3d + 16x^3d - 16x^2d^2$$

$$32x^3d - 16x^4 - 4xd^3 - 12x^2d^2$$

$$4x(d^2 - 4x)$$

$$4xd^2 - 16x^2$$

4x



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\text{№2. } a_1, a_2, \dots, a_n = S$$

$$a_1 \cdot n + \frac{1 + d \cdot (n-1)}{2} = S$$

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_n = 2S$$

$$a_1 \cdot n + \frac{1 + 3d(n-1)}{2} = 2S$$

$$a_1 \cdot n + \frac{1 + 4d(n-1)}{2} = ?S$$

$$2a_1n + 1 + dn - d = a_1n + \frac{1 + 3dn - 3d}{2};$$

$$a_1n + dn - d + 1 = \frac{1 + 3dn - 3d}{2};$$

$$2a_1n + 2dn - 2d + 2 = 1 + 3dn - 3d;$$

$$2a_1n - dn + d + 1 = 0;$$

$$a_1 = \frac{dn - d - 1}{2n}$$

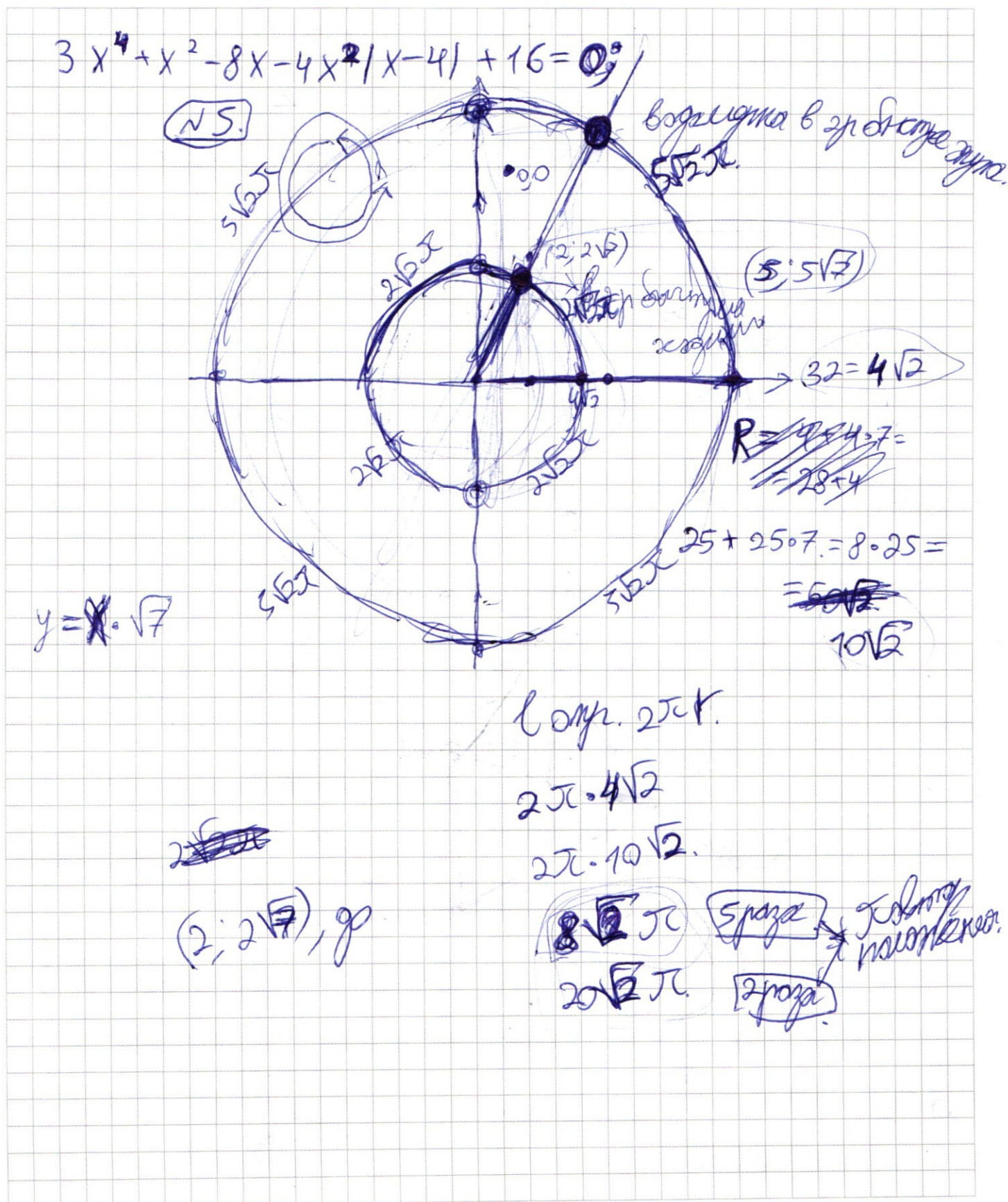
$$\frac{dn - d - 1 + 1 + dn - d}{2}$$

$$2dn - 2d$$

$$\frac{dn - d - 1 + 1 + 4dn - 4d}{2}$$

$$5dn - 5d.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~3.

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

$$a_1 = a_2 = 2dn^2$$

$$a_1 + d \quad a_1 + 2d \quad a_1 + nd.$$

$$a_1 + (n-1)d + (a_1 + nd) + (a_1 + (n+1)d)$$

$$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2 / (x-4) + 16 = 0$$

2

$$\frac{a_1^2 + a_1 dn + a_1 d + a_1 nd + d^2 n^2 + d^2 n}{2}$$

$$= \frac{4d^2 n^4 + 2d^2 n^3 + d^2 n^2 + d^2 n}{2}$$

$$\frac{x^2 + (y-a)^2}{2} = 64 \quad a_1^2 + 2a_1 dn + a_1 d + d^2 n^2 + d^2 n$$

2.

$$a_1 dn +$$

~5.

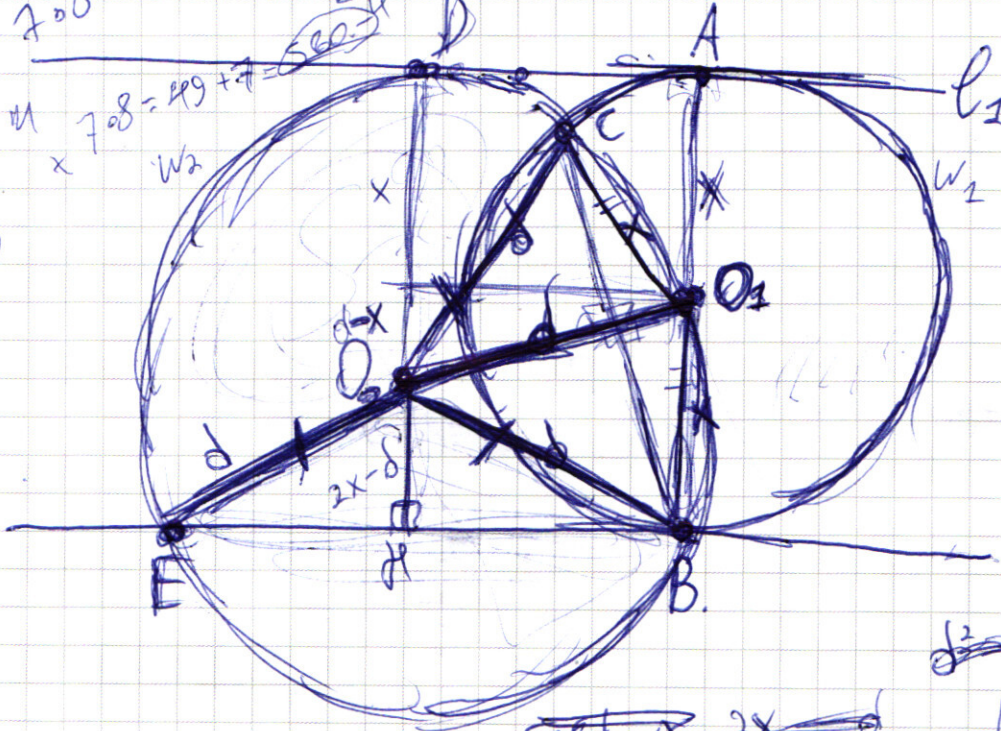
~~x+d~~

$$7080 = 560$$

$$560$$

$$7080 = 499 + 7 = 560 + 7$$

-340



$$\frac{3}{2} \frac{R_{W_2}}{K_{W_2}} - ?$$

$$O_2 O_1 \cdot Cb \cdot A =$$

$$= O_2 K \cdot FB \cdot \frac{3}{2}$$

$$d^2 - (4x^2 + 2x(d-x))$$

$$4x^2 - 4x^2$$

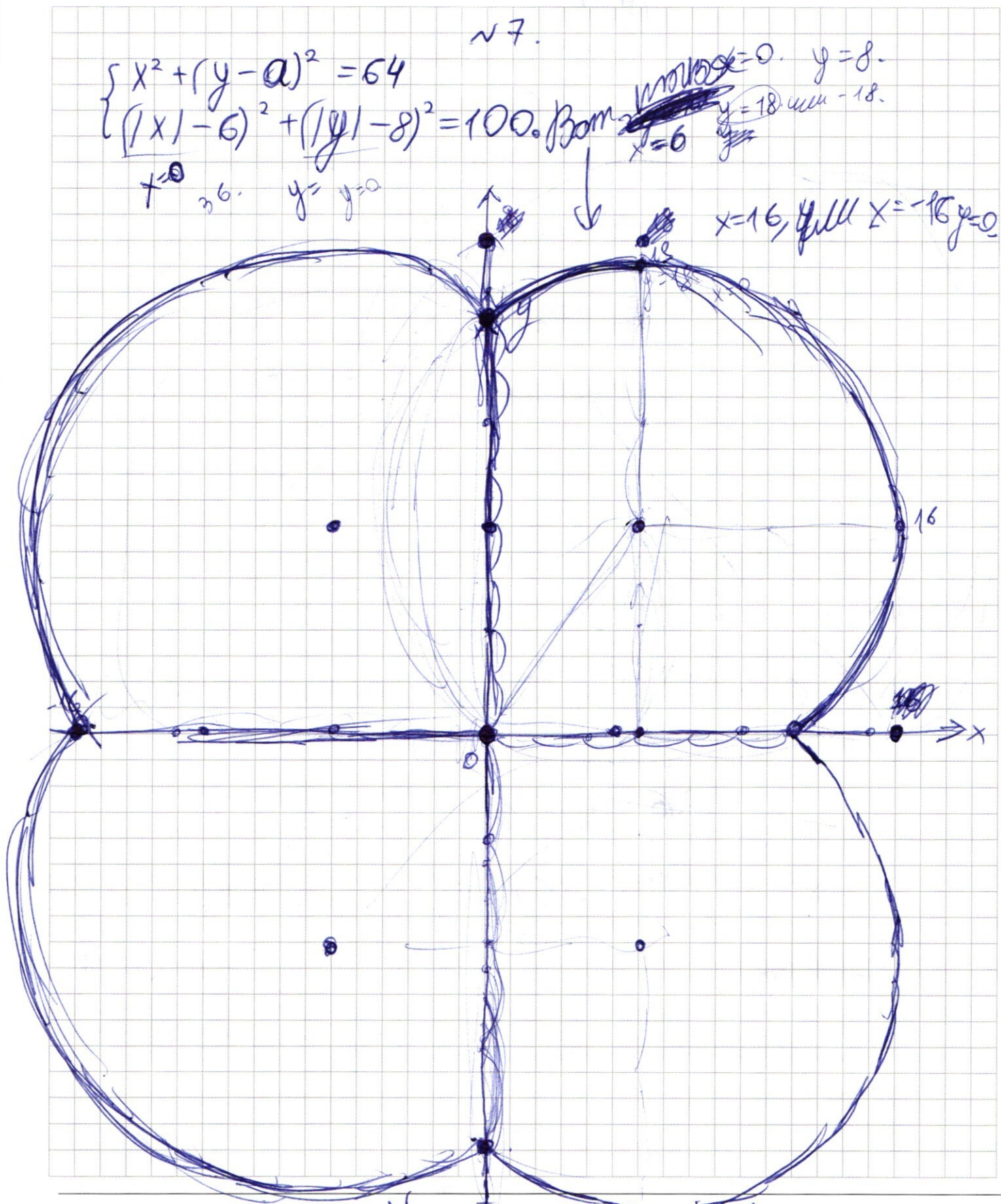
$$d^2 - (2x-d)^2$$

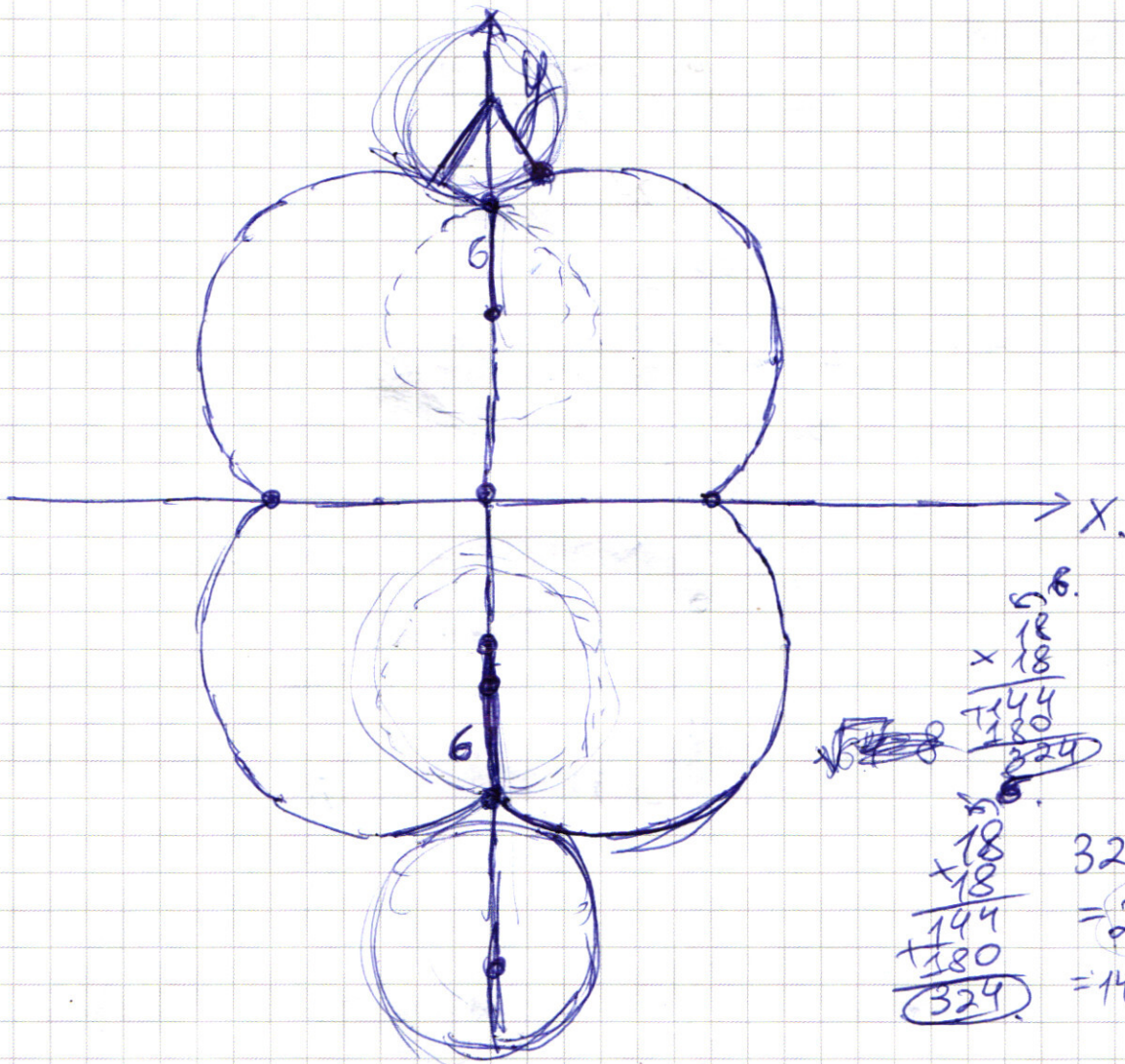
$$4x(d-x) - 4x^2$$

$$4x(d-x)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{array}{r} \sqrt{324} \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$324 - 36 = 288 = 144 \cdot 2 = 12\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-8)^2 = 100 \\ (x-6)^2 + (y-2)^2 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ya + a^2 = 64 \\ x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0 \end{cases}$$

$$2ya - a^2 = 12x - 16y = 0$$

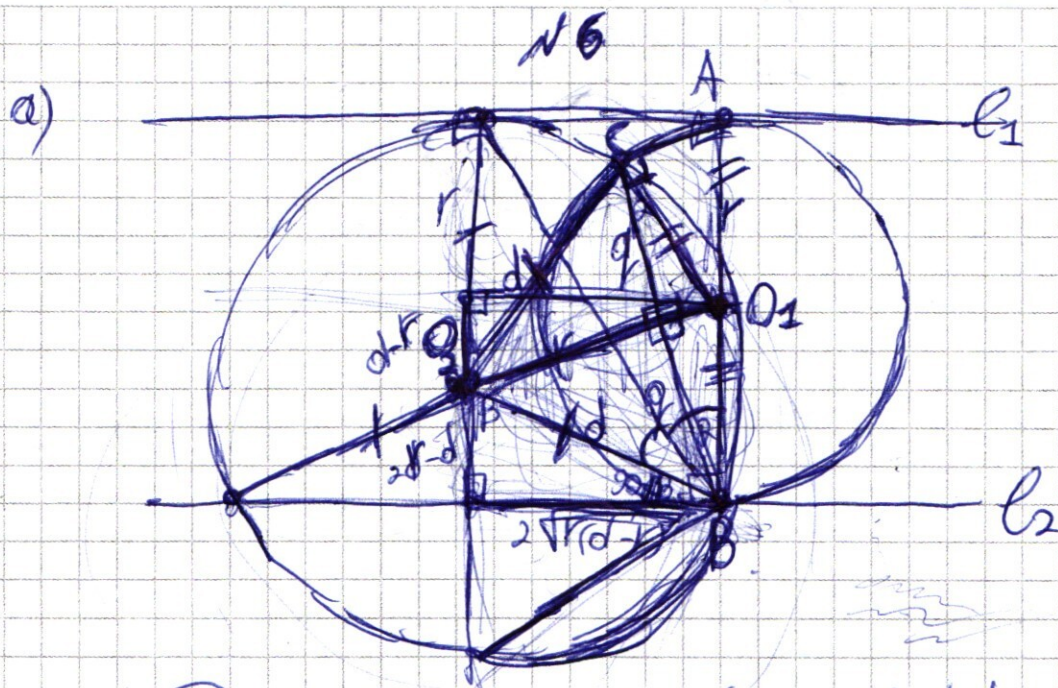
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 = 100$$

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y = 0$$

~~$$4y^2 - 48x - 64y = 0$$~~

$$\begin{aligned} a^2 - a^2y + 12x + 16y &= 0 \\ 12 = 4y^2 - 48x - 64y &= 0 \\ y^2 - 12x - 16y &= 0 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\delta < 2r$

$$d^2 - (2r-d)^2 = d^2 - 4r^2 + 4dr - d^2$$

~~$2x + 4x^2$~~

$$40r - 4r^2$$

$$4\sqrt{d-r}$$

$$2\sqrt{r(d-1)}$$

$$2\sqrt{r(d-r)}$$

