

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓1

$700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7$ Другое представление числа 700 как 8 цифр невозможно, кроме $700 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7$ (во всех других представлениях участвуют числа > 9).

I. $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7$

Всего вариантов $8!$, но без учёта того, что у нас есть две двойки, две пятерки и три единицы. Учитывая повторения, получили: $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 40 \cdot 42 = 1680$ чисел.

II. $700 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7$

Опять вариантов $8!$, но с учётом повторений: $\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = \frac{1680}{2} = 840$

Конечный ответ: $1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520

✓2

Известно, что

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = S \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + 50b_3 + b_4 + b_5 + 50b_6 + \dots + b_{2999} + b_{2999} + 50b_{3000} = 10S \quad (2)$$

Вычтем в (2) из левой и правой части. С учётом (1), получили:

$$49b_3 + 49b_6 + \dots + 49b_{3000} = 9S \Rightarrow b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{9}{49} S$$

Пусть $b_i = b_1 \cdot q^{i-1}$ (геометрическая прогрессия)

Рассмотрим последовательность $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$.

Это тоже геометрическая последовательность с коэффициентом q^3 . Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = b_3 \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1} = b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{q}{49} S$$

В свою очередь $S = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$

$$b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} = \frac{q}{49} b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} \quad | : b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$q^2 = \frac{q}{49} \quad (3)$$

$$q = \frac{3}{7} \text{ (так как все } b_i \text{ положительные } \Rightarrow q > 0)$$

$$\text{Пусть } b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + \dots + b_{2999} + 2b_{3000} = K \quad (4)$$

Вместе S из левой и правой части (4) с учётом (1):

$$b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000} = K - S$$

Последовательность $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ тоже геометрическая последовательность с коэффициентом q^2

$$K - S = b_2 \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = b_2 \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} = b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1} = q S$$

$$K = S + qS = S(1 + q) = \frac{10}{7} S \Rightarrow S \text{ увеличится в } \frac{10}{7} \text{ раз}$$

Ответ: увеличится в $\frac{10}{7}$ раз

✓3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

Поскольку при подстановке в $f(x) = x^3 - 4x + 80$ число -6 значение

будет отрицательным $\Rightarrow x = -6$ не является корнем уравнения

Разделим на $x+6$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x + 4$$

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x^3 - 4x + 80 - 2x^2 - 16x - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ (x^3 - 4x^2) + (2x^2 - 20x + 48) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x^2(x-4) + 2(x-6)(x-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ (x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x = 4 \\ x^2 + 2x - 12 = 0 \end{cases} \end{cases} *$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 + \sqrt{13} = \sqrt{13} - 1 \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt{13} - 1$; 4

✓ 4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x^2 - 4x + 4) \geq 3x^2|x-2|$$

$$* x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 52$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2|x-2|$$

Положим $(x-2)^2 = (|x-2|)^2$, тогда положим $t = |x-2|$

$$* t^2 - 3x^2 \cdot t + 2x^4 \geq 0$$

$$(t - x^2)(t - 2x^2) \geq 0$$

Положим как $x^2 \geq 0$ и $2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq x^2$ и:

$$\begin{cases} t \geq 2x^2 \\ t \leq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2| \geq 2x^2 & (1) \\ |x-2| \leq x^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup$

$$\cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup$$

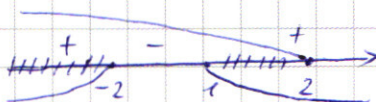
$$\cup [1; +\infty)$$

$$(2) |x-2| \leq x^2$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} D < 0 \Rightarrow \\ \text{любое} \\ \text{число} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (x=0; 2 \geq 0 - \\ \text{верно}) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \\ (x-1)(x+2) \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$$

$$* t^2 - 3x^2 \cdot t + 2x^4 \geq 0$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$t = \frac{3x^2 \pm x^2}{2}$$

$$\begin{cases} t = x^2 \\ t = 2x^2 \end{cases}$$

$$t^2 - 3x^2 \cdot t + 2x^4 = (t - x^2) \cdot (t - 2x^2)$$

$$(1) |x-2| \geq 2x^2$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} D < 0 \Rightarrow \\ \text{нет} \\ \text{решений} \end{matrix}$$

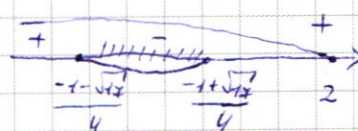
$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (x=0 \Rightarrow 2 \leq 0 - \\ \text{неверно}) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2 + x - 2 \leq 0 \\ D = 1 + 4 \cdot 4 = 17 \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ \left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right) \leq 0 \end{cases}$$



$$x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$(|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a = b^2$$

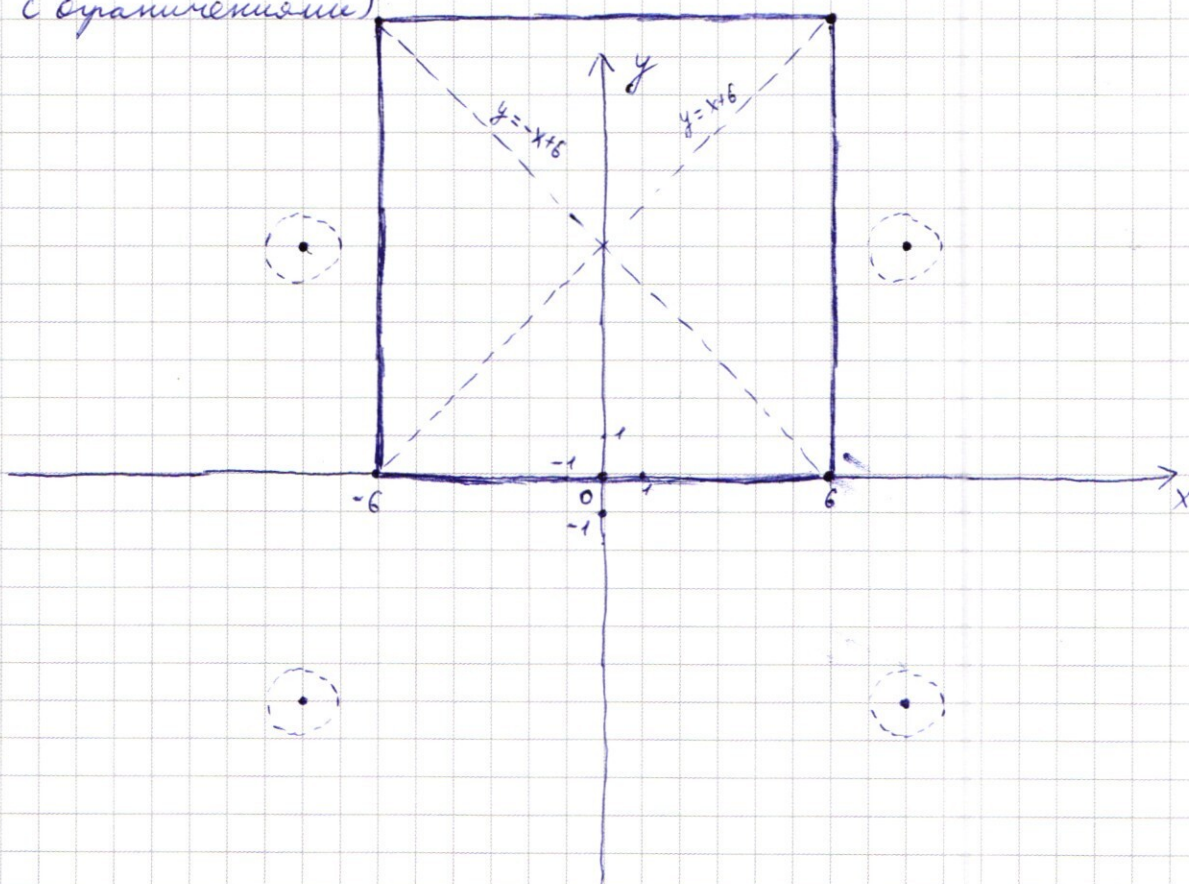
Пусть b - радиус окружности графика

Построим графики функций:

$$1) |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12$$

$$2) (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = b^2$$

Для 1) получим квадрат (раскрывая два модуля по определению с ограничениями)



А график 2) будет четырьмя окружностями с центрами $(8; 6); (8; -6); (-8; 6); (-8; -6)$ и радиусом b

Из второго уравнения очевидно, что $b \geq 0$

При $0 \leq b < 2$ - нет решений

При $b = 2$ - 2 решения

При ~~от~~ $2 < b < 14$ - более 2 решений (засчёт верхних окружностей)

При $\overset{14}{b} \leq \overset{b}{b} < \sqrt{14^2 + 20^2} = \sqrt{596}$ (расстояние от центра одной из нижних окружностей до самого дальнего от центра угла квадрата) - более 2 решений (засчёт нижних окружностей)

При $b = \sqrt{596}$ - 2 решения (нижние окружности проходят через 2 угла квадрата, верхние не проходят через него вовсе)

При $b > \sqrt{596}$ - нет решений

$$\Downarrow b = 2$$

$$\downarrow b = \sqrt{596}$$

$$\Downarrow$$

$$\downarrow a = 4$$

$$\downarrow a = 596$$

Ответ: 4; 596

✓ 5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$700 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

N1

$$1112 \ 2557$$

$$\frac{8!}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 40 \cdot 42 = 1680$$

$$2255$$

$$2255$$

$$2255$$

$$2255$$

N2

$$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$$

$$b_i > 0$$

$$\Sigma = S$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ - 184 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$b_1 + b_2 + 50b_3 + b_4 + b_5 + 50b_6 + \dots + b_{2998} + b_{2999} + 50b_{3000} = 10S$$

$$b_0 = b_1$$

$$b_0 = b_3$$

$$q_0 = q$$

$$q_0 = q^3$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3$$

$$S = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad b_1 q^{\frac{q^{3000} - 1}{q - 1}} = K - S =$$

$$b_1 \frac{2^4 - 1}{2 - 1}$$

$$= S q^2$$

$$b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000} = K - S \quad (15)$$

$$K = S + S q = S(1 + q) =$$

$$b_3 = b_1 q^2 = \frac{10}{7} S$$

$$49(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = 9S$$

$$b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000} = \frac{9}{49} S = b_3 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$\frac{49}{9} b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = S = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

Увеличивается в $\frac{10}{7}$ раз

$$\frac{49}{9} q^2 = 1$$

$$q^2 = \frac{9}{49} \Rightarrow q = \frac{3}{7}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

Огранич.:
 $x^3 - 4x + 80 \geq 0$

$$\sqrt{2} \left(\frac{x}{2} + 3\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$x = -6$?

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x+4$$

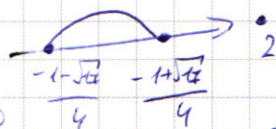
верн

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{4} (x^3 - 4x + 80) = x^2 + 8x + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 - 2x^2 - 8x - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 24x + 48$$

$$1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$(x-4)(x^2)$$

$$-\frac{1-\sqrt{17}}{4} \leq x \leq -\frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$$-2(x^2 + 10x + 24)$$

$$(x+12)(x-2)$$

$$x^2 - 10x + 24$$

$$\begin{cases} x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \end{cases}$$

$$x^3 - 2x^2 + 2x^2$$

$$27 - 18 - 60 + 48$$

$$64 + 48 - 32 - 80$$

$$x^3 - 4x^2 + \frac{2}{11}x^2 - 20x + 48 =$$

$$= x^2(x^2 - 4) + 2(x-6)(x-4)$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 16)$$

$$D = 9x^4 - 8x^4 = x^4$$

$$t = \frac{+3x^2 \pm x^2}{2} = x^2$$

$$|x-2| = t$$

$$t^2 - 4x^2 \cdot t + 2x^4 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 |x-2| + 4 \geq 0$$

$$x-2 \geq 0$$

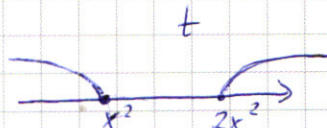
$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 |x-2| \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-2)^2 \geq 3x^2 |x-2|$$

$$(t-x^2)(t-2x^2) \geq 0$$



$$\begin{cases} t \geq 2x^2 \\ t \leq x^2 \end{cases}$$

Ответ: $4; -1 \pm \sqrt{17}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{4} ; -\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right] \\ |x-2| \leq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{1-\sqrt{5}}{4} ; -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right] \\ x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$|x-2| \leq x^2$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1; -2$$

$$(x-1)(x+2) \geq 0$$

$$2+1-4-3=1-4$$

$$X = (-\infty; 2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{5}}{4} ; -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

$$x \in [1; 2]$$

$$x \geq 2$$

$$\tan \gamma = \frac{5\sqrt{7}}{5} = \sqrt{7}$$

$$R = \sqrt{7^2 + (7\sqrt{7})^2} = 7\sqrt{1+7} = 7\sqrt{8} = 14\sqrt{2}$$

$$v_B = 2v_{mc}$$

$$t_B = \frac{2\pi R_B}{v_B}$$

$$\frac{t_m}{t_B} = \frac{r_m}{R_B} \cdot \frac{v_B}{v_m}$$

$$t_m = \frac{2\pi r_m}{v_m}$$

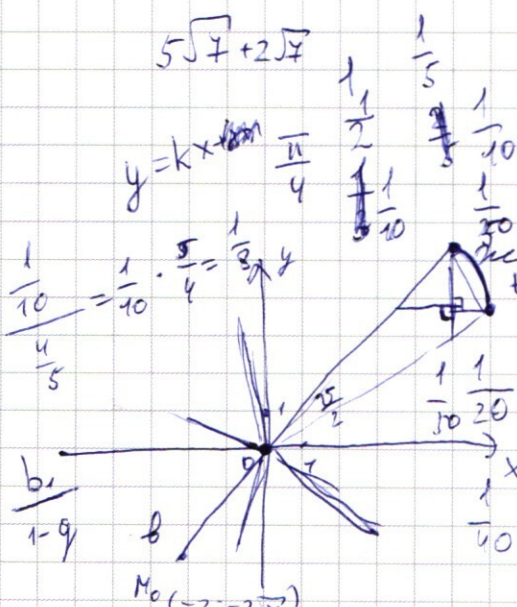
$$= \frac{10}{4} \cdot 2 =$$

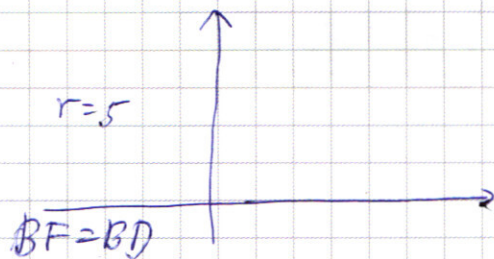
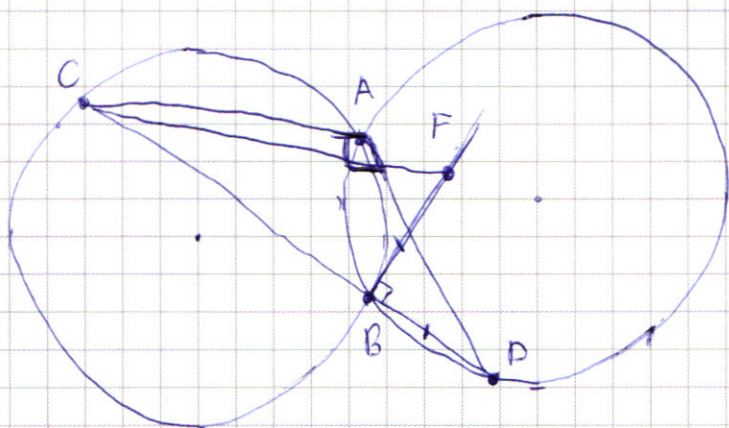
$$R_B = \sqrt{4 + 4 \cdot 7} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} = 5$$

$$r_m = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{250} = \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{250}$$

$$b_1 = \frac{1}{10} ; q = \frac{1}{5}$$





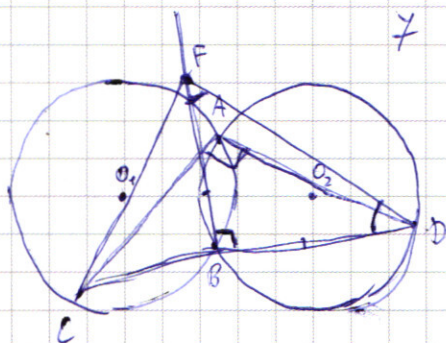
$$y=0$$

$$x=0$$

$$-y+6+x-y+6-x=12$$

$$X = (k_1; k_1; -k_1; -k_1)$$

$$y = (k_2; -k_2; +k_2; -k_2)$$



$$y=k_1 \Rightarrow y=k_1$$

$$x=k_2 \Rightarrow x=-k_2$$

Если $x \neq 0$

$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

$$|y-6|=12$$

$$y=18$$

$$y=-6$$

$$y \geq 0$$

$$|t-x| + |t+x| = 12$$

$$(x-8)^2 + t^2 = a$$

$$|p_1-6-p_2| + |p_2-6+p_1|$$

$$x = p_1$$

$$y = p_2$$



$$|y-6+x| \leq 12$$

$$-12 \leq y-6+x \leq 12$$

$$-12 \leq y-6-x \leq 12$$

$$-24 \leq 2y-12 \leq 24$$

$$-12 \leq y-6 \leq 12$$

$$-6 \leq y \leq 18$$

$$y-x \leq 6$$

$$x=6$$

$$y=0.6$$

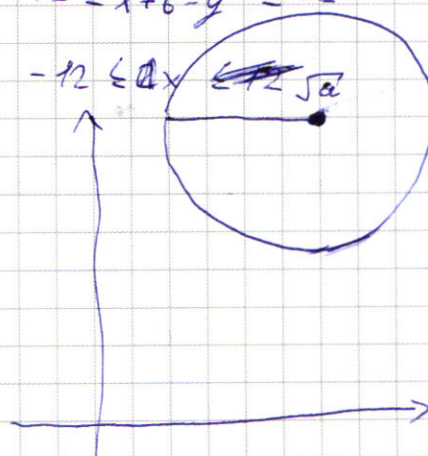
$$y=0.4$$

$$x=8 \quad -12 \leq y-6+x \leq 12$$

$$-12 \leq x+6-y \leq 12$$

$$-12 \leq x \leq 12 \sqrt{a}$$

$$x^2 + y^2 - 16|x| + 64 = -12|y| + 36$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

