

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 700 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Таким образом, ~~из~~ наше число состоит строго из
2-х двоек, 2-х пятёрок, одной семерки и 3-х единиц.
Значит, всего таких чисел будет:

$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot 4$ Так как после того, как мы задели
цифры 2, 5, 7 - единицы, расположатся однозначно

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot 4 = \frac{8!}{2 \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{2 \cdot 4!} \cdot 4 = 28 \cdot 15 \cdot 4 = 28 \cdot 60 =$$

$$= 1680$$

Ответ: таких чисел 1680

Задача №2

(b_n) - геометрическая прогрессия; знаменатель равен 9

Тогда $S(b_n) = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}; q \neq 1$

Пусть $S_{3000} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$, теперь посмотрим на
численность каждого 3-его члена, последовательность после

$b(n) = \{b_1; b_2; 30b_3; \dots; 30b_{3000}\}; \{b_3; b_6; \dots; b_{3000}\}$ - ко-
- геометрические прогрессии; $q_1 = q^3$

$$S(b'n) = S(b_n) + 49(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) =$$

$$= \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} + 49 \cdot \frac{b_3(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = 10 \cdot \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

Отсюда найдем q :

$$\frac{49}{q^3-1} b_1 q^2 = \frac{9}{q-1} b_1 ; \quad 49q^2 = 9(q^2+q+1)$$

$$3q^2 + 3q - 40 = 0$$

$$40q^2 - 3q - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac; D = 81 + 160 \cdot 9 = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$q = \frac{3 \pm 39}{80} \quad \int \quad q = \frac{42}{80} = \frac{3}{5} \quad \text{Так как}$$

все члены последовательности положительны, то

$$q = \frac{3}{5}$$

~~Мы~~ Теперь рассмотрим не последовательность:

$b''(n) = \{b_1; 2b_2; \dots; 2b_{3000}\}; \{b_2; b_4; \dots; b_{3000}\}$ - геометрические прогрессии; $q_2 = q^2$

$$S(b''(n)) = S(b(n)) + b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}$$

$$\text{Значит, } \frac{S(b''(n))}{S(b(n))} = \frac{S(b(n)) + \frac{b_2(q^{3000}-1)}{q^2-1}}{S(b(n))} = 1 + \frac{\frac{b_2 q (q^{3000}-1)}{q^2-1}}{\frac{b_1 (q^{3000}-1)}{q-1}}$$

$$= 1 + \frac{q}{q+1} = 1 + \frac{0,6}{1,6} = 1 \frac{3}{8} = 1,375$$

Ответ: сумма увеличится в 1,375 раз

Задача №3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^2 - 4x + 80} = x^2 + 6x + 24$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \sqrt{x^2 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$(x+6) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 - 4x + 80} - x - 4 \right) = 0$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} x+6=0 \\ x^2-4x+8 \geq 0 \end{cases} (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2-4x+80} = x+4 \quad (2)$$

(1) $\begin{cases} x+6=0 \\ x^2-4x+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=-6$ неверное, Значит, $x=-6$ не является корнем уравнения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) \sqrt{x^3 + 4x + 80} = x + 4$$

$$\begin{cases} x^3 + 4x + 80 = (x^2 + 8x + 16) \cdot (x - 4) \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

Заметим, что $x = 4$ является корнем уравнения.

Получим

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 & x - 4 \\ \hline x^3 - 4x^2 & x^2 + 2x - 12 \\ \hline 2x^2 - 20x + 48 & \\ 2x^2 - 8x & \\ \hline -12x + 48 & \\ -12x + 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 2^2 + 48 = 52, D_1 = 1 + 12 = 13$$

$$x = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$(x - 4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$(x - 4)(x + 1 + \sqrt{13})(x + 1 - \sqrt{13}) = 0$$

Возвращаемся к системе:

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 - \sqrt{13} \\ x = -1 + \sqrt{13} \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$-1 - \sqrt{13} \leq -4$$

Значит, $\begin{cases} x = 4 \\ x = -1 + \sqrt{13} \end{cases}$

Вернёмся к исходной ~~системе~~ совокупности:

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 4 \\ x = \sqrt{13} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{13} - 1 \end{cases}$$

Ответ: $x = 4$; $x = \sqrt{13} - 1$

Задача №4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 > 0$$

Раскроем модуль по определению:

$$\begin{cases} 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x^4 + x^2 - 4x - 6x^2 + 3x^3 + 4 \geq 0 \\ x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad 2x^4 - 3x^3 + \cancel{4x^2} + 6x^2 + (x-2)^2 \geq 0$$
$$x^2(2x^2 - 3x + 6) + (x-2)^2 \geq 0$$

~~Значит~~ Посмотрим на $2x^2 - 3x + 6 = f(x)$

$$D = b^2 - 4ac; D = 9 - 48 < 0$$

Значит, $f(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}$

Тогда, заметим, что $x^2 \geq 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 6 \geq 0 \\ (x-2)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Значит,}$$
$$x^2(2x^2 - 3x + 6) + (x-2)^2 \geq 0$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$x \geq 2$ - решение системы (1)

$$(2) \begin{cases} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0 \\ x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

Чтобы решить неравенство, сначала решим уравнение:

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения, тогда:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 2x^3 \\ \hline 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\ 5x^3 - 5x^2 \\ \hline -4x + 4 \\ -4x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$$

Заметим, что $x = -2$ является
корнем уравнения, тогда:

$$2x^3 + 5x^2 - 4 \mid x + 2$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 - 4 \\ x^2 + 2x \\ \hline -2x - 4 \\ -2x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 625; \sqrt{D} = 25; x = \frac{-1 \pm 25}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm 25}{4}$$

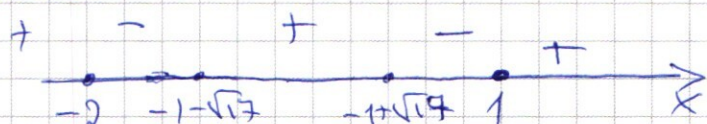
Значит, ~~решения~~ корни
уравнения являются:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 1$$

С помощью метода интервалов,
решим неравенство:

$$(x - 1)(x + 2)(2x^2 + x - 2) \geq 0$$



$$\text{Значит, } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\mathbb{R}}{2}(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$

Вернёмся к системе (2)

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty) \\ x < 2 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2)$$

Теперь вернёмся к исходной ~~системе~~
совокупности

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; 2) \end{cases}$$

Значит,

$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$

Задача №6

$$\begin{cases} |y-6+x| + |y-6-x| = 12 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

Раскроем оба модуля в первом уравнении по определению; для удобства запишем вместе совокупности из 4-х систем, рассмотрим случаи:

$$\textcircled{1} \begin{cases} y-6-x + y-6+x = 12 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \\ y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12 \\ (|x|-8)^2 + 36 = a \\ x \in [-18; 18] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{a-36} + 8 \\ x = -\sqrt{a-36} + 8 \\ x = \sqrt{a-36} - 8 \\ x = -\sqrt{a-36} - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} (|x|-8)^2 + 36 = a \\ |x| = \sqrt{a-36} + 8 \\ |x| = -\sqrt{a-36} + 8 \end{cases}$$

Система уравнения имеет ровно 2 решения.
Значит, либо парой $x = \sqrt{a-36} + 8$ и $x = -\sqrt{a-36} + 8$
 $x = \sqrt{a-36} - 8$ и $x = -\sqrt{a-36} - 8$

Совпадают, либо друг с другом

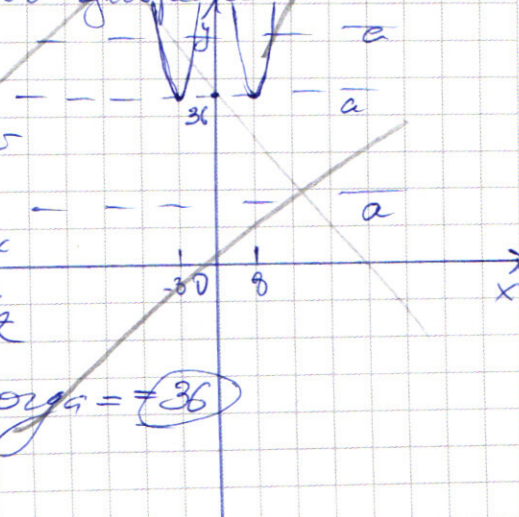
Пусть $f(x) = (|x|-8)^2 + 36$

Значит, что при $a < 36$: корней нет
 $a = 36$ - 2 корня

При этом $8 \in [-18; 18]$
 $-8 \in [-18; 18]$

$a > 36$ Только более 2-х корней.

Значит, система будет иметь 2 решения, тогда и только тогда, когда $a = 36$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 5.

Изначально В и Х находятся в
 $M(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$
(соответственно)

Катюша Радуга окружает,
по которому движется В и Х

$$R_B = \sqrt{4 + 4 \cdot 7} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$R_X = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Значит, $\frac{R_X}{R_B} = 2,5$ При этом $V_B = 2V_X$

Значит, если за какое-то время X сместится на горизонталь,
то В сместится на $2,5 \cdot 2 = \underline{\underline{5d}}$

(На рисунке покажем принятое начальное положение В и Х)

Теперь посмотрим на уравнение прямой ВХ:

$$\frac{x+2}{2+5} = \frac{y+2\sqrt{7}}{5\sqrt{7}+2\sqrt{7}}; \quad x+2 = \frac{y+2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$\underline{\underline{y = \sqrt{7}x}}$$

Значит, что прямая проходит через $(0; 0)$, значит,
в начальный момент В и Х наиболее удалены

Посмотрим в какой момент В и Х будут первый раз
на наименьшем расстоянии друг от друга (для минимума)

Пусть X прошел d , тогда В $5d$, и $(1) 5d = d + 4d$, так
как В и Х будут наименее удалены ~~тогда~~ если ВЕ ОХ

$$\cancel{4\alpha = 180^\circ} \quad \cancel{\alpha = 45^\circ} \quad 4\alpha = \pi \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{Поставим на графике:}$$

Теперь заменим уравнение (1) в общем случае, чтобы расстояние было наименьшим:

$$5\alpha = \alpha + \pi \cdot (2n-1) \quad n \in \mathbb{N}, \text{ т.е. } \pi/5$$

В данном случае еще не известно число поворотов

$$\text{Значит, } \alpha = \frac{\pi}{4} \cdot 2n-1$$

$$\text{Значит, } \alpha = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Поставим все эти точки на наш график. Теперь в них расстояние между B и X будет наименьшим. Теперь найдем координаты каждой точки:

$$\text{Получим } \overline{OX} \in \{5; 5\sqrt{7}\} \quad \overline{OX'} = \{x; y\}; \quad \overline{OX''} = \{x; y\}$$

$$\text{Значит } |\cos \alpha| \cdot |\overline{OX}| \cdot |\overline{OX'}| = 5x + 5\sqrt{7}y \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = (10\sqrt{2})^2$$

$$1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 5x + 5\sqrt{7}y$$

$$5x + 5\sqrt{7}y = 16\sqrt{2}$$

$$x = \frac{16\sqrt{2} - 5\sqrt{7}y}{5} \quad ; \quad \frac{(16\sqrt{2} - 5\sqrt{7}y)^2}{25} + y^2 = (10\sqrt{2})^2$$

$$\cancel{25} \quad \frac{512 + 175y^2 - 160\sqrt{14}y}{25} + \frac{25y^2}{25} = (10\sqrt{2})^2$$

$$200y^2 - 160\sqrt{14}y + 512 = 5000$$

$$200y^2 - 160\sqrt{14}y - 4478 = 0$$

$$\cancel{500y^2 - 160\sqrt{14}y - 4478 = 0} \quad D_1 = b^2 - 4ac; \quad D_1 = (160\sqrt{14})^2 + 200 \cdot 4478 = 742800 + 200 \cdot 4478 = 985200$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $y = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{A}$; $y = \frac{30\sqrt{4} \pm \sqrt{985200}}{800} = \frac{40\sqrt{4} \pm \sqrt{946300}}{100}$

Тогда первая точка точки: $= \frac{4\sqrt{4} \pm \sqrt{2463}}{10}$

$x = \frac{16\sqrt{2} - 5\sqrt{4}}{5}$

$y = \frac{4\sqrt{4} \pm \sqrt{2463}}{10}$

$x = \frac{16\sqrt{2} - 28\sqrt{2} + \sqrt{7 \cdot 2463}}{2}$

$y = \frac{4\sqrt{4} \pm \sqrt{2463}}{10}$

$x = \frac{16\sqrt{2} - 28\sqrt{2} - \sqrt{7 \cdot 2463}}{2}$

$y = \frac{4\sqrt{4} - \sqrt{2463}}{10}$

Пусть это точки P и Q, тогда $P\left(\frac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{17241}}{10}; \frac{4\sqrt{4} \pm \sqrt{2463}}{10}\right)$
 $Q\left(\frac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{17241}}{10}; \frac{4\sqrt{4} \pm \sqrt{2463}}{10}\right)$

Мы знаем координаты

точки M_1 и M_4 , а также точки на диаметре
противоположны, значит,

$M_2\left(-\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{17241}}{10}; -\frac{4\sqrt{4} + \sqrt{2463}}{10}\right)$

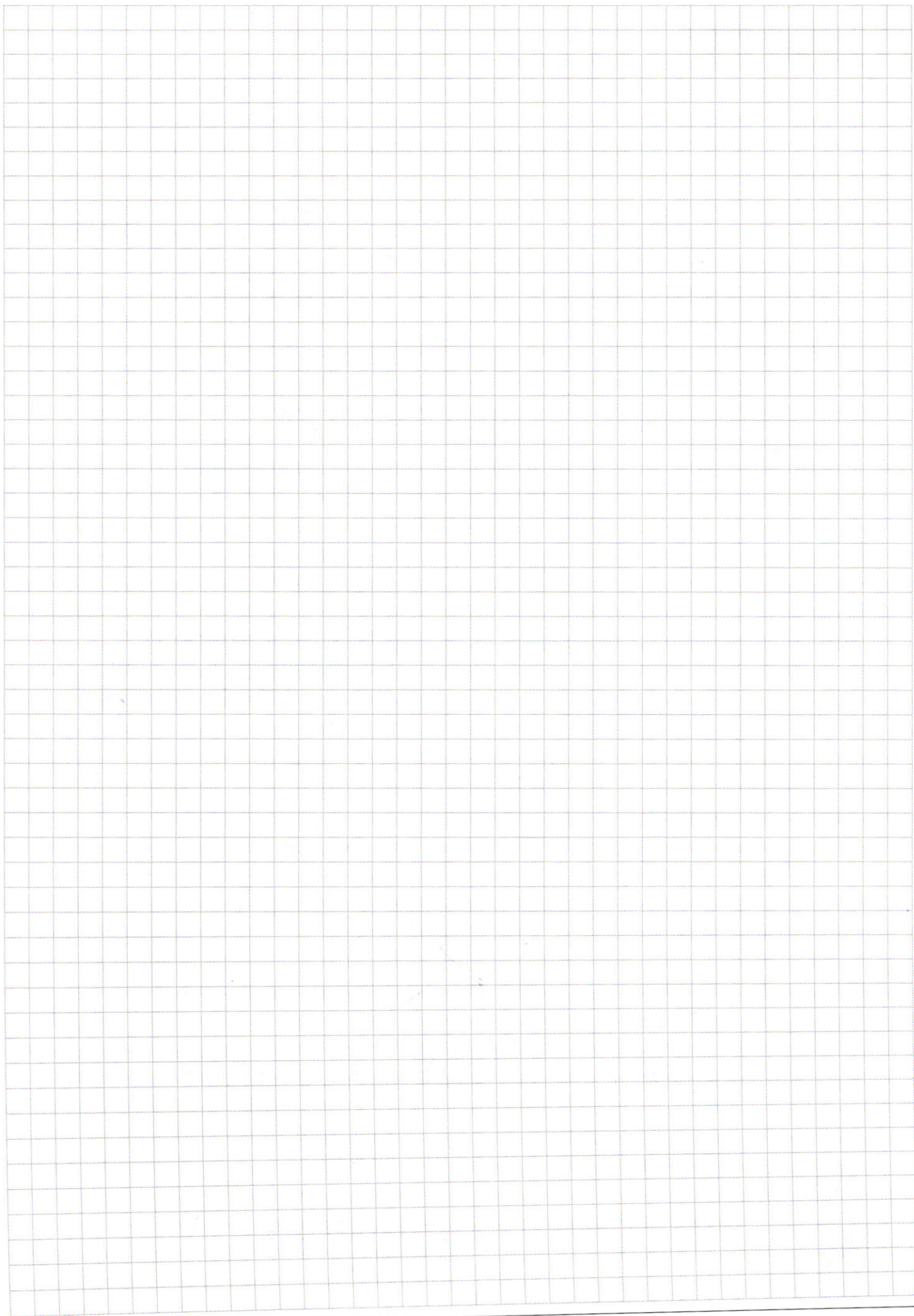
$M_3\left(-\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{17241}}{10}; -\frac{4\sqrt{4} - \sqrt{2463}}{10}\right)$

Ответ: Расстояние между B и X будет наименьшим, когда
X будет находиться в точке с координатами:

$M_1\left(\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{17241}}{10}; \frac{4\sqrt{4} + \sqrt{2463}}{10}\right)$ $M_2\left(\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{17241}}{10}; \frac{4\sqrt{4} - \sqrt{2463}}{10}\right)$

$M_3\left(-\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{17241}}{10}; -\frac{4\sqrt{4} - \sqrt{2463}}{10}\right)$

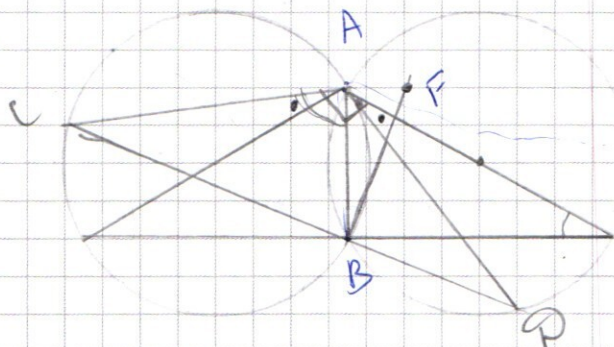
$M_4\left(-\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{17241}}{10}; -\frac{4\sqrt{4} + \sqrt{2463}}{10}\right)$



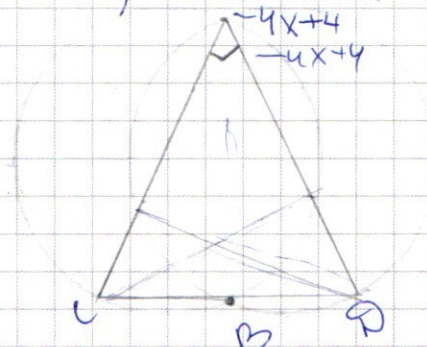
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \mid x-1 \\ \underline{2x^4 + 2x^3} \\ 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \\ \underline{5x^3 - 5x^2} \\ 1 \end{array}$$



$$\begin{aligned} 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 \mid x-2 \mid +4 &\geq 0 \\ 2x^4 - 3x^2 \mid x-2 \mid + (x-2)^2 &\geq 0 \\ 2x^4 + 1(x-2)(1(x-2) - 3x^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 4 \mid x+1 \\ \underline{2x^3 + 2x^2} \\ 3x^2 - 4 \end{array}$$

Пусть $x \geq 2$

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + (x-2)^2 &\geq 0 \\ 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 24 + 28 - 8 + 4 &= 2 \\ 2 + 3 + 7 + 4 &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 &= x^2(2x^2 - 3x + 6) \\ D = 9 - 48 &= -36 < 0 \end{aligned}$$

2) $x < 2$

$$2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + (x-2)^2$$

$$x^2(2x^2 + 3x - 6)$$

$$D = 9 + 48 = 57 \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

$$2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2x^3 + 5x^2 - 4 &= 0 \\ x^2(2x + 5) &= 4 \end{aligned}$$

$$x < -2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(2-x) + 4 \geq 0$$

$$2x^3 < -16$$

$$5x^2 > 200$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0 \quad 2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4 \quad | x+2$$

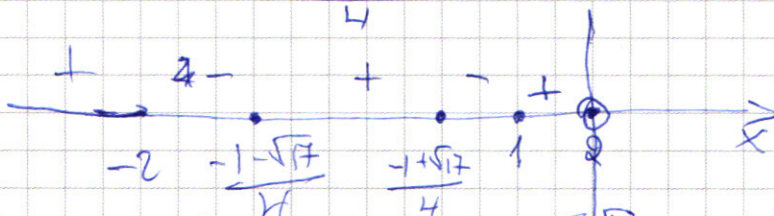
$$2x^3 + 4x^2 \quad | 2x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4 \\ x^2 + 2x \\ \hline -2x - 4 \\ -2x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 + 16 = 32$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{32}}{4}$$



$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0$$

$$x \in [-2, 1 - \frac{\sqrt{17}}{4}] \cup [1, 2]$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup [-\frac{1-\sqrt{17}}{4}, -\frac{1+\sqrt{17}}{4}] \cup [1, 2]$$

$$x \geq 2$$

$$R_1 = \sqrt{4 + 28} = 4\sqrt{2}$$

$$R_2 = \sqrt{25 + 175} = 10\sqrt{2}$$

$$(-2, -2\sqrt{7}); (5, 5\sqrt{7})$$

$$\frac{x+2}{5+2} = \frac{y+2\sqrt{7}}{5\sqrt{7}+2\sqrt{7}}$$

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y+2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{7}x + 2\sqrt{7} = y + 2\sqrt{7}$$

$$y = \sqrt{7}x$$

$$S_1 = 2\pi R_1 = 2\pi \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\pi$$

$$S_2 = 2\pi R_2 = 20\sqrt{2}\pi$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$S_2 = S_1 + 2\pi n + \pi$$

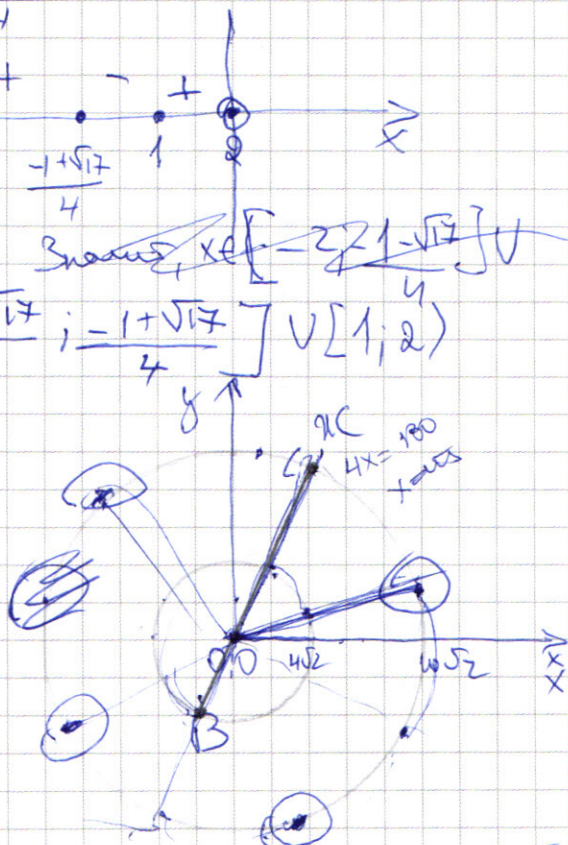
$$l_1 = 2l_2$$

Кен-Бо озорлов:

$$t l_2 = t l_1$$

$$\frac{l_2 t}{S_2} = \frac{l_1 t}{S_1} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{l_2 t}{20\sqrt{2}\pi} = \frac{2l_2 t}{8\sqrt{2}\pi} + \frac{1}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{v_{at}}{10\sqrt{2}\pi} = \frac{v_{at}}{4\sqrt{2}\pi} + \frac{1}{2}$$

$$v_{at} \left(\frac{1}{10\sqrt{2}\pi} - \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \right) = \frac{1}{2} + k$$

$$v_{at} = \frac{k+0,5}{-\frac{4}{10\sqrt{2}\pi}} = -5\sqrt{2}\pi (k+0,5)$$

№6

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq y-6 \\ x \leq 6-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6-x \geq 0 \\ x \leq y-6 \\ y-6+x \geq 0 \\ x \geq 6-y \end{cases}$$

$$(1) (y-6-x)^2 + (y-6+x)^2 + 2|y-6-x||y-6+x| = 144$$

№4

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$$

$$C_8^2 \cdot C_8^2 \cdot 4 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2 \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$\text{Значит, } S = 28 \cdot 15 \cdot 4 = 28 \cdot 60 = 1680$$

$$\sqrt{8 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2} = 8 \cdot \frac{48}{2} \cdot \frac{20}{2} = 210 \cdot 8 = 1680$$

№6

$$\textcircled{1} \begin{cases} y-6-x+y-6+x=12 \\ y-6-x \geq 0 \\ y-6+x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & 2y=24 \\ & y=12 \\ & x \in [-18; 18] \\ & y=12 \end{aligned}$$

$$x \leq 18$$

$$x \geq -18$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 9$$

$$(|x|-8)^2 + 36 = 9$$

$$|x|-8 = \pm \sqrt{9-36}$$

$$|x|=8 \quad \text{знаю, } \sqrt{a}$$

$$\begin{array}{r} \times 128 \\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$128 \cdot 7 = 896$$

$$4478 \cdot 100 = +895600$$

$$\begin{array}{r} 895600 \\ -89600 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2463 \\ 7 \\ \hline 17241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9852 \overline{) 2} \\ 4926 \overline{) 2} \\ 2463 \overline{) 3} \\ \hline 821 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

abcde fgh

$$\begin{array}{r} 1521 \overline{) 3} \\ 507 \overline{) 3} \\ 189 \overline{) 13} \\ \underline{13} \end{array}$$

$$\frac{p^2}{8} \cdot 12$$

$$S = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000}$$

$$S_{b_1 + b_2 + \dots + b_{3000}} = 10S$$

$$\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$$

$$b_1 + b_1 q + 50 b_1 q^2 + \dots + 50 b_1 q^{2999} = 10S$$

$$9S = 49b_3 + 49b_6 + \dots + 49b_{3000}$$

$$b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{9S}{49}$$

$$q' = q^3$$

Итого $\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = S$

$$\frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{1}{q - 1} = \frac{49 \cdot q^{-2}}{9(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$700 \overline{) 2} \begin{array}{l} 2 \\ 5 \\ 12 \\ 5 \\ 4 \end{array}$$

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$9q^2 + 9q + 9 = 49q^2$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 40 \cdot (-9) = 81 + 1440 = 1521$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

$$S = b_1 (q^n - 1)$$

$$3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12$$

$$S_3 = 4821$$

$$b_1 = 3, q = 2$$

$$S = 3 \cdot 2^3 - 1$$

$$S = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_2 + b_4 + \dots + b_{3000} = ?$$

$$\frac{b_3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{9S}{49}$$

$$= \frac{49 b_3 (q^{3000} - 1)}{9(q^3 - 1)}$$

$$\frac{9}{49} = \frac{q^2 + q + 1}{q^2 + q + 1}$$

$$\text{Итого } S(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = \frac{b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S + \frac{b_2(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1}}{S} = 1 + \frac{b_2(q^{3000} - 1)}{b_1(q^{3000} - 1)}$$

$$= 1 + \frac{q}{q+1} = 1 + \frac{\frac{3}{5}}{1,6} = 1 + \frac{3}{8} = 1\frac{3}{8} = 1,375$$

N 3

$$\textcircled{1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) (\sqrt{x^3 - 4x + 80}) = x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0 \quad y^3 = 64$$

$$x = -4: -64$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) (\sqrt{x^3 - 4x + 80} - x - 4) = 0 \quad \text{Пусть } x = -6: x^3 - 4x + 80 = -216 + 24 + 80 = -112$$

$$\begin{cases} x+6=0 \\ x^3 - 4x + 8 \geq 0 \\ \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x+4 \end{cases} \quad x = -6$$

$$x^3 - 4x + 80 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^3 - 4x + 80 = x^2 + 8x + 16$$

$$x+4 \geq 0 \quad x \geq -4$$

$$8^3 = 2^9 = 512$$

$$\textcircled{1} x^3 - x^2 - 12x + 64 = 0$$

$$(x+6) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} - x - 4 \right) = 0$$

$$\frac{x^3}{2} - \frac{4x}{2} + \frac{80}{2} = x^2 + 8x + 16$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 & x-4 \\ x^3 - 4x^2 & \hline \end{array}$$

$$2x^2 - 20x + 48$$

$$2x^2 - 8x$$

$$-12x + 48$$

$$-12x + 48$$

$$0$$

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D_1 = k^2 - ac; D_1 = 1 + 12 = 13$$

$$x = -1 \pm \sqrt{13}; \quad x = \sqrt{13} - 1$$

$$21 - \sqrt{13} \vee -4$$

$$-\sqrt{13} \vee -3$$

$$\begin{aligned} -64 - 32 + 80 + 48 &= 0 \\ -8 - 8 + 40 + 48 &= 0 \\ 8 - 8 + 40 + 48 &= 0 \\ 27 - 18 - 60 + 48 &= 0 \\ 64 - 32 - 80 + 48 &= 0 \\ &= 112 - 112 \end{aligned}$$

$$\text{Значит, ответ: } x = 4; x = \sqrt{13} - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Остаётся аналогично рассмотреть ещё 3 случая:

$$\textcircled{2} \begin{cases} y-6-x-y+6-x=12 \\ y-6-x \geq 0 \\ y-6+x < 0 \\ (x-3)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

1) $f(y) = (y-6)^2 + 16$
(График представлен схематично)

При $a < 16$ корней нет

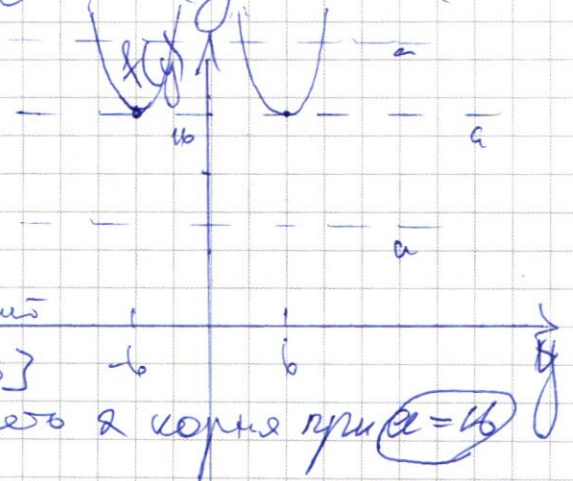
$a = 16$ 2 корня

$a > 16$ точно больше 2-х корней

При этом $6 \in [-6; 18]$ $-6 \in [-6; 18]$

Значит, уравнение будет иметь 2 корня при $a = 16$

$$\begin{cases} x = -6 \\ y \geq -6 \\ y \leq 18 \\ 16 + (y-6)^2 = a \quad (1) \end{cases}$$



$$\textcircled{3} \begin{cases} x+6-y+y-6+x=12 \\ y-6-x \leq 0 \\ y-6+x \geq 0 \\ (x-3)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

$$x = 6$$

$$\begin{array}{r} 4478 \overline{) 8} \\ 40 \underline{) 155} \\ 17 \underline{) 155} \\ 15 \underline{) 155} \\ 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4478 \overline{) 2} \\ 2239 \end{array}$$

Решите аналогично рассмотрев еще 3 случая!

$$\textcircled{2} \begin{cases} y-6-x+6-y-x=12 \\ y-6-x \geq 0 \\ y-6-x < 0 \end{cases} \begin{cases} x=-6 \\ y \geq 0 \\ y \leq 12 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 9$$

$$1) (y-6)^2 + 4 = 9$$

$$\text{Пусть } f(y) = (y-6)^2 + 4$$

Мы смотрим на $y \in [0; 12]$

Значит, ~~кажд.~~ параболы

симметрична отн. Ox , то их

точка пересечения будет лежать на оси ординат (при $y=0$):

$$f(0) = 36 + 4 = 40$$

Значит, ~~уравне~~ заметим, что при $a < 6$: корней не

$a = 6$: 1 корень

$a \in [6; 40]$: 2 корня

$a \in [40; +\infty)$: 2 корня.

И

