

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $4900 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$

есть 2 случая:

1) в записи 8-значного числа участвуют числа 7, 7, 2, 2, 5, 5, 1, 1.

2) в записи 8-значного числа участвуют числа 7, 7, 4, 5, 5, 1, 1, 1.

1 случай:

количество различных чисел $\frac{8!}{2!2!2!2!} = 2520$, м.к.

и среди составляющих чисел 4 пары одинаковых.

2 случай:

количество разл. чисел $\frac{8!}{2!2!3!} = 1680$, м.к. среди составляющих чисел 2 пары и 1 тройка одинаковых.

суммарное к-во 8-значных чисел: $1680 + 2520 = 4200$

Ответ: 4200.

3. $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$

$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$

$x = -10$ не является корнем, т.к. $\sqrt{x^3 - 64x + 200} \neq 0$ (1)

не имеем смысла при $x = -10$

$(x+10)(\sqrt{x^3 - 64x + 200} - 2\sqrt{2}(x-4)) = 0$

$\sqrt{x^3 - 64x + 200} - 2\sqrt{2}(x-4) = 0$

$x^3 - 64x + 200 = 8(x-4)^2$

$$x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0 \quad (2)$$

подбором находим, что $x_1 = 6$ и этот корень удовлетворяет исходному уравнению и (1) имеет смысл.

разложим на множители (2):

$$(x-6)(x^2-2x-12)=0$$

$$x^2-2x-12=0$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{13}; x_3 = 1 - \sqrt{13}$$

при обоих корнях (1) имеет смысл, значит они подходят.

Ответ: 6; $1 + \sqrt{13}$; $1 - \sqrt{13}$.

$$4. \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = |x+2|^2$$

$$4x^4 - 5x^2|x+2| + |x+2|^2 \geq 0$$

пусть $|x+2| = t$, тогда

$$t^2 - 5x^2t + 4x^4 \geq 0$$

по т. Виета раскл. на множители:

$$(t - x^2)(t - 4x^2) \geq 0$$

$$(|x+2| - x^2)(|x+2| - 4x^2) \geq 0$$

если $x \geq -2$, то

$$(x+2-x^2)(x+2-4x^2) \geq 0$$

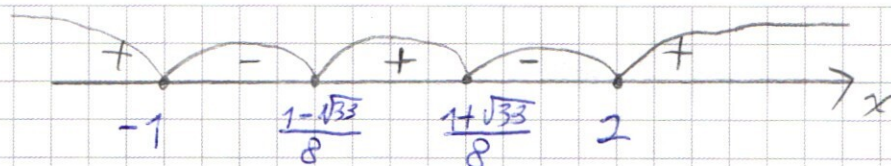
$$(x^2-x-2)(4x^2-x-2) \geq 0$$

по т. Виета раскл. на множители:

$$4(x-2)(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$

используем метод интервалов:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



т.к. $x \geq -2$, то конечное решение: $x \in [-2; -1] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$

если $x < -2$, то

$$(-x-2-x^2)(-x-2-4x^2) \geq 0$$

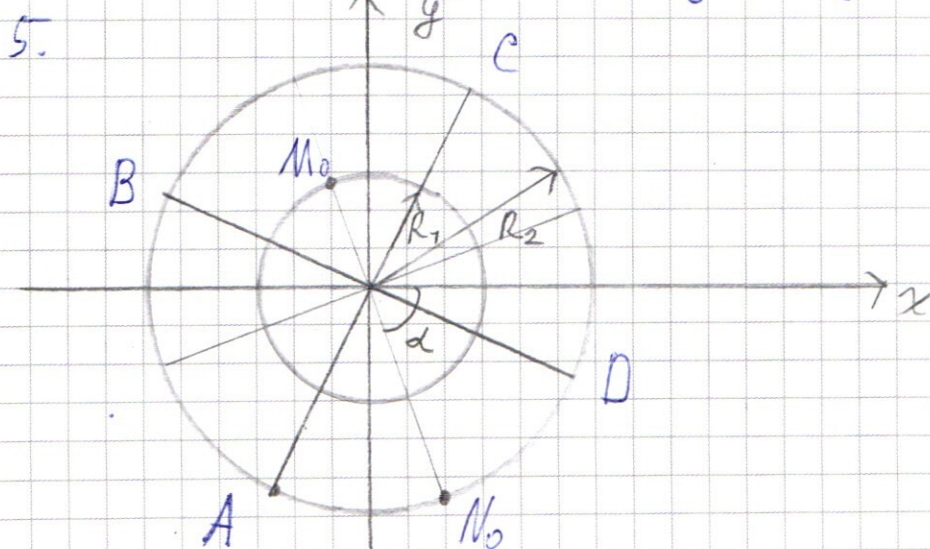
$$(x^2+x+2)(4x^2+x+2) \geq 0 \quad (1)$$

оба квадратных уравнения не имеют корней, поэтому неравенство (1) верно при любых x , т.к. коэф. при x^2 больше нуля в обоих квадратных уравнениях.

т.к. $x < -2$, то решение: $x \in (-\infty; -2)$

Решение исходного неравенства: $x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}] \cup [2; +\infty)$.



$$R_1 = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$R_2 = \sqrt{2^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 6$$

пусть V_n — скорость пешкара, тогда по условию $V_k = 2,5 V_n$, где V_k — скорость караса.

$$\omega_k = \frac{V_k}{R_1}, \text{ где } \omega_k \text{ — угловая скорость караса}$$

$$\omega_n = \frac{V_n}{R_2}, \text{ где } \omega_n \text{ — угловая скорость пешкара}$$

$$\frac{\omega_k}{\omega_n} = 5, \quad \omega_k = 5 \omega_n$$

т.к. модули синусов точек в начальный момент времени равны, и эти точки находятся в противоположных четвертях, то угол между ними 180° .

относительная угл. скорость — $\omega_{\text{отн}} = 4 \omega_n$

$$\frac{\pi}{4 \omega_n} = \frac{x_1}{\omega_n}$$

$x_1 = \frac{\pi}{4}$ — первое положение при котором расст. будет наименьшим (точнее угол, который нужно пройти ~~до 7~~ караса пешкара до этого положения)

А точка А — первое положение, А

$\frac{2\pi}{4 \omega_n} = \frac{x_2}{\omega_n}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ — угол, кот. надо пройти до каждого последующей, ~~внутренней~~ ^{положения} точки В, С, D — это ~~внутренние~~ ^{внешние} положения

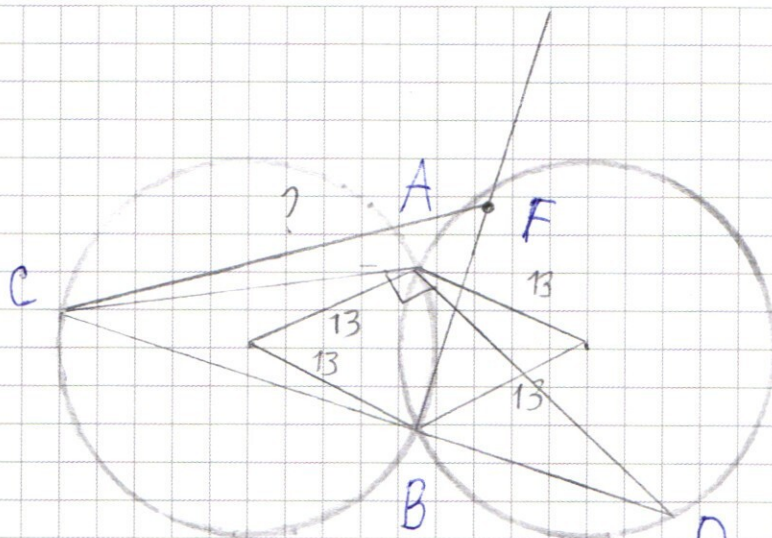
$$A(\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}); \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})) = A(\sqrt{2} - 4; -4 - \sqrt{2}),$$

$$A B(-4 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}), C(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}), D(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4)$$

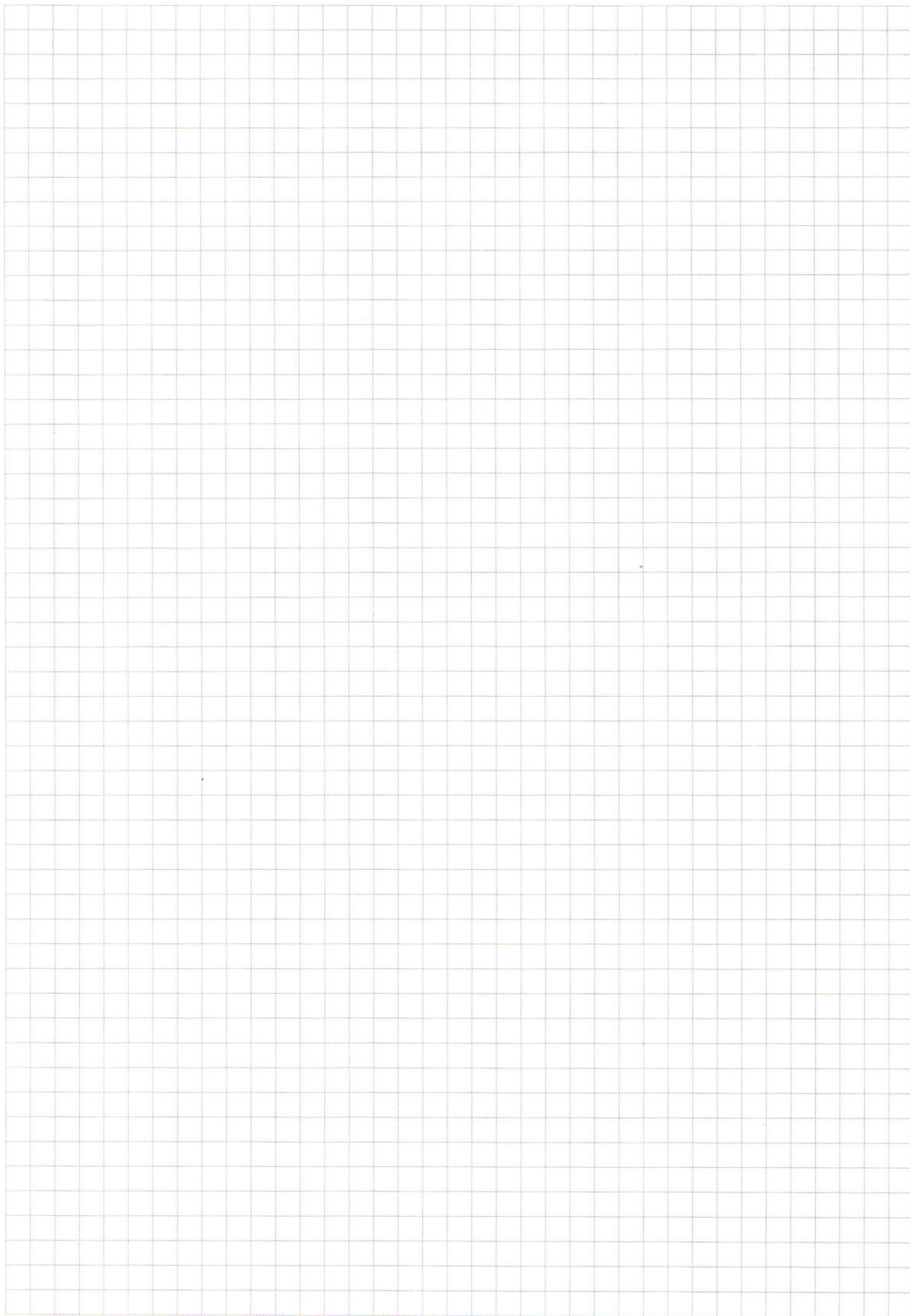
Ответ: $A(\sqrt{2} - 4; -4 - \sqrt{2}), B(-4 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}), C(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2}), D(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

56.



$$\begin{aligned}\cos 2\frac{\pi}{4} &= \cos^2 \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 - 1 = -1 \\ \sin 2\frac{\pi}{4} &= 2 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$ $4x^4+5x^3$

$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3-64x+200} = (x+10)(x-4)$ $4x^2-x-2=0$ $4x^2+x-2=0$

$x^3-64x+200 = x^2+16-8x$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8}$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{8}$

$x^3-64x+200 = 8x^2-64x+128$ $x^2-x-2=0$ $x^2+x-2=0$

$x^3-8x^2+72=0$ $x^3-8(x^2-9)=0$ $x=2, -1$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$

$72 = x^2(8-x)$

$4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2(x+2) = 0$

$4x^4 + (4x^2-x-2)(x^2-x-2) = 4x^4$

$t^2 - 5x^2t + 4x^4 = 0$

$t = \frac{5x^2 \pm \sqrt{25x^4 - 16x^4}}{2} = \frac{5x^2 \pm 3x^2}{2} = 4x^2, x^2$

$|x+2| = 4x^2$

$|x+2| = x^2$ $(x-2)(x+1)(x - \frac{1+\sqrt{3}}{8})$

$(1+\sqrt{3})^3 - 64 - 64\sqrt{3} + 200 = 1 + 13\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 39 - 64 - 64\sqrt{3} + 200 =$

$176 - 48\sqrt{3} = 4(44 - 12\sqrt{3}) = 16(11 - 3\sqrt{3})$

$121 = 9 \cdot 13$

$121 = 11^2$

$(1-\sqrt{3})^3 - 64 + 64\sqrt{3} + 200 = 1 - 13\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 39 - 64 + 64\sqrt{3} + 200 =$

$= 176 + 48\sqrt{3}$

$x = 6, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$

$4, 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - \frac{10}{5}x^2 + 4 \geq 0$

$4x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + 4 \geq 0$ $x \geq -2$

$4+5-4-4+4$ $4 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 4$

$64-40-36+12$ $64-40-16+8+4$ $x=2$

$$1. 4900 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$7 \ 7 \ 2 \ 2 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1$$

$$4 \cdot 4$$

$$7 \ 7 \ 4 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$\frac{8!}{2!2!2!2!} = \frac{4!}{2!} = 2520$$

$$\frac{8!}{2!2!3!} = \frac{7!}{3} = 240 \cdot 7 = 1680$$

$$2255 \quad \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$1680 + 2520 = 4200$$

$$5522$$

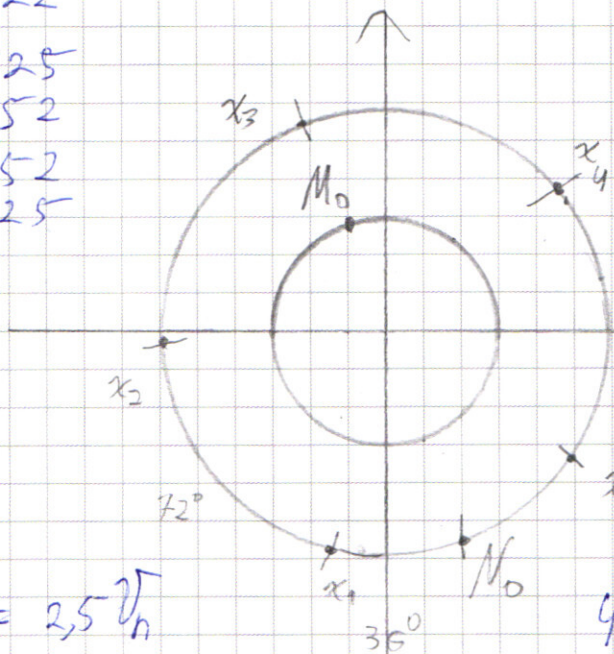
$$2525$$

$$2552$$

$$5252$$

$$5225$$

5.



$$\frac{1.7}{3} \approx 0.58 \quad \sin 72^\circ = 2\sqrt{5-2}$$

$$\sin^2 72^\circ = 1 - (\sqrt{5}-2)^2 =$$

$$= 1 - 5 - 4 + 4\sqrt{5} =$$

$$4\sqrt{5} - 8$$

$$V_m = 2.5 V_h$$

$$\omega_m = 5 \omega_h$$

$$N_0 = 4 \omega_h = \frac{4}{5} \omega_m$$

$$1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \cos^2 36^\circ$$

$$4 - (\sqrt{5}-1)^2 = 4 \cos^2 36^\circ$$

$$4 - 5 - 1 + 2\sqrt{5} = 4 \cos^2 36^\circ$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cos 36^\circ \quad \sqrt{5}-1 = 2 \cos^2 36^\circ$$

$$\cos(120^\circ - 36^\circ) = \cos 20^\circ \cos 36^\circ$$

$$t = \frac{\pi}{5\omega_h} = \frac{x}{\omega_h}$$

$$x = \frac{\pi}{5} = 36^\circ$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$1 = x + x^2 \quad \sqrt{5}-2 = \frac{\sqrt{5}-1-3+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} =$$

$$\sin 20^\circ = \frac{-4\sqrt{2}}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos 20^\circ = \frac{1}{3}$$

$$1-x = x^2$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \approx 0.61, \approx -1.61$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\sin(36^\circ + 20^\circ)$$

$$\sin(20^\circ - 36^\circ) = \sin 20^\circ \cos 36^\circ - \sin 36^\circ \cos 20^\circ = \frac{-4\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{6} = -\frac{2}{3} \sqrt{5}-1 - \frac{\sqrt{5}-1}{6}$$

$$\cdot (\sqrt{5}-1) \sqrt{5}-2$$



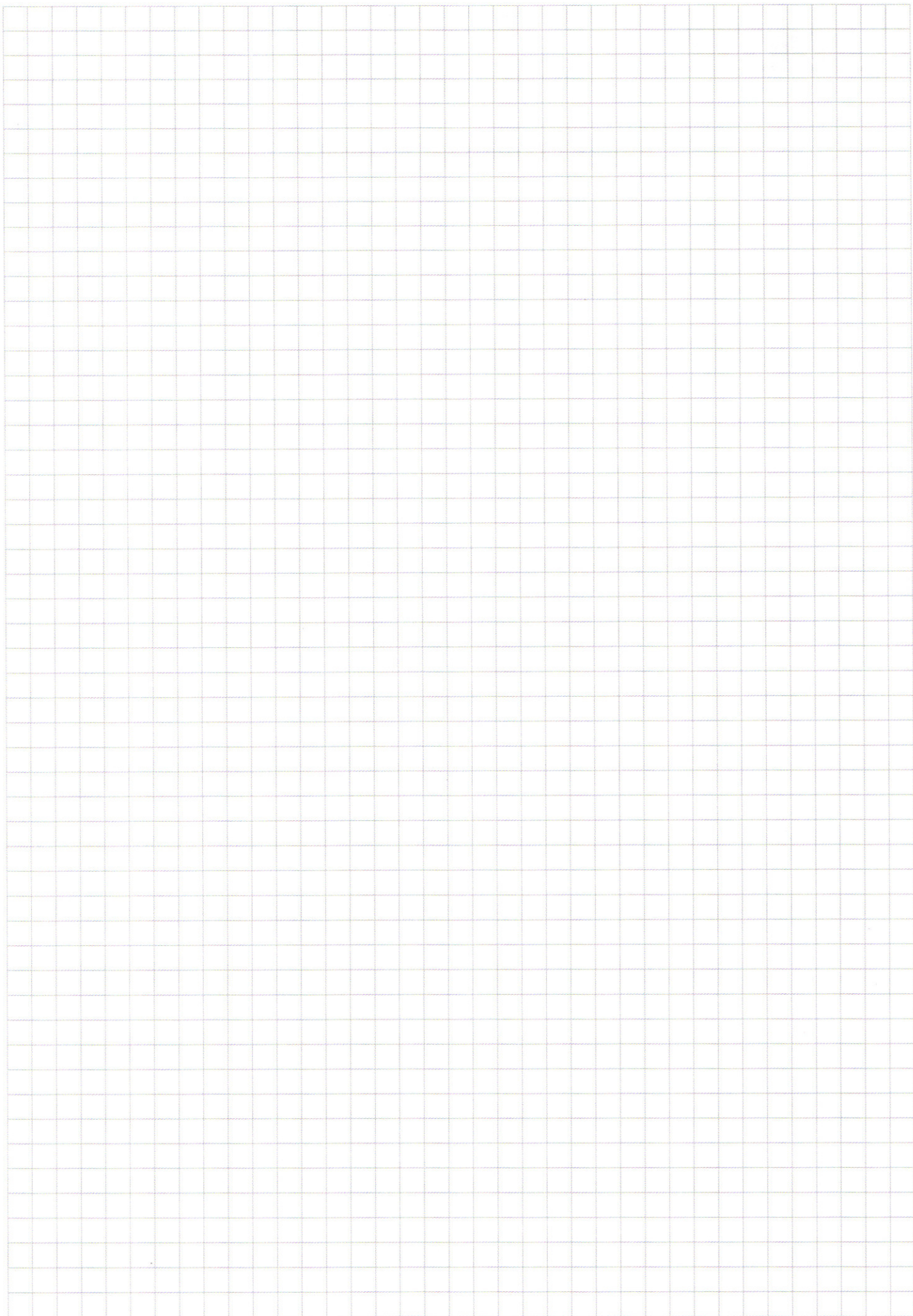
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)