МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабо
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2; -2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5; 5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$A = \overline{a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$

$$\begin{array}{r|l} 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

т.е в (A) обязательно есть две 5 и 7

⇒ 1) в (A) две 2. ⇒ подберём места для 2, 5, 7 ⇒

⇒ ост. цифры - это 1. ⇒ кол-во: $\boxed{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1} =$

$= \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 1 = 56 \cdot 30 = 1680$

2) в (A) 4 ⇒ кол-во: $C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1 = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot 6 \cdot 5 = \frac{1680}{2} =$

$= 840$

т.е всего: $1680 + 840 = \underline{2520}$

№2

$b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ ⇒ $b_i = q^{i-1} \cdot b_1$ ⇒ $S = b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$

$S_1 = b_3 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1 \cdot (q^{1000}-1)}{q-1}$

$S_2 = b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{3000} = \frac{b_1(q^{1500}-1)}{q-1}$

т.е $S + 49 \cdot S_1 = 10 \cdot S$

$49 \cdot S_1 = 9 \cdot S$

$\frac{S}{S_1} = \frac{49}{9}$ ⇒ $\frac{q^{3000}-1}{q^{1000}-1} = \frac{49}{9}$. если $q^{1000} = x$ ⇒ $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{49}{9}$

т.е $x^2 + x + 1 = \frac{49}{9}$ ⇒ $x^2 + x - \frac{40}{9} = 0$

$D = 1 + \frac{160}{9} = \frac{13^2}{3^2}$

$x > 0$ ⇒ $x = \frac{-1 + \frac{13}{3}}{2} = \frac{5}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

т.е мы должны найти t : $S + S_2 = t \cdot S \Rightarrow S_2 = (t-1) \cdot S \Rightarrow$

$\Rightarrow t - 1 = \frac{S_2}{S}$

т.е $\frac{S_2}{S} = \frac{q^{1500}-1}{q^{3000}-1} = \frac{1}{q^{1500}+1} = \frac{1}{\sqrt{x^3}+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{125}{27}}+1} \Rightarrow t = \frac{2+\sqrt{\frac{125}{27}}}{1+\sqrt{\frac{125}{27}}}$

№3.

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24 = (x+6)(x+4)$

$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}\cdot(x+6)(x+4)$ т.е $x^3-4x+80>0$

$\boxed{x(x^2-4)>80}$

1) $x=-6$ ✓

2) $x \neq -6 \Rightarrow \sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}(x+4)$

$x^3-4x+80 = 2x^2+16x+32$

$x^3-64-2x^2+32-20x+80=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)-2(x-4)(x+4)-20(x-4)=0$

$(x-4)(x^2+4x+16-2x-8-20)=0$

2.1) $x=4$ ✓ 2) $x\neq 4 \Rightarrow x^2+2x+1-13=0$

$(x+1)^2=13$

1) $x_1=\sqrt{13}-1$

2) $x_2=-\sqrt{13}-1$

т.е $x_1>2$ ✓

~~$x_2 < -\sqrt{13} \Rightarrow x_2(x_2^2-4x$~~

$(-\sqrt{13}-1)(10-2\sqrt{13}) > -80 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(\sqrt{13}+1)}_{<4}\underbrace{(10-2\sqrt{13})}_{<10} < 80$ ✓.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1$

$C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^2$

$(x+5)^2 - 1$

$(x+4)(x+6)$

$$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}.$$

$$b_1 q^2 + b_1 q^5 + \ldots + b_1 q^{2999} = \frac{b_1 \cdot (q^{1000}-1)}{q-1}$$

$$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} +$$

$\cancel{\frac{x+6}{\sqrt{2}}} \sqrt{x^3-4x+80} = \cancel{(x+6)}(x+4)$

$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32.$

$x^3 - 20x + 48 - 2x^2 = 0.$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{49}{9}.$$

$9x^3 - 9 - 49x - 49$

$x(9x^2 - 49) = -40$

$x(7-3x)(7+3x) = -40$

$x +$

$8\sqrt{2}.$

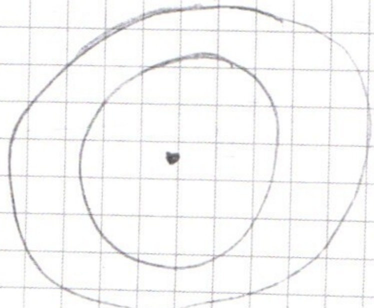
$64 - 48 - 48$

$+32$

-128

$64 + 48 - 80 - 32$

$DA(DA + AF) = DB \cdot DC$



$(10 - 2\sqrt{13})(\sqrt{13}+1) < 80$

$x(x^2-4) > -80$

$9.$

$\sqrt{13} \cdot 9 \geq 80$

№4

$$2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geq 0$$

1) $x\geq 2 \Rightarrow 2x^4+x^2-4x-3x^3+6x^2+4\geq 0$

$$2x^4-3x^3+7x^2-4x+4\geq 0$$

т.е $x\geq 2 \Rightarrow 2x^4\geq 3x^3$ $\quad 7x^2\geq 4x$ и $4\geq 0 \Rightarrow \forall$.

2) $x<2 \Rightarrow 2x^4+x^2-4x+3x^3-6x^2+4\geq 0$

$$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4\geq 0$$

$$2x^4-2+3x^3-3-5x^2+5-4x+4\geq 0$$

$$2(x-1)(x+1)(x^2+1)+3(x-1)(x^2+x+1)-5(x-1)(x+1)-$$
$$-4(x-1)\geq 0$$

$$(x-1)(2x^3+2x^2+2x+2+3x^2+3x+3-5x-5-4)\geq 0$$

$$(x-1)(2x^3+5x^2-4)\geq 0$$

$$(x-1)(2x^3+16+5x^2-20)\geq 0$$

$$(x-1)(2(x+2)(x^2-2x+4)+5(x-2)(x+2))\geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2-4x+8+5x-10)\geq 0$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)\geq 0$$

т.е $\cancel{(x+2)}$ $(x-1)(x+2)(x^2+\frac{1}{2}x-1)\geq 0$

$$x^2+\frac{1}{2}x-1=\left(x+\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right)\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)$$

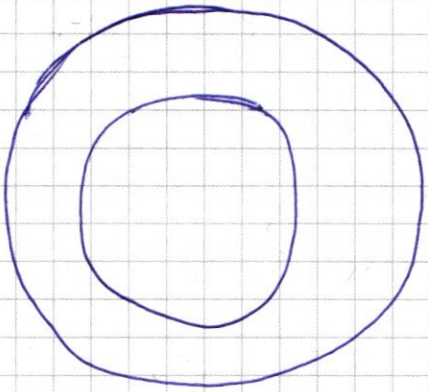
т.е $(x+2)\left(x+\frac{\sqrt{17}+1}{4}\right)\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)(x-1)\geq 0$

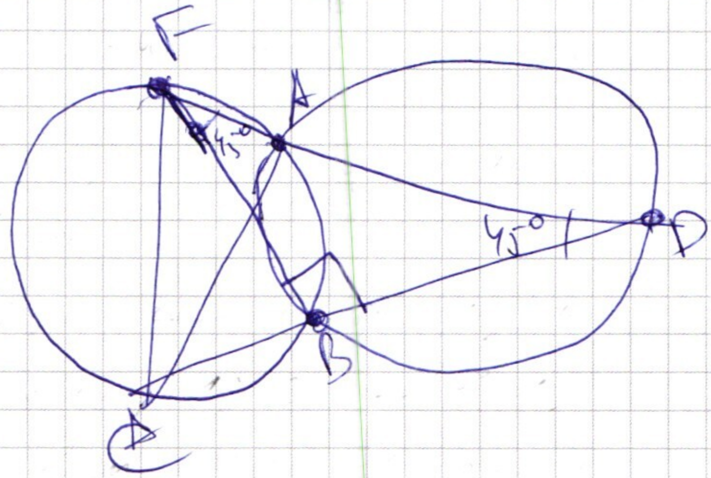
т.е $+$ $\quad -2 \quad$ $-$ $\quad \frac{-\sqrt{17}-1}{4} \quad$ $+$ $\quad \frac{+\sqrt{17}-1}{4} \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$

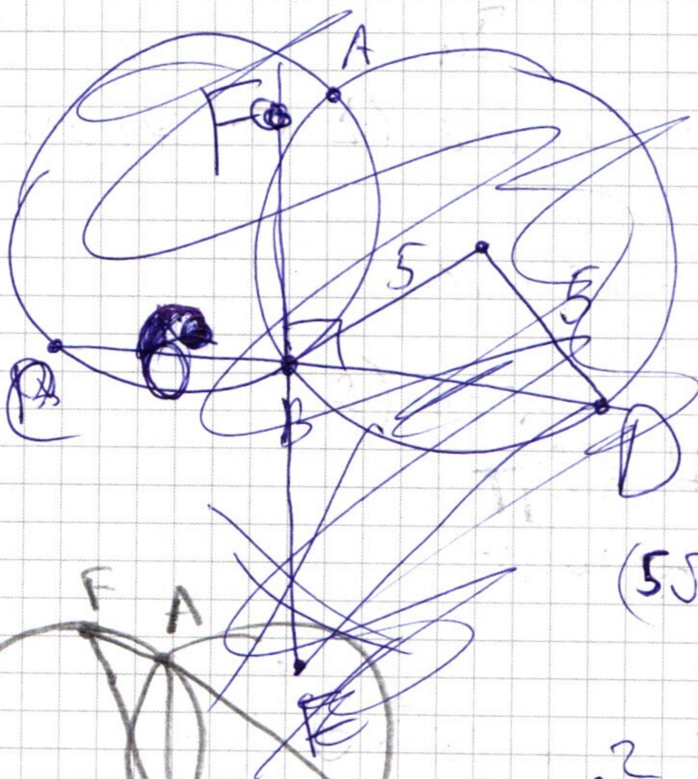
т.е $x\in \underbrace{(-\infty;-2]\cup\left[\frac{-\sqrt{17}-1}{4};\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right]\cup[1;2)}_{A}$.

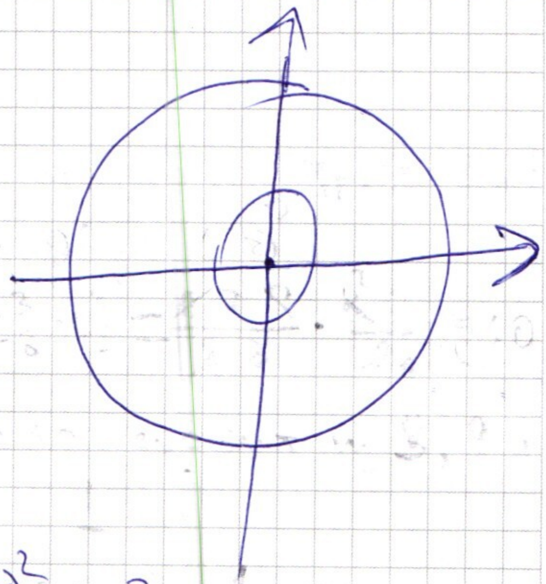
т.е в общем $A\cup[2;+\infty)$

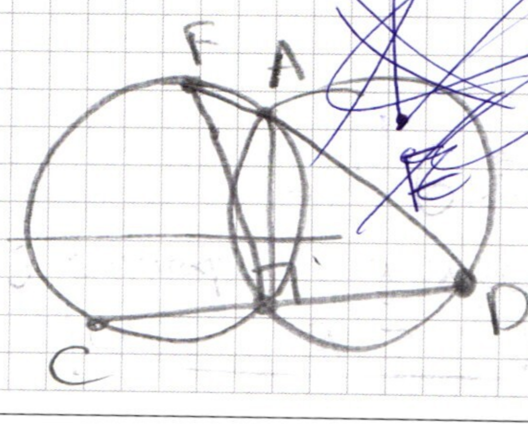
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА











$(5\sqrt{7})^2+5^2=7\cdot 25+25=$

$=8\cdot 25=(10\sqrt{2})^2$

$(2\sqrt{7})^2+2^2=4+4\cdot 7=8\cdot 4=$

$=(4\sqrt{2})^2$

$\sqrt{5}.$

$R_1 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}.$

$R_2 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}.$

min расст. $6\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} |y-6-x|+|y-6+x|=12 \\ (|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a \end{cases}$$

1) $y-6-x$ и $y-6+x$ оба $\geq 0 \Rightarrow y=12 \Rightarrow 6 \geq x \geq -6 \Rightarrow$ $\Rightarrow |x| \leq 6$

$\Rightarrow (|x|-8)^2=a-36 \Rightarrow |x|_1=\sqrt{a-36}+8$ не подх.

$|x|_2=-\sqrt{a-36}+8$ но $|x|_1>8$

$6 \geq |x| = 8-\sqrt{a-36} \Rightarrow \sqrt{a-36} \geq 2$ и $\sqrt{a-36} \leq 8 \Rightarrow \boxed{40 \leq a \leq 100}$

2) ① $y-6-x>0$ ② $y-6+x<0 \Rightarrow \cancel{y}-\cancel{6}-x+\cancel{6}-x-\cancel{y}=12 \Rightarrow x=-6$

т.е из ① $y>0$ и $y-12<0 \Rightarrow 0<y<12$

$(|y|-6)^2=a-4 \Rightarrow |y|_1=\sqrt{a-4}+6$

$|y|_2=-\sqrt{a-4}+6$

т.к $y>0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=6+\sqrt{a-4} \\ y_2=6-\sqrt{a-4} \end{cases}$ и т.е $\sqrt{a-4}<6$

$4<a<40$

3) ① $y-6-x<0$ ② $y-6+x>0 \Rightarrow x+6-y+x+y-6=12$

$x=6$

т.е $0<y<12$

$(|y|-6)^2=a-4$

$|y|_1=\sqrt{a-4}+6$

$|y|_2=-\sqrt{a-4}+6$

т.е $\sqrt{a-4}<6 \Rightarrow a<40$

4) ① $y-6-x<0$ ② $y-6+x<0$

$\cancel{x}+6-y+6\cancel{-x}-y=12$

$y=0 \Rightarrow |x|<6$

$|x|_1=\sqrt{a-36}+8>6$

$|x|_2=-\sqrt{a-36}+8 \Rightarrow \sqrt{a-36}>2$ и $\sqrt{a-36}<8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 40<a<100$

т.е 1) ~ 4) и 2) ~ 3) если $40 \le a \le 100$ из 1) и 4) имеет min 4 реш.

если $4<a<40 \Rightarrow$ из 2) и 3) имеет min 4 реш. а если $a<4$ то не имеет реш

т.е нету таких a

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~32 - 29 - 20 + 8 + 4~~ ≥ 0

$x^4 + 1 \geq 2x^2$

$2x^4 + 2 \geq 4x^2$

$2 > x^2$

$x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \geq 0$

$D = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

$\frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} < 1$ $\quad -\frac{\sqrt{17} - 1}{4} > -2$

$-\frac{\sqrt{17} + 1}{4} < 2$

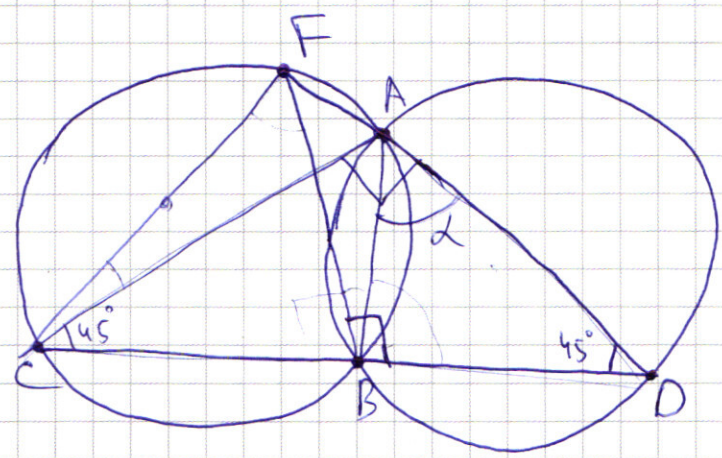
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

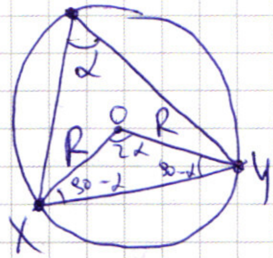
(Нумеровать только чистовики)

№6



Пусть $\angle CDA = \beta \Rightarrow \angle ACD = 90 - \beta$

т.е если



$XY = 2R\sin\alpha$

т.к $\angle XOY = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. синусов ш.

т.е $BD = BF \Rightarrow \angle FDB = 45^\circ \Rightarrow F, A, D$ - collin

и $\angle BFA = 45^\circ = \angle ACB \Rightarrow B, C, F, A$ - cyclic

т.е AB с одной стороны $2\cdot 5\cdot \sin\beta$ ~~...~~ с другой $2\cdot 5\cdot\cos\beta \Rightarrow \beta = 45^\circ$

т.е $\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF$ - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow CF = 2\cdot 5 = 10$

~~A.e BC~~ если $\angle BAD = \alpha \Rightarrow \angle CAB = 90 - \alpha \Rightarrow BD = 10\sin\alpha$

и $BC = 10\cdot\cos\alpha$ т.е $\boxed{\cos\alpha = \frac{3}{5} \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}} \Rightarrow BD = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = 14 \Rightarrow AD = \frac{14}{\sqrt{2}} = CA$ т.е $S_{ACF} = \frac{CA\cdot FA}{2}$

т.е $DB\cdot DC = DA\cdot DF = DA(DA + AF) = DA^2 + DA\cdot AF = DB\cdot DC \Rightarrow$

$\Rightarrow DA^2 + 2\cdot S_{ACF} = DB\cdot DC = 8\cdot 14$

$$2\cdot S_{ACF} = 8\cdot 14 - \frac{14^2}{2} = \frac{16\cdot 14 - 14^2}{2} = \frac{14\cdot 2}{2}$$

$$S_{ACF} = 7.$$