

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$S = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_8}$ - восьмизначное число

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 700$$

$$1 \leq a_i \leq 9, \quad 1 \leq i \leq 8$$

$$a_i \neq 0, \text{ если } a_i = 0, \text{ то } \prod_{i=1}^8 a_i = 0$$

$$\begin{aligned} \text{но } 700 &= 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \\ 700 &= 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 700 &= 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \\ 700 &= 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \end{aligned}} \right\} \text{число } 700 \text{ можно}$$

представить в виде $\prod$ произведения чисел от 1-го до 9-й, только двумя способами.

1-й способ:

$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow$ в записи числа S есть данное число, а остальные цифры равны единице.

имеем множество из цифр $\{7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1\}$
количество перестановок равно:

$$P = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8!}{3 \cdot 8} = \frac{7!}{3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 1680 - \text{перестановок}$$

2-й способ:

$$700 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$$

аналогично, имеем множество цифр $\{7, 5, 5, 4, 1, 1, 1\}$
количество перестановок равно:

$$P = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8!}{4 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

$$1480 + 840 = 2320$$

Ответ: 2320

N2

$$S = \sum_{i=1}^{3000} b_i =$$

$$50 \cdot \sum_{k=1}^{1000} b_{3k} + \sum_{i=1}^{3000} b_i - \sum_{k=1}^{1000} b_{3k} = 505$$

$$49 \sum_{k=1}^{1000} b_{3k} = 95$$

$\{b_3; b_6; \dots; b_{3000}\}$ - Также является геометрической прогрессией с показателем q^3 , если q - показатель данной прогрессии. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 49 \sum_{i=1}^{1000} a_i = 9 \sum_{i=1}^{3000} b_i$$

$$\frac{49 \cdot a_1 \cdot ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1} = \frac{9 b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$\frac{49 b_1 q^2}{q^2 + q + 1} = \frac{9 b_1}{q - 1}$$

$$49 q^2 = 9 q^2 + 9 q + 9$$

$$40 q^2 - 9 q - 9 = 0$$

$$(5q - 3)(8q + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3}{5} \\ q = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

, но все члены прогрессии положительные числа $\Rightarrow q > 0 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow q = \frac{3}{5}$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{1500} b_{2k} + \sum_{i=1}^{3000} b_i - \sum_{k=1}^{1500} b_{2k} = \sum_{i=1}^{3000} b_i + \sum_{k=1}^{1500} b_{2k}$$

$\{b_2, b_4, \dots, b_{3000}\}$ - так же является геометрической прогрессией с показателем q^2 .

$$\sum_{i=1}^{3000} b_i + \sum_{k=1}^{1500} b_{2k} =$$

$$= \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{b_1 q (q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{q}{q+1}\right) = S \cdot \frac{2q+1}{q+1} = \frac{11}{8} S$$

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

$$1) x = -6 : \left(-\frac{6}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{-112} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x \neq -6$$

так как $x^3 - 4x + 80 \geq 0$

$$x \neq -6$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$\sqrt{2} (x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = 2(x+6)(x+4)$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)(x^2+2x-12) = 0 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{3} - 1 \\ x = -\sqrt{3} - 1 \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{3} - 1 \\ x = -\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Так как $x^3 - 4x + 80 \geq 0$, подставив в место x все 3 значения можно убедиться в том что они подходят.

Проверка: $x^3 - 4x + 80 \geq 0$

1) $x = 4$: $64 - 16 + 80 \geq 0$ - верно

2) $x = -\sqrt{3} - 1$: $-(\sqrt{3}+1)^3 + 4(\sqrt{3}+1) + 80 \geq 0$

$$\Rightarrow (-\sqrt{3}-1)(5+\sqrt{3}) + 40 \geq 0$$

$$-6\sqrt{3} + 22 \geq 0$$

$$428 \geq 468 \quad - \text{верно} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x = 4; \quad x = \sqrt{3} - 1; \quad x = -\sqrt{3} - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

O - центр координат (0; 0)

Заметим, что прямая M_0N_0 - проходит через точку O.

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x - x_2}{y - y_2}$$

$$\frac{x + 2}{y + 2\sqrt{7}} = \frac{x - 5}{x - 5\sqrt{7}}$$

$$xy - 5\sqrt{7}x + 2y - 10\sqrt{7} = xy - 5y + 2\sqrt{7}x - 10\sqrt{7}$$

$$y = \sqrt{7}x$$

$$(0, 0) \in y = \sqrt{7}x$$

пусть $\omega_1(0; R_1)$ и $\omega_2(0; R_2)$ - окружности по которым движутся жук и водомерка соответственно.

$$R_1 = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$R_2 = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2,5 \neq 1$$

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1}$$

$$v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} = 2,5 \cdot 2 = 5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ угловая скорость водомерки в 5 раз больше угловой скорости жука.

Пусть $M, N \in \omega_1 = X$

Если перенесем воронку в точку X
и дадим ей такую же угловую скорость,
то достаточно найти точки встречи насекомых.

Точки N_0 и X - диаметрально противоположны

$$\pi R = (\omega'_1 - \omega_1) t_1$$

$$\pi R = 4\omega_1 t_1$$

$$\pi R = \frac{4\pi R}{T_1} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{T_1}{8} - \text{первая встреча}$$

$$2\pi R = 4\omega_1 t'_2$$

$$\pi R = \frac{2\pi R}{T_1} t'_2 \Rightarrow t'_2 = \frac{T_1}{2}$$

$$\text{вторая встреча } t_2 = t_1 + t'_2 = \frac{5T_1}{8}$$

след встреча через t'_2 времени, и т.д.

$$\frac{5T_1}{8} + \frac{T_1}{2} = \frac{9T_1}{2}$$

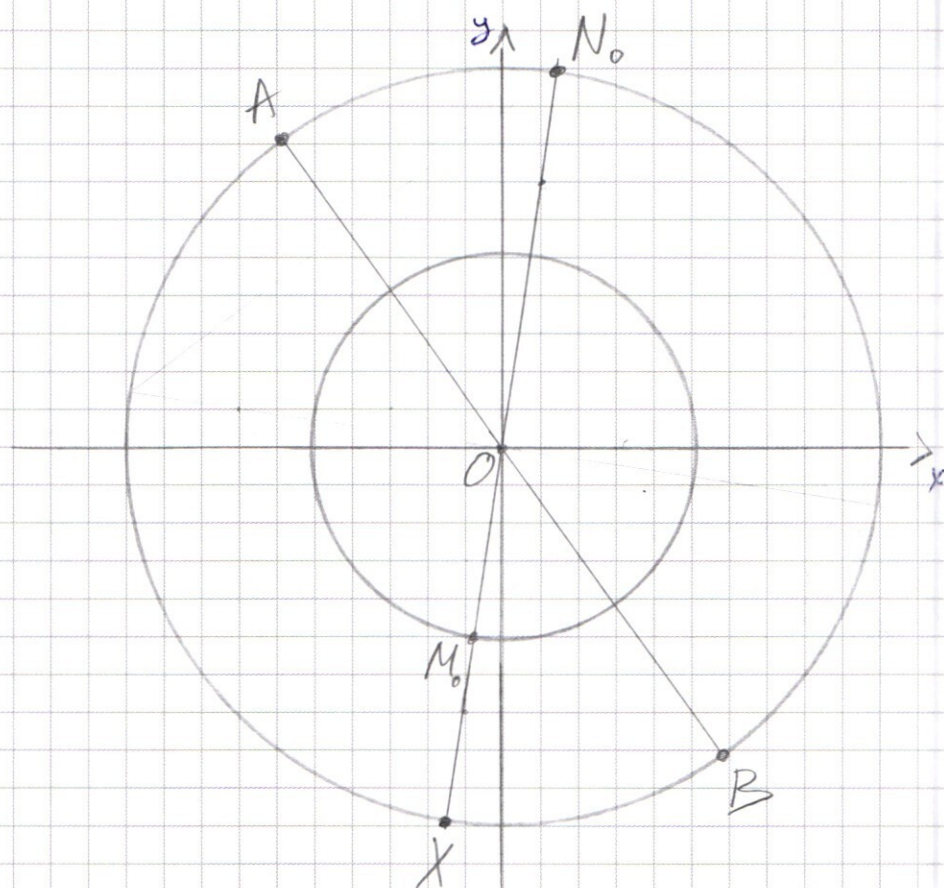
но через $\frac{9T_1}{2}$ и через $\frac{T_1}{2}$ времени

насекомые будут находиться в одной
и той же точке $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ две точки встречи, но это

те же самые точки при которых
расстояние будет наименьшим.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Отметим эти две точки через A и B
заметьте, что $\angle(AB, M_0N_0) = 45^\circ$

так как проходит $\frac{1}{8}$ окружности, $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

$$\angle(M_0N_0; O_y) = \alpha \Rightarrow \angle(AB, O_x) = 45 + \alpha$$

прямая M_0N_0 проходит через $y = 7x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\begin{aligned} \sin(45 + \alpha) &= \sin 45 \cos \alpha + \cos 45 \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$A(x_0; y_0)$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{y_0}{R_1} = \frac{4}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{4R_1}{5} = 8\sqrt{2}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = R_1^2$$

$$x_0^2 = R_1^2 - y_0^2 = 200 - 128 = 72$$

$$x_0 = -6\sqrt{2}$$

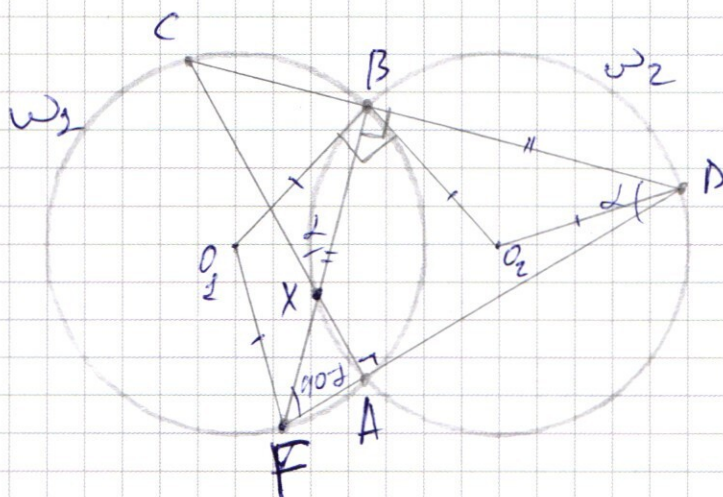
$$A(-6\sqrt{2}; 8\sqrt{2})$$

но А и В диаметрально противоположны
 $\Rightarrow B(6\sqrt{2}; -8\sqrt{2})$

Ответ: $(-6\sqrt{2}; 8\sqrt{2}), (6\sqrt{2}; -8\sqrt{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



Заметим, что точка B - центр
поворотной гомотетии преобразующей

$$\triangle BO_2D \rightarrow \triangle BO_1F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O_1BO_2 = \angle FBD = 90^\circ$$

Пусть $AD \cap BF = Y$, докажем, что $Y = F$.
 $AC \cap BF = X$

$$\angle XBD = \angle XAD = 90^\circ \Rightarrow \angle XBD A - \text{впис} \Rightarrow X \in \omega_2$$

$$\angle BDY = \angle \Rightarrow \angle BYA = 90 - \angle$$

$$\angle BDY = \angle \Rightarrow \angle BXC = \angle \Rightarrow \angle BCA = 90 - \angle$$

$$\angle BYA = \angle BCA = 90 - \angle \Rightarrow Y \in \omega_1$$

$$\angle O_1BO_2 = \angle YBD = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1BY = \angle O_2BD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BO_1F = \angle BO_2D \text{ и } O_1B = O_1F = O_2B = O_2D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BY = BD \Rightarrow Y = F, \angle CAF = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow CF$ - квадрат

$$CF = 10$$

8) $BC = 6$

$$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8$$

$$BF = BD = 8$$

$$BX = \sqrt{BD^2 - BC^2} = 6$$

$$FX = BF - BX = 2$$

$$AF^2 + AX^2 = FX^2 = 4$$

$$AF = AX \Rightarrow AF = AX = \sqrt{2}$$

$$CX = \sqrt{CB^2 + BX^2} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AF \cdot CA = 4$$

Ответ: $CF = 10$

$$S_{ACF} = 4$$

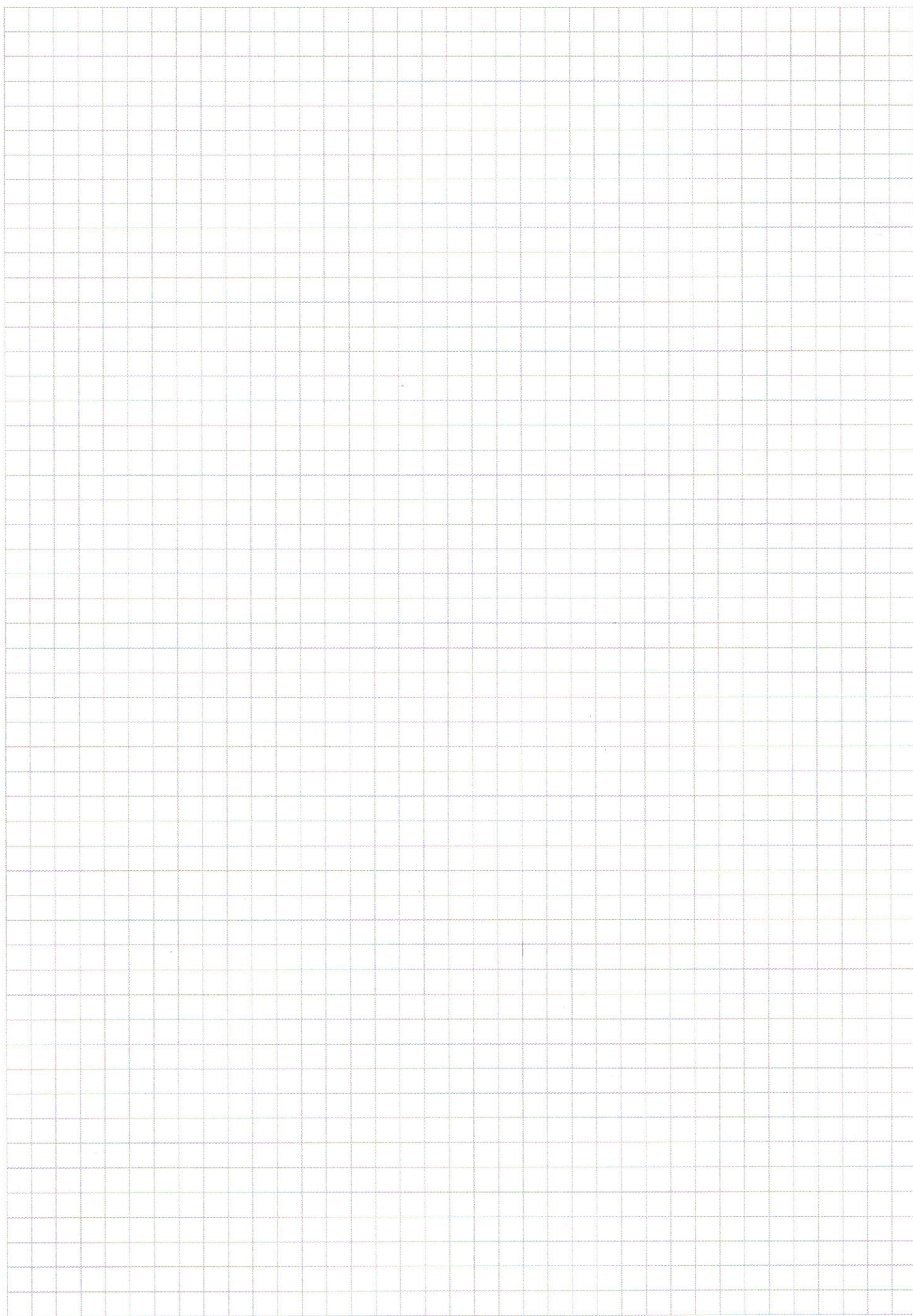
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 \geq 0$$

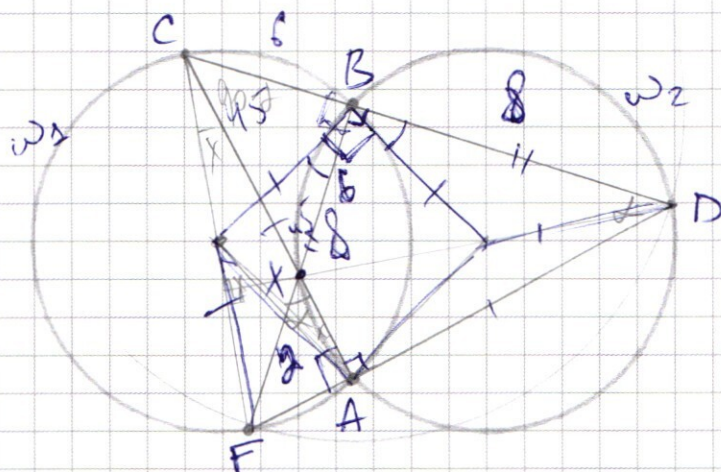
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x < 2 \\ 2x^4 + x^2 - 4x + 3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < 2 \\ 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases}$$
$$2x^4 - 2x^3 + 5x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$
$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



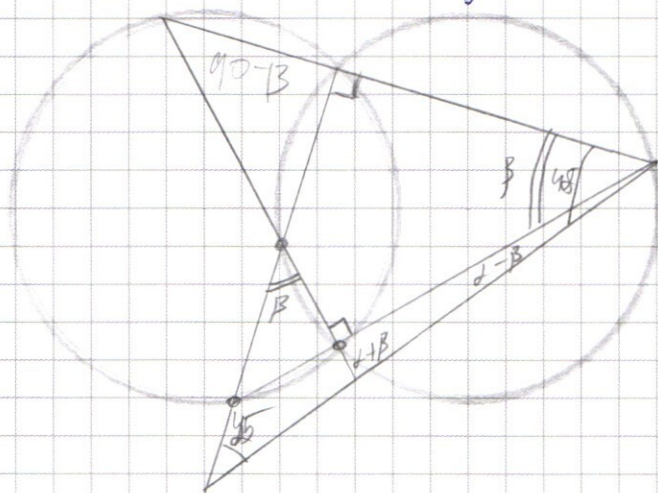
$$\begin{aligned} 6\sqrt{2} & \quad 5\sqrt{2} \quad 7\sqrt{2} \\ 2X^2 &= 4 \\ X &= \sqrt{2} \\ X\sqrt{2} &= 4 \\ X &= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \\ 100 - 8 &= 92 \end{aligned}$$

Пусть $BF \cap AC = X$

$\angle XBD = \angle XAD = 90^\circ \Rightarrow XBDA - \text{впис} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in \omega_2$

докажем, что $F \in \omega_1$
От противного, пусть $F \notin \omega_1$



$$2 \times 49 - 2^2 = 100$$

