МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабо
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y+x+8|+|y-x+8|=16,\\(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

$a_1 \cdot \ldots \cdot a_8 = 4900$

Найти:

$N(\overline{a_1 \ldots a_8}) = ?$

№1 Решение:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 4900 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

Поскольку $0 < a_i < 10$, где $0 < i < 9$ ($a_i \neq 0$, поскольку $a_1 \cdot \ldots \cdot a_8 = 4900$, a_i – цифра)

$0 < 5 \cdot 2 \geq 10$
$0 < 7 \cdot 5 > 10$
$0 < 7 \cdot 2 > 10$
$0 < 2 \cdot 2 = 4 < 10$
$0 < 7 \cdot 7 > 10$
$0 < 5 \cdot 5 > 10$

возможны два случая:

1) Среди цифр – две семерки, две пятерки, две двойки, две единицы

2) Среди цифр – одна четверка, две пятерки, две семерки, три единицы

1) Число можно выбрать $8!/16$ способами.

2) Число можно выбрать $8!/24$ способами

Всего число можно выбрать $\frac{8!}{16} + \frac{8!}{24} = 4200$ способами (числа из второй и первой группы не повторяются (во второй группе во всех числах есть 4, в первой – нет)) Ответ: 4200 чисел.

№2

Дано:

$b_1 \ldots b_{3000}$ – геометрическая прогрессия

S – сумма геометр. прогрессии

$$S = \left(\frac{1-q^{3000}}{1-q}\right) \cdot b_1$$

$b_1 > 0$ $q > 0$ (все члены – положительные)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

b_i', где $i \vdots 3 = b_i \cdot 40$ $\{b_1\ \ b_1q\ \ b_1q^2 \ldots b_1q^{2999}$

$S' = 5S$

b_i'', где $i \vdots 2 = b_i \cdot 3$ $\quad b_1\ \ b_1q\ \ 40b_1q^2\ \ b_1q^3 \ldots 40b_1q^{2999}$

$S'' = kS$ $\quad b_1\ \ 3b_1q\ \ b_1q^2\ \ 3b_1q^3 \ldots 3b_1q^{2999}$

Найти: $k = \frac{S''}{S}$

$k = \frac{S''}{S} = ?$

При увеличении четных членов данной прогрессии в три раза мы можем разделить ее на две геометрические прогрессии:

1) с четными индексами, где $b_{1\,чет} = 3b_1q$, $q_{чет} = q^2$

2) с нечетными индексами, где $b_{1\,нечет} = b_1$, $q_{нечет} = q^2$

Тогда сумма сумм членов этих прогрессий (S'') равна:

$$S'' = S_{чет} + S_{нечет} = 3b_1q\,\frac{1-(q^2)^{1500}}{1-q^2} + b_1\frac{1-q^{3000}}{1-q^2} = \frac{1-q^{3000}}{1-q^2}\cdot 3b_1q + b_1\frac{1-q^{3000}}{1-q^2} =$$

$$= b_1\frac{1-q^{3000}}{1-q^2}(3q+1)$$

При увеличении членов данной прогрессии, чьи индексы кратны 3 в 40 раз, ее можно разделить на три геометрические прогрессии:

1) с индексами ~~дающими остаток 1~~ сравнимыми с 1 по модулю 3, где $b_{1\,пер} = b_1$, $q_{пер} = q^3$

2) с индексами сравнимыми с 2 по модулю 3, где $b_{1\,втор} = b_1q$, $q_{втор} = q^3$

3) с индексами кратными 3, где $b_{1\,трет} = b_1 \cdot 40 \cdot q^2$, $q_{трет} = q^3$.

Тогда сумма ~~членов~~ сумм ~~данных~~ этих прогрессий равна (S')

$$S' = S_{пер} + S_{втор} + S_{трет} = \frac{1-(q^3)^{1000}}{1-q^3}b_1 + \frac{1-(q^3)^{1000}}{1-q^3}b_1q + \frac{1-(q^3)^{1000}}{1-q^3}\cdot 40\cdot b_1q^2 = \frac{1-q^{3000}}{1-q^3}b_1(q+1+40q^2) = 5S = 5\cdot\frac{1-q^{3000}}{1-q}b_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (q+1+40q^2) = \frac{5(1-q^3)}{1-q} = \frac{5(1-q)(1+q+q^2)}{1-q} = 5+5q+5q^2 \Rightarrow 35q^2-4q-4=0 \Rightarrow q = \frac{4\pm\sqrt{16+35\cdot 4^2}}{70} = \frac{4\pm 24}{70}\quad q>0 \Rightarrow q = 0{,}4$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$K=\frac{S''}{S}=\frac{b_1\frac{1-q^{3000}}{1-q^2}(3q+1)}{b_1\frac{1-q^{3000}}{1-q}}=\frac{3q+1}{1+q}=\frac{22}{14}=\frac{11}{7}$$

Ответ: увеличится в 11/7 раз ($K=11/7$).

$$\left(\frac{x}{2\sqrt2}+\frac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40 \qquad x^3-64x+200\geq0$$

$$\left(x+10\right)\sqrt{x^3-64x+200}=2\sqrt2\left(x^2+6x-40\right)$$

$$(x+10)\sqrt{(2x^3-128x+400)}=4\left(x^2+6x-40\right)=$$

$$=4(x+10)(x-4) \Rightarrow \text{Если } x\neq-10:$$

$$\sqrt{2x^3-128x+400}=4(x-4)\geq0 \Rightarrow \underline{x\geq4}$$

$$\Downarrow$$

~~Если $x\neq-10$~~

Если $x=-10$

$\Downarrow$

$x=-10$ – не корень.

($x^3-64x+200$ (где $x=-10$) <0).

$$2x^3-128x+400=16x^2-128x+16^2$$

$$x^3+200=8x^2+128$$

$$x^3+72-8x^2=0$$

~~$\left(\frac{x}{2}\right)^3+9\ldots x=0$~~

~~$x\geq4 \Rightarrow$ производную~~

~~$(x^3+72-8x^2)'=0$~~

~~$3x^2-16x=0$~~

~~$\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{16}{3}\end{array}\right.$~~

$x^3+72-8x^2=$
$=(x-6)\cdot$
$\cdot(x^2-2x-12)$

$$\Downarrow$$

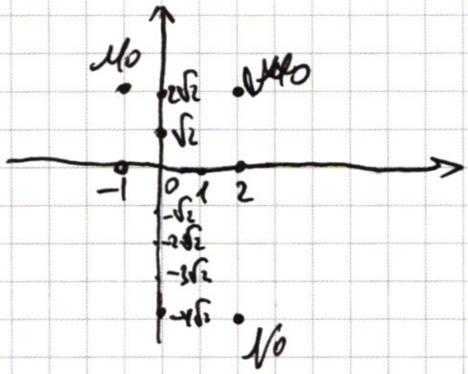
$$\left[\begin{array}{l}x^2-2x-12=0\\ x-6=0\end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pm\sqrt{4+48}}{2}=1\pm\sqrt{13}\\ x=6\end{array}\right.$$

(8) Но $x \geq 4 \Rightarrow x \neq (1-\sqrt{13})$

$(1+\sqrt{13} > 4$, т.к. $\sqrt{13} > 3$, т.к. $13>9)$.

Ответ: $x = 1+\sqrt{13}$; $x=6$.

№5



$x_1^2+y_1^2=R_1^2=5 \Rightarrow R_1=\sqrt5$

$x_2^2+y_2^2=R_2^2=36 \Rightarrow R_2=6$

№7 $\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=9 \end{cases}$

Если x, y - ~~не~~ решения системы $\Rightarrow (-x), y$ - решения системы. Пусть X, Y - решение (второе реш. - $(-X), Y$).

Таким образом если ~~$y \geq x+$~~ Пусть $X>0$.

$Y-X+8>0 \Rightarrow Y \geq X-8 \Rightarrow 2Y+16=16 \Rightarrow Y=0 \Rightarrow$ При $\forall X \geq 8$

$Y+X+8<0$ ~~Если~~ $Y < -X-8 \Rightarrow -2Y-16=16 \Rightarrow Y=-16 \Rightarrow$ При $\forall X \leq 8$ и не будет

Если ~~$Y \leq X-8$~~ $-X-8 \leq Y < X-8 \Rightarrow$

$\Rightarrow -Y-X+Y-X=16 \Rightarrow X=-8$ нет

$\begin{cases} Y=0 \\ Y=-16 \end{cases}$ $\quad -X-8 < Y < X-8$

$Y \leq 0 \Rightarrow (|x|-15)^2+(|y|-8)^2 = \ldots + (|y+8|)^2$

Круг система имеет решение.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0$

Пусть $x\geq -2$

$4x^4+\cancel{x^2}+4x-5x^3-\overset{9}{\cancel{10}}x^2+4\geq 0$

$4(x^4-x^3-2x^2+x+1)-x^2-x^3\geq 0$

$4x^4+4x-5x^3-9x^2+4=(x+1)(x-2)(4x^2-x-2)=$

$=(x+1)(x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x+\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\geq 0$

$+\quad -1\quad -\quad \frac{1-\sqrt{33}}{8}\quad +\quad \frac{1+\sqrt{33}}{8}\quad -\quad 2\quad +$

Пусть $x\leq 2$

$4x^4+x^2+4x+10x^2+5x^3+4\geq 0$

$4x^4+11x^2+4x+5x^3+4\geq 0$, при $\forall\, x\leq 2$

т.к. $(4x^4+11x^2+4x+5x^3+4)'\leq 0$, при $\forall\, x\leq -2$

т.к. $x^2((4x^4+11x^2+4x+5x^3+4)'')'>0$, при $\forall\, x\leq -2$

$(48x^2+22+30x=0$

⇕ $\qquad$ ⇕

Ответ: $x=(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty)$.

$24x^2+11+15x=0$ $x=\frac{-15\pm\sqrt{15^2}}{}$

$-124\cdot 11\cdot 4$ невозм. ($D=15^2-4\cdot 11\cdot 24<0$ $(44\cdot 24>15\cdot 15)$)

⇕

$24x^2+11+15x>0$, при $\forall x$ (при $x=0$, $24x^2+11+15x>0$)).

№6

Дано:

а) $R_1 = R_2 = 13$

$w_1(O_1, R_1) \cap w_2(O_2, R_2) = (\cdot)A, (\cdot)B$

$(\cdot)C \in w_1$, $(\cdot)D \in w_2$

$\angle CAD = 90°$

$(\cdot)B \in |CD|$

$\angle CBF = 90°$

$|BF| = |BD|$

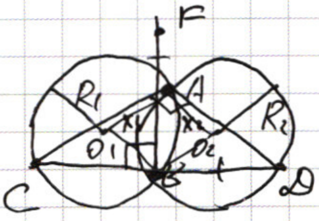
$(\cdot)A, (\cdot)F$ – по одну сторону от (CD). (в одной полуплоскости отн. (CD))

Найти:

а) $|CF|$ – ?

б) $S_{\triangle ACF}$ – ?, если $|BC| = 10$

Решение:



AO_1O_2B – ромб (представление ромба)

$\beta = \overset{\frown}{AB}_{w_1} = 180° - \overset{\frown}{AB}_{w_2}$

$\Downarrow$

$\angle ACD + \angle ADB = 90° = 13/2 + 13/2 =$

$= 90°$

$\angle ACD = \beta = \frac{\overset{\frown}{AB}_{w_1}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle ADC = 90° - \beta$,

$\overset{\frown}{AB}_{w_2} + \overset{\frown}{AB}_{w_1} = 180°$

$\frac{\overset{\frown}{AB}_{w_2}}{2} = 90° - \beta$

$\Downarrow$

$\square AO_1O_2B$ – вписан. (из прав. т-ки, $(\cdot)A, (\cdot)O_2, (\cdot)O_3, (\cdot)B \in w_3(O_3, R_3)$

б) $|BC| = 10$

$\cos\angle CO_1B = \alpha$ (усложнение)

т.к. $100 = 169 + 169 - 2 \cdot 169 \cos\alpha$

$\Downarrow$

$\cos\alpha = \frac{119}{169}$

$[O_1O_2] \cap w_1 = (\cdot)X_1$

$[O_1O_2] \cap w_2 = (\cdot)X_2$

$|O_1O_2| = X_1 + R_1 =$

$= X_2 + R_2 \Rightarrow X_1 = X_2$

где $X_1 = |O_1X_1|$, $X_2 = |O_2X_2|$

$\Downarrow$

$(\cdot)O_3$ – на середине X_1X_2, перпенд. $|O_1O_2|$

№7 (продолжение)

$$\begin{cases} (|x| - 15)^2 + (-y - 8)^2 = a \\ \left[\begin{array}{l} (x - 15)^2 + 64 = a \\ (x - 15)^2 + 64 = a \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow (x-15)^2 + 64 = a$$

имеет одно решение

☐ черновик ☑ чистовик

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2+225-30x+64-a=0$$

$$x=\frac{30\pm\sqrt{900-(289-a)4}}{2} - \text{ед.}$$

$\Downarrow$

$$900-(289-a)4=0$$

$\Downarrow$

$$900-1156-4a=0$$

$\Downarrow$

$$4a=256 \Rightarrow a=64$$

Ответ: $\underline{a=64}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 77554411   422551 11   42255АБВ $35 \times 4 = 140$

1 77554411   422551 11   42255ВБА

3 77554411   42255111   42255ВАБ $140 \times 4 = 560$

4 77554411   42255111   42255АВБ   576

5 77554411   42255111   42255АББ

6 77554411   42255111   42255БАВ

7 77554411   42255111   42255АБВ · 6

8 77554411   42255111   42255АБВ · 6

9 77554411   42255111   42255АББ

10 77554411   42255

11 77554411   42255АБВ · 6

12 7755444

13 77554411

14 77554411

15 77554411

16 77554411

$8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$

$3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$

$2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$

$4\cdot5\cdot6\cdot7\ (5)$

$42\cdot100$

$t(t^2-x)+(t+3)\cdot k$

$(20+4)(20+4) = 400+160+16$

$16(x^2-4x+16)$

$x = \frac{-6\pm\sqrt{36+160}}{2}$

$x^3-64x+160$

x^3-16x

$64-$ $64+72-$

125 -128 $125+72-$ -200

$16\cdot8$ 21   3   6   12

$\frac{-6\pm14}{2}$ -10 4

32   $3-2$

$\frac{1-9}{1-9}$ 80

$1-8$ $1-2$

$x^3(x^2-i)+200-(64i)$

$t^3+9-2t=0$

t^3-

$\left(\frac{16}{3}\right)$

-1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$324 + 99\cancel{5} - 12 - 135 + 4$

$16x^3 + 22x + 4 + 15x^2 \geq 0$

$33\sqrt{33} + 3\sqrt{33} + 99 + 1 - 18\sqrt{33} -$
$- 36\sqrt{33} - 18 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2$

$4x^2 =$

$100 - 18 \cdot 34$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$8 \cdot 64 = 0$

119

$(60+4) \cdot 8 = \cancel{360 + 24}$ 480 32

612

$4x^3(x+1)$

238

$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4)$

$4x^4 + 4x^3 - 9x^3 - 9x^2 + 4x + 4$

216

$36 \cdot 6 = 180 +$

$(x-2) \cdot 4x^2$

384 484

$36 \cdot 8 = 240 + 48$

$(x-2)(4x^2 - x - 2)$

$(30+4)(10+8) =$
$= 300 + 40 + 240 + 32$

288

$216 =$

$4x^3 - \cancel{8x^2} - 9x^2 + \cancel{2x - 2x} + 4$

169
+65

$(30+6)6 = 180 + 36 =$

$\frac{(\sqrt{33}+1)^3}{8 \cdot 2 \cdot 8} - 9\frac{(\sqrt{33}+1)^2}{8 \cdot 8} + 4$

$(x - 6)(x^2 - 2x \pm 12)$