

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$700 = 7 \cdot 100 = 7 \cdot 10^2 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2$$

~~Цифры в восьмизначном числе могут быть из~~
~~какого набора!~~

~~7, 5, 2, 1.~~ Набор цифр в числе может быть
таким:

1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 7

или таким:

1, 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, т.к. 1 произведение не меняется,
и число 2^2 можно записать 1^{ой} цифрой.

Кол-во вариантов в 1^{ом} случае:

$$\frac{8!}{3!2!}$$

во 2^{ом} случае:

$$\frac{8!}{4!2!}$$

$$\text{В сумме: } \frac{8!}{4!2!} + \frac{8!}{3!2!} = \frac{8!}{2!} \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} \right) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{1+4}{24} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{48} = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 25 \cdot 8 \cdot 21 = 200 \cdot 21 = 4200$$

Ответ: 4200

N2

$$\frac{b_1 \cdot (q^{3000} - 1)}{q - 1} = S, \text{ где } q = \frac{b_n}{b_{n-1}}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Если мы увеличим каждый $3^{\text{ий}}$ член в 50 раз,
то мы добавим по 49 членам нашей геом. про-
грессии. Их кол-во будет $\frac{n}{3} = 100$.

Получим:

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{b_1 \cdot q^2 ((q^{\frac{n}{3}})^3 - 1)}{q^3 - 1} \cdot 49 = 10S.$$

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{b_1(q^n - 1) \cdot q^2}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} \cdot 49 = 10S$$

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \left(1 + \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} \right) = 10S$$

$$S \left(1 + \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} \right) = 10S$$

$$1 + \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} = 10$$

$$49q^2 = 9q^2 + 9q + 9$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$q_1 = \frac{9 - 39}{80} = -\frac{30}{80} < 0, \text{ не удовлетворяет}$$

условию, т.е., если $q < 0$, каждый второй
член прогрессии будет меньше 0.

$$q_2 = \frac{9 + 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

Если мы увеличим каждый $2^{\text{ой}}$ член в 2 раз,
то во всей сумме мы прибавим каждый
такой член еще раз.

$$\frac{b(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{bq(q^{\frac{n}{2}} - 1)}{q - 1} = S \cdot N$$

N - то, во сколько раз увеличится сумма.

$$\frac{b(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{b(q^n - 1)}{q - 1} \cdot \frac{q}{q + 1} = S \cdot N$$

$$\frac{b(q^n - 1)}{q - 1} \left(1 + \frac{q}{q + 1} \right) = S \cdot N$$

$$S \left(\frac{q + q + 1}{q + 1} \right) = S \cdot N$$

$$N = \frac{2q + 1}{q + 1} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 1} = \frac{\frac{6}{5} + 1}{\frac{8}{5}} = \frac{\frac{11}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{11}{8}$$

Ответ: сумма увеличится в
 $\frac{11}{8}$.

№3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0.$$

$$x^2 + 10x + 24 \leq 0$$

$$D = 100 - 96 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 2}{2} = -5 \pm 1. \quad x_1 = -6, \quad x_2 = -4$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + 2 \cdot 3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x + 6) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x + 6) \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 6)(x + 4)$$

При $x = -6$, $x^3 - 4x + 80 = -216 + 80 + 24 = -216 + 104 < 0$. Из этого следует $x = -6$ не является корнем уравнения.

$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x + 4)$ Возведем обе части уравнения в квадрат, при условии, что $x \geq -4$.

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x + 4)^2$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 20x - 2x^2 + 48 = 0$$

Будем искать корни $x = 4$.

то мы будем:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 & x - 4 \\ - x^3 - 4x^2 & x^2 + 2x - 12 \\ \hline 2x^2 - 20x & \\ - 2x^2 - 8x & \\ \hline -12x + 48 & \\ - -12x + 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -1 \pm \sqrt{\frac{16}{4}} = -1 \pm \sqrt{4}$$

Проверим полученные корни.

Для $x = 4$: $x^3 - 4x + 80 = 64 - 16 + 80 = 128 > 0$

Для $x = -1 + \sqrt{3}$: $x^3 - 4x + 80 = (\sqrt{3} - 1)^3 - 4(\sqrt{3} - 1) + 80 =$

$$= (\sqrt{3} - 1)((\sqrt{3} - 1)^2 - 4) + 80 = (\sqrt{3} - 1)(3 - 2\sqrt{3} + 1 - 4) + 80 =$$

$$= (\sqrt{3} - 1)(10 - 2\sqrt{3}) + 80 =$$

$$= (\sqrt{3} - 1)(5 - \sqrt{3}) \cdot 2 + 80 > 0, (\sqrt{3} > 1,$$

$$\sqrt{3} < 5, \text{ т.к. } 13 < 25. \text{ } y = x^2, x \in \mathbb{R},$$

возрастает на $x \in [0; \infty)$).

Для $x = -1 - \sqrt{3}$: $x^3 - 4x + 80 = -(1 + \sqrt{3})^3 + 4(1 + \sqrt{3}) + 80 =$

$$80 + (1 + \sqrt{3})(4 - (1 + \sqrt{3})^2) =$$

$$80 + (1 + \sqrt{3})(4 - 1 - 3 - 2\sqrt{3}) = 80(1 + \sqrt{3})($$

$$-10 - 2\sqrt{3}) = 80 - (1 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{3}) \cdot 2$$

$$(1 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{3}) \cdot 2 \sqrt{80}$$

$$(1 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{3}) \sqrt{40}$$

$$5 + 5\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3 \sqrt{40}$$

$$6\sqrt{13} \sqrt{22}$$

$$3\sqrt{13} \sqrt{11}$$

$$121 \sqrt{9 \cdot 13}$$

$|z| > 117$. Корень не существует.

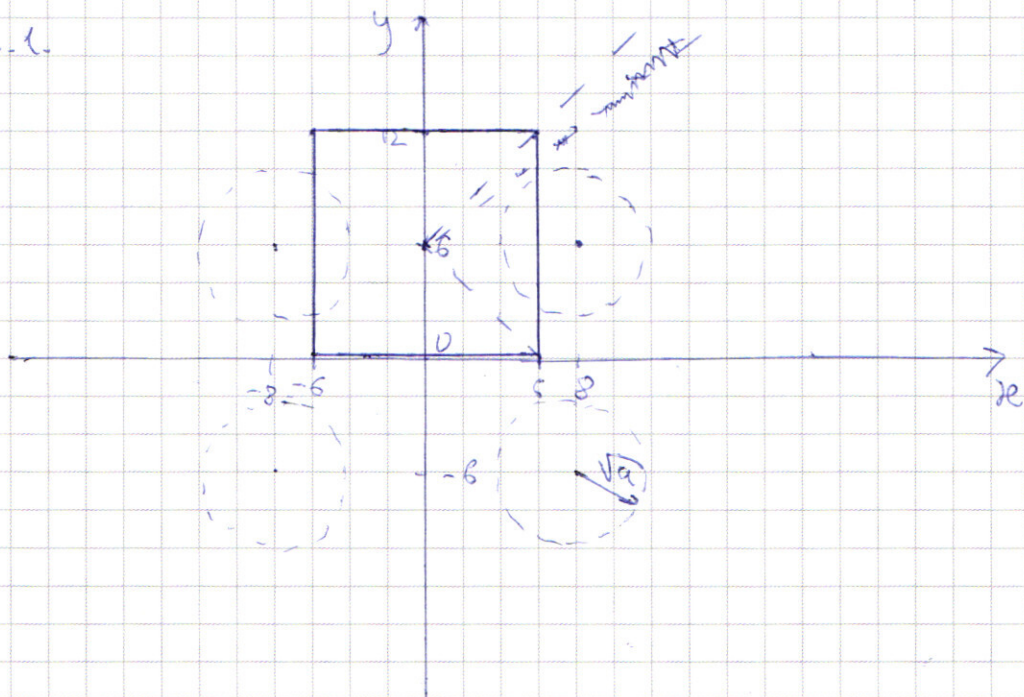
Ответ: $-1 - \sqrt{3}$, $-1 + \sqrt{3}$,
4.

№7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

Рассмотрим графики каждого из уравнений.

рис. 1.



2^{ое} уравнение представляет из себя 4 окружности с центрами $(8; 6)$, $(-8; 6)$, $(8; -6)$, $(-8; -6)$ в зависимости от знака x и y , и радиусом $\sqrt{a}$.

Рассмотрим 1^{ое} уравнение:

Его график функции данного уравнения симметричен относительно оси OY , т.к. при смене знака значения левой части не меняется. Рассмотрим уравнение при $x \geq 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и 7 (предположение)
~~Если~~ I) Если $y - 6 + x > 0$, $y - 6 - x > 0$.

$$x < y - 6.$$

$$12 < y - 6 + x + y - 6 - x = 2y - 12$$

$$24 < 2y$$

$$y < 12.$$

Если $y - 6 + x > 0$, $y - 6 - x < 0$

$$y > -x + 6, \quad x > y - 6.$$

$$y - 6 + x - (y - 6 - x) \leq 12$$

$$y - 6 + x - y + 6 + x = 12$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

Если $y - 6 + x \geq 0$ и $y - 6 - x < 0$.

$$y \leq -x + 6, \quad y - 6 < x.$$

$$-y + 6 - x - y + 6 + x \leq 12$$

$$-2y \leq 0$$

$$y \geq 0.$$

Сначала окружности не касаются графика 1^{го} уравнения, далее при увеличении a они сначала касаются в 2^х точках, а после пересекаться в 4. и в конечном, ~~тоже~~

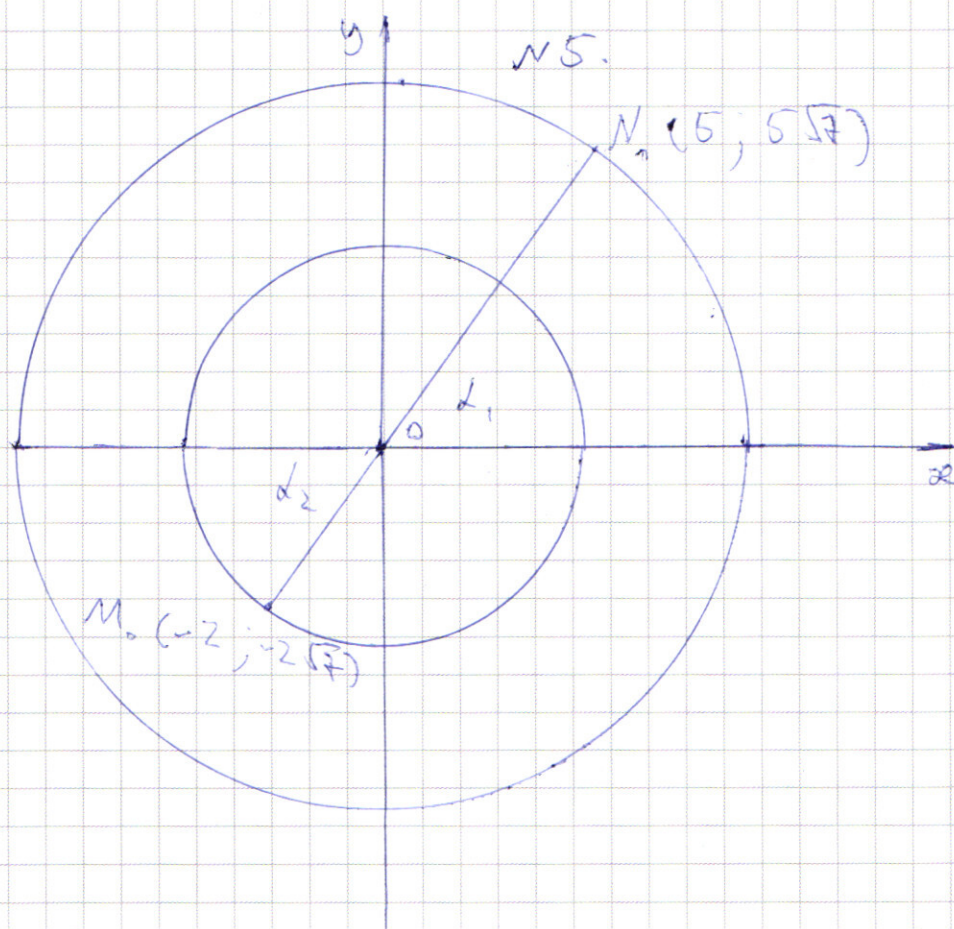
Снова точки пересечения становятся,
т.к. точки касания левых и правых окружностей совпадают и лежат на ОУ.

1. Когда касаются ^{вне} раз. $a = (8-5)^2 = 9$.

2. Когда точки пересечения совпадают:

$$a = (12-6)^2 + (8-0)^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

Ответ: 9, 100.



Заметим, что угол между ON и OM 180° , т.к. d_1 и d_2 равны между собой (см. рис), т.к. $\text{вд } d_1 = \text{вд } d_2 = \sqrt{3}$, а в промежутке $0; \pi$ единственному вд соответствует единственное $\angle$.

Кратчайшее расстояние между точкой и водонепроницаемой будет, когда угол между

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15 (продолжение)

О N_0 и О M_0 будет 0, т.к. расстояние $N_0 M_0 = \sqrt{ON_0^2 + OM_0^2 - 2ON_0 OM_0 \cos \alpha}$ и при увеличении α $\cos \alpha$ будет уменьшение подкоренного, а значит уменьшение значения корня, а косинус достигает своего максимального значения 1 при $\alpha = 0$. на промежутке $[0; \frac{\pi}{6}]$

$$ON_0 = \sqrt{25 \cdot 7 + 25} = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$$

$$OM_0 = \sqrt{4 \cdot 7 + 4} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Максимальное расстояние } l = ON_0 - OM_0 = 6\sqrt{2}$$

выберем ось ON_0 и будем считать угол относительно нее

$$(6\sqrt{2})^2 = (x_m - x_b)^2 + (y_m - y_b)^2$$

x_m, x_b, y_m, y_b - координаты точки и водоемной.

$$72 = (\cos 6 \cdot ON_0 - \cos(8+66) \cdot OM_0)^2 + (\sin 6 \cdot ON_0 + \sin(8+66) \cdot OM_0)^2, \text{ т.к. изначально}$$

угол между точкой и водоемной 8 , длина окружности, по которой бежит точка, больше длины окружности, по которой бежит водоемка в $\frac{25 \cdot ON_0}{25 \cdot OM_0} = \frac{ON_0}{OM_0} = \frac{10\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{2}$ раз и скорость водоемки больше в 2 раза

а значит угол скорости векторов
 больше угла скорости тупа $\frac{\pi}{2} < \angle < \pi$.

$$\begin{aligned} R^2 &= ON_0^2 \cdot \cos^2 \delta + ON_0^2 \sin^2 \delta + OM_0^2 \sin^2 (\delta + \pi) \\ &+ OM_0^2 \cos^2 \pi + \delta + \pi + 2 OM_0 ON_0 \cos \delta \cos \delta + \pi \\ &- 2 OM_0 ON_0 \sin \delta \sin \delta + \delta + \pi. \end{aligned}$$

$$R^2 = ON_0^2 + OM_0^2 - 2 OM_0 ON_0 (\cos(\delta - \pi - \delta))$$

$$R^2 = (4\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2(4\sqrt{2})(10\sqrt{2}) \cdot \cos(-\pi - 4\delta)$$

$$R^2 = 32 + 200 - 160 \cos \delta + 4\delta$$

$$- 160 = -160 \cos \delta + 4\delta$$

$$\cos \delta + 4\delta = 1$$

$$\delta + 4\delta = 2\pi, \pi \leq \delta$$

$$4\delta = -\delta + 2\pi, \pi \leq \delta$$

$$\delta = -\frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{2}, \pi \leq \delta, \delta = \frac{7\pi}{4}$$

Всего может 4. $\delta = \frac{\pi}{4}, \delta = \frac{3\pi}{4}, \delta = \frac{5\pi}{4},$
 $\delta = \frac{7\pi}{4}$. δ - угол относительно ON_0 .

Известный угол между OX и ON_0
 arcsos 2. Найдем $\cos$ косинусы всех углов,
 а из них найдем координаты тупа.

$$\cos \alpha = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \sin \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \frac{3\pi}{4}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

НС (продолжение)

$$\cos\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

$$\cos\left(2 - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(2 - \frac{7\sqrt{2}}{4}\right) = -\cos\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{4} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$x_3 = -\frac{1+\sqrt{2}}{4} \cdot 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$x_4 = \frac{1-\sqrt{2}}{4} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1 = \sqrt{200 - \left(5\sqrt{2} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{200 - \frac{25}{2}(1+\sqrt{2})^2}$$

$$y_2 = \sqrt{200 - \frac{25}{2}(\sqrt{2}-1)^2}$$

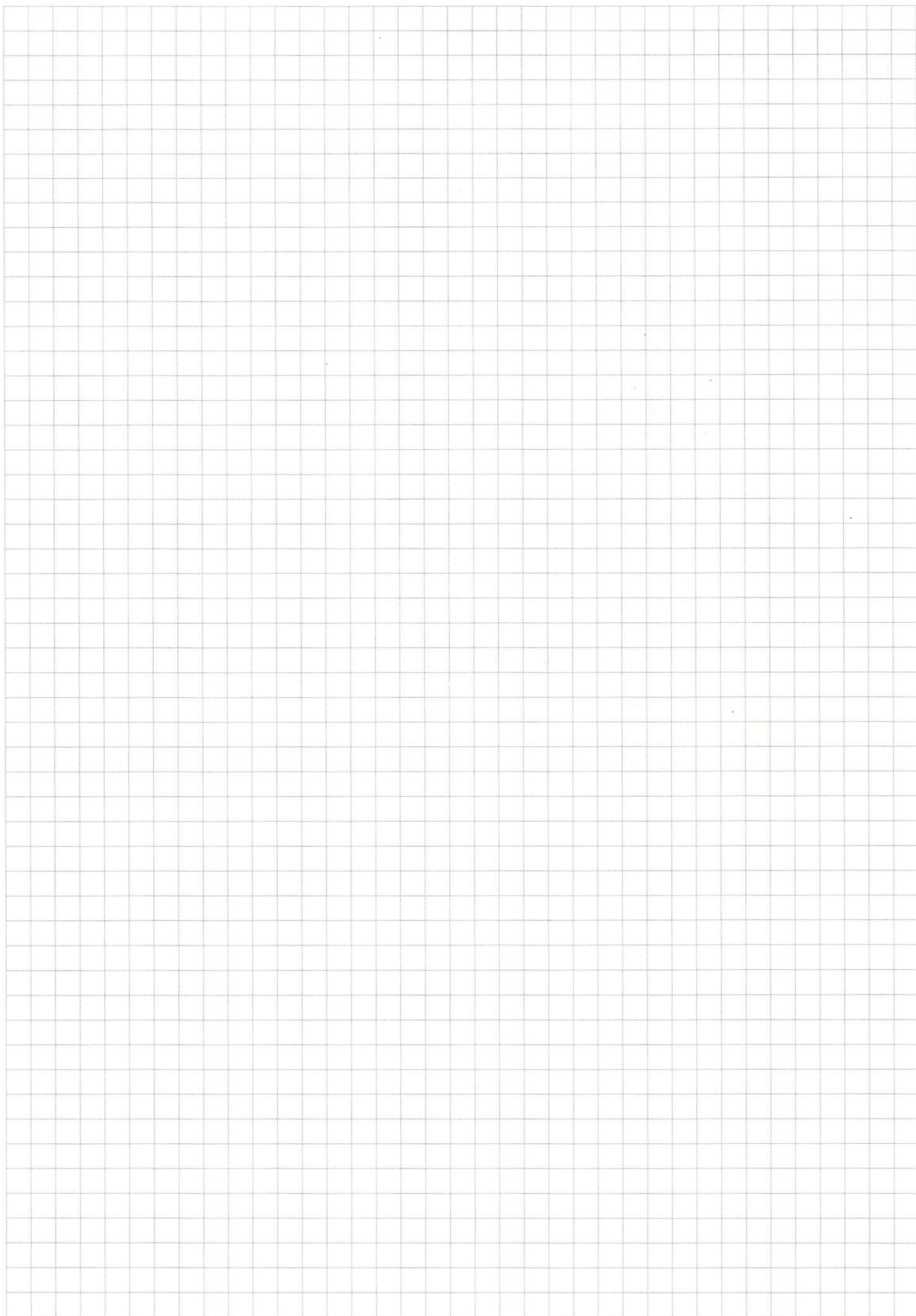
$$y_3 = \sqrt{200 + \frac{25}{2}(1+\sqrt{2})^2}$$

$$y_4 = \sqrt{200 + \frac{25}{2}(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{2}; \sqrt{200 - \frac{25}{2}(1+\sqrt{2})^2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot 5\sqrt{2};$$

$$\sqrt{200 - \frac{25}{2}(\sqrt{2}-1)^2}\right); \left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{2}; -\sqrt{200 + \frac{25}{2}(1+\sqrt{2})^2}\right)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{2}; -\sqrt{200 + \frac{25}{2}(\sqrt{2}-1)^2}\right)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

М
а b c d e f g h Колеблется не может.
 $700 = 350 \cdot 2 = 175 \cdot 2^2 = 35 \cdot 5 \cdot 2^2 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2$
 $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ 1-й вариант
 $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ 2-й вариант.

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} \quad \text{Ответ: } \frac{8!}{2!} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) =$$

11/3 / 3 11 13/8 / 8/2
1 2 2 3 12 вариантов.

$$6_5 = 6_3 \cdot 9^3 \quad 6_3 = 6_1 \cdot 9^2$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{24} = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 8 = 21 \cdot 25 \cdot 8$$

$$= 21 \cdot 200 = 2100 \cdot 2 = 4200.$$

1 3 9 27

Ответ: 4200.

М.
 $6_1, 6_2, \dots, 6_{3000}$

$$\frac{1 \cdot 9^4 - 1}{2} = 40$$

$$\frac{6_1 \cdot (9^n - 1)}{9 - 1} = S$$

$$49 \cdot \frac{6q^2(q^{3n}-1)}{q^3-1} + \frac{6(q^n-1)}{q-1} = 108$$

$$\frac{6(q^n-1)}{q-1} + 49 \cdot \frac{6q^2(q^n-1)}{q^3-1} = 108$$

$$\frac{6q^2(q^n-1)(q^2+q+1)}{(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$(q-1)(q^2+q+1)$$

$$q < q^2$$

$$6, = 6 \cdot q$$

$$\frac{q^2(q^{2n}+q^n+1)}{q^2+q+1} \cdot 8 \cdot 49 = 98$$

$$\frac{q^2(q^{2n}+q^n+1)}{q^2+q+1} = \frac{9}{49}$$

$$6q(0$$

$$\frac{6(q^n-1)}{q-1} + \frac{6q(q^{2n}-1)}{q^2-1} = N \cdot S$$

$$\frac{6(q^n-1)}{q-1} + \frac{6q(q^n-1)}{q^2-1} = SN$$

$$\frac{6(q^n-1)}{q-1} + 49 \cdot \frac{6q^2(q^n-1)}{(q-1)(q^2+q+1)} = 108$$

$$\left(\frac{6(q^n-1)}{q-1} \right) \left(1 + 49 \cdot \frac{q^2}{q^2+q+1} \right) = 108$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^3 - 20x - 2x^2 + 48 = 0$$

$x = 4$ - корень.

~~$x^3 - 20x$~~

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 \\ - (x^3 - 4x^2) \\ \hline 2x^2 - 20x + 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 20x + 48 \\ - (2x^2 - 8x) \\ \hline -12x + 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -12x + 48 \\ - (-12x + 48) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(4-x)12 = 48 - 12x$$

$$-12x + 48$$

$$\begin{array}{r} x-4 \\ \hline x^2 + 2x - 12 \end{array}$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12)$$

$$D: 4 + 48 = 52$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = -1 \pm \sqrt{\frac{52}{4}} = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$\boxed{-1 \pm \sqrt{13}, 4} \text{ дробей.}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0$$

Если $x \geq 2$.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 + 7x^2 - 3x^3 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2x(x^3-2)$$

$$\text{Есл } x \geq 2$$

$$2x^4 - 4x - 8x^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x^4 + (x-2)^2 - 3x^2 \geq 0, & x \geq 2 \\ 2x^4 + (x-2)^2 + 3x^2 \geq 0, & x \leq 2 \end{cases}$$

$$2x^4 + (x-2)(x-2-3x^2) \geq 0$$

$$(-3x^2 + x - 2)(x-2) + 2x^4 \geq 0$$

$$3x^2 + x - 2$$

$$-3x^2 + x - 2$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$$

$$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0 \Rightarrow \text{нигде не}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{6} = -1, \frac{2}{3}$$

$$(x+1)(x-\frac{2}{3})(x-2) + 2x^4 \geq 0 \quad x \leq 2.$$

$$x^4 + x^4 + x^2 - 4x + 4$$

$$x^4 - 2x + x^4 - 2x + x^2$$

$$x^4 + 2x^2 + x^4$$

$$x^4 - 2x^2 + 4 \leq x^2 - 2$$

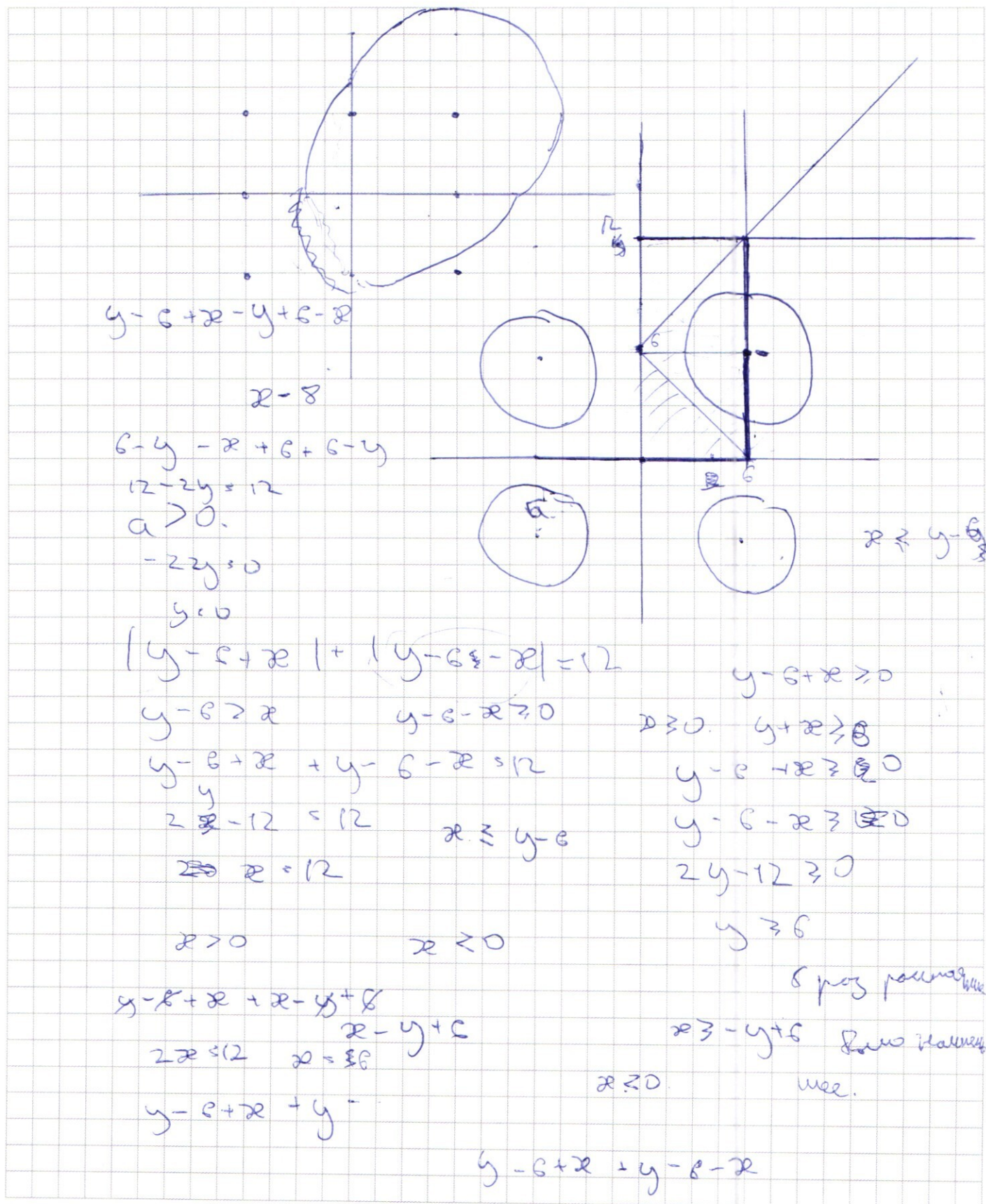
$$x^4 - 8x^2 + 16$$

$$x^4 + 9x^2 - 4x - 12$$

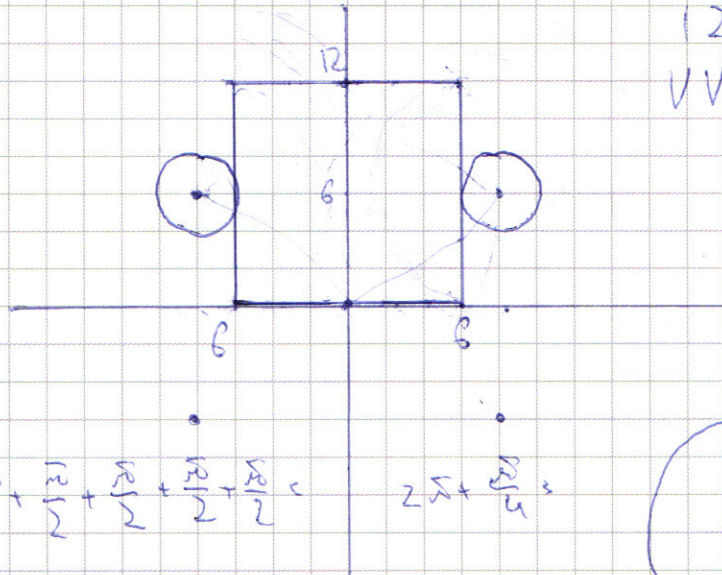


Есл $x < 0$, то все более сложн

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

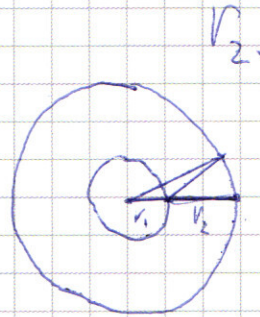


1 2 3 4 5 6 7
 V V V ~ V



$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} =$$

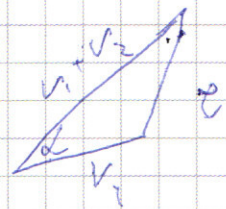
$$2\pi + \frac{\pi}{4} =$$



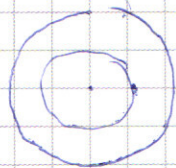
2 решения, если $R = 2$

При $a = 4$,

$$\text{При } a = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$



Ответ: 4, 100.

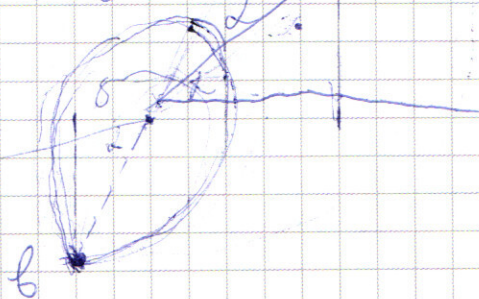


NS

$$r_1^2 + (r_1 + r_2)^2 - 2r_1(r_1 + r_2) \cos \alpha$$

$\alpha = 0$, наименьшее

$$6\sqrt{2} = (x_m - x_b)^2 + (y_m - y_b)^2$$



$$2\sqrt{4 + 4.7}$$

$$2\sqrt{1 + 7} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{1 + 2} = 6\sqrt{3}$$

$$10\sqrt{2}$$

Ответ: $6\sqrt{2}$

$$6\sqrt{2} =$$

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 10\sqrt{2}$$

$$2\pi \cdot 4\sqrt{2}$$

$$2\pi \cdot 20\sqrt{2} \cdot 3 \text{ оборотов.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(1 + 49 \frac{q^2}{q^2 + q + 1}\right) = 10$$

$$49 \frac{q^2}{q^2 + q + 1} = 9$$

$$49q^2 = 9q^2 + 9q + 9$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 40 \cdot 9 = 81 + 160 \cdot 9 = 1440 + 81 = 1521$$

$$507.3 = 189 \cdot 3^2 = (13.3)^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = -\frac{1}{2} \quad \bigg| \quad \frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{6(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$+ \frac{6(q^n - 1)q}{(q - 1)(q + 1)}$$

$$= \frac{6(q^n - 1)}{q - 1} \left(1 + \frac{q}{q + 1}\right) = 8N$$

$$N = 1 + \frac{q}{q + 1} = 1 + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + 1} = 1 + \frac{3}{5(\frac{3}{5} + 1)} = 1 + \frac{3}{3 + 5}$$

$$= 1 + \frac{3}{8} = \frac{8 + 3}{8} = \frac{11}{8}$$

Ответ: $\frac{11}{8}$ увели.

№3.

$$x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$$

$$D = 4$$

$$x_1 = \frac{-10-2}{2} = -6 \quad x_2 = \frac{-10+2}{2} = -4$$

$$(\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}\sqrt{2})$$

$$\frac{\sqrt{2}x + 2\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (x+6) \quad \times \frac{36}{2+6}$$

$$-6^3 + 4 \cdot 6 \cdot 80 = 36 \cdot -6 + 24 + 80 = 104 - 216 < 0 \Rightarrow$$

$$x = -6 \notin \mathbb{R} \Rightarrow x = -6 \text{ не корень}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x+6) \cdot \sqrt{\dots} = (x+6)(x+4)$$

$$(x+6)(x+4) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\dots} - (x+4) \right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x+4$$

$$x+4 > 0$$

$$x > -4$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x+4)^2$$

$$x(x^2 - 4) + 80 = 2(x+4)^2$$

$$x(x-2)(x+2) = 2($$

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 20x - 2x^2 + 48 = 0$$

$$-32 - 2 \cdot 4 = -8$$

$$27 - 60 - 2 \cdot 9 + 48 =$$

$$= 27 - 18 - 12 = -3$$

$$64 - 80$$

$$-16 - 2 \cdot 16 + 48$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$r^2 = (\cancel{x_m} - x_b)^2 + (y_m - y_b)^2$$

$$\cancel{x_m} = \cos \alpha \cdot R_m$$

$$r^2 = (\cos \alpha_1 \cdot R_m - \cos \alpha_2 \cdot R_b)^2 + (\sin \alpha_1 \cdot R_m - \sin \alpha_2 \cdot R_b)^2$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$$

$$r^2 = (\cos \alpha_1 \cdot R_m - \cos \alpha_2 \cdot R_b)^2 + (\sin \alpha_1 \cdot R_m - \sin \alpha_2 \cdot R_b)^2$$

$$r^2 = \cos^2 \alpha_1 \cdot R_m^2 + \cos^2 \alpha_2 \cdot R_b^2 - 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 R_m R_b + \sin^2 \alpha_1 \cdot R_m^2 + \sin^2 \alpha_2 \cdot R_b^2 - 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 R_m R_b$$

$$r^2 = R_m^2 + R_b^2 - 2 R_m R_b \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - 2 R_m R_b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$$

$$r^2 = R_m^2 + R_b^2 - 2 R_m R_b (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2)$$

$$r^2 = 32 + 200 - 160 (\cos(\alpha_1 - \alpha_2))$$

$$r^2 - 160 = -160 \cos \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\cos \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 = +\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

$$5; 5\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} =$$