МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра(
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S. Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4\geqslant 0$.

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0\left(-2;-2\sqrt{7}\right)$ и $N_0\left(5;5\sqrt{7}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC=6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}|y-6-x|+|y-6+x|=12,\\(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Произв. 8-и цифр восьмизначного числа $= 700 = 7\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$. Среди цифр нет нулей (иначе произв. было бы $=0$), значит 3 цифры восьмизначного числа - это „5", „5" и „7", т.к. это единств. из 9-и оставшихся цифр (от 1 до 9), которые соотв. :5, :5 и :7. Оставшиеся 5 цифр в произведении должны давать $4=2\cdot2$, и это можно сделать лишь 2-мя способами: „4" и „1" - 4 раза, либо „2" - 2 раза, „1" - 3 раза, $\Rightarrow$ ① Набор цифр „7", „4", „5"×2, „1"×4
② Набор цифр „7", „2"×2, „5"×2, „1"×3

Для обоих наборов цифр посчитаем количество соответствующих ему 8-значных чисел: ①: $\underbrace{8}_{7}\cdot\underbrace{7}_{4}\cdot\underbrace{\frac{6\cdot5}{2}}_{5\times2}\cdot\underbrace{\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4!}}_{1\times4} = 56\cdot15 = 840$; ②: $\underbrace{8}_{7}\cdot\underbrace{\frac{7\cdot6}{2}}_{5\times2}\cdot\underbrace{\frac{5\cdot4}{2}}_{2\times2}\cdot\underbrace{\frac{3\cdot2\cdot1}{3!}}_{1\times3} = 8\cdot21\cdot10 = 1680$, $\Rightarrow$ всего искомых 8-значн. чисел будет $840+1680=2520$ (т.к. $\forall$-е из цифр наборов ① и ② подходит и ни одно число не входит в оба набора, т.к. имеет 1 определённый набор цифр, а в ① и ② он разный).

Кол-во вариантов постановки (①): „7", „4", „5"×2, „1"×4; кол-во вар. пост. (②): „7", „5"×2, „2"×2, „1"×3

$\boxed{\text{Ответ: } 2520}$.

№2

Сумма n первых членов геометрич. прогрессии ~~и~~ $\{a_n\}$: $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, ~~не является~~ Пусть для геом. прогр. $\{b_n\}$: $\frac{b_{k+1}}{b_k}=t$, но тогда если взять только каждый 3-й член последовательности $\{b_n\}$, то получится опять же геометрич. прогрессия $\{c_n\}$: $c_n = b_{3n}$, т.к. $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{3n+3}}{b_{3n}} = t^3 = const$. Значит, сумма $b_1, b_2, \dots b_{3000}$:

$S = S_{3000} = \frac{b_1(t^{3000}-1)}{t-1}$, а сумма $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ - это то же, что сумма $c_1, c_2, \dots c_{1000}$

$S_{c_{1000}} = \frac{c_1\cdot((t^3)^{1000}-1)}{t^3-1} = \frac{b_1\cdot t^2\cdot(t^{3000}-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{b_1\cdot(t^{3000}-1)}{t-1}\cdot\frac{t^2}{t^2+t+1} = S_{b_{3000}}\cdot\frac{t^2}{t^2+t+1}$. Увеличить каждый 3-й член посл. $\{b_n\}$ в 50 раз увеличит сумму на 49 значений ~~и~~ суммы этих увеличенных чл. посл. $(b_3, b_6, \ldots b_{3000})$;

$\Rightarrow 10S = b_1+b_2+50b_3+b_4+b_5+50b_6+\ldots+b_{2999}+50b_{3000} = (b_1+b_2+\ldots+b_{3000})+49(b_3+b_6+\ldots+b_{3000}) = S_{b_{3000}}+49S_{c_{1000}} = S+S\cdot\frac{t^2}{t^2+t+1}\cdot 49$, $\Rightarrow 9S = S\cdot\frac{49t^2}{t^2+t+1}\ \Big|\cdot(t^2+t+1)\cdot\frac{1}{S}$ (>0, т.к. $t>0$ и $S>0$ (кажд. член прог. $\{b_n\}>0$ по усл.), $\Rightarrow 9t^2+9t+9=49t^2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 40t^2-9t-9=0$, $\Rightarrow D = 9^2+9\cdot160=(39)^2>0$, $\Rightarrow t_{1,2}=\frac{9\pm39}{80}$, $\Rightarrow$ (т.к. $t>0$) $t=\frac{48}{80}=0{,}6$.

Теперь рассмотрим геом прогр. $\{f_n\}$: $f_n=b_{2n}$ ($\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{b_{2n+2}}{b_{2n}}=t^2=const$), сумма 1-ых 1500 членов $S_{f_{1500}}=\frac{f_1\cdot((t^2)^{1500}-1)}{t^2-1}=\frac{b_1\cdot(t^{3000}-1)}{(t-1)}\cdot\frac{t}{t+1}=S\cdot\frac{t}{t+1}$, $\Rightarrow$ новая 3-я сумма $S_{нов.}=b_1+2b_2+b_3+2b_4+\ldots+b_{2999}+2b_{3000}=(b_1+b_2+\ldots+b_{3000})+(b_2+b_4+\ldots+b_{3000}) = S_{b_{3000}}+S_{f_{1500}} = S+S\cdot\frac{t}{t+1}=S\cdot(1+\frac{0{,}6}{1{,}6})$, $\Rightarrow$ сумма увеличилась в $\frac{S_{нов.}}{S}=\frac{11}{8}$ раз.

$\boxed{\text{Ответ: сумма } S \text{ увеличится в } \frac{11}{8} \text{ раз}}$.

№3

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x+6)\cdot\sqrt{x^3-4x+80}=(x+6)(x+4)$, $\Leftrightarrow (x+6)\left(\sqrt{\frac{x^3}{2}-2x+40}-x-4\right)=0$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ \sqrt{\frac{x^3}{2}-2x+40}=x+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ \begin{cases} (x+4)^2=\frac{x^3}{2}-2x+40\ |\cdot2 \\ x+4\geq0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ \begin{cases} x^3-2x^2-20x+48=0, \Leftrightarrow (x-4)(x^2+2x-12)=0 \\ x\geq-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

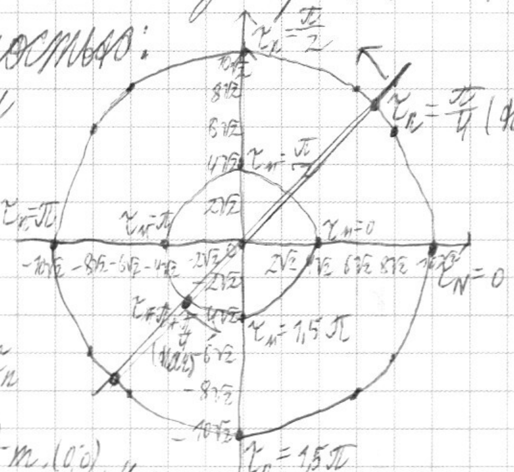
(Для $x^2+2x-12=0$: $D=4+48=(2\sqrt{13})^2>0$, $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{2}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ \begin{cases} x\geq-4 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{13} \\ x=-1+\sqrt{13} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$. Заметим, что $-1-\sqrt{13}<-1-\sqrt{9}$, $\Rightarrow <-4$, $\Rightarrow x=-1-\sqrt{13}$ не подходит, а $-1+\sqrt{13}>0>-4$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow x=-1+\sqrt{13}$ подходит, $\Rightarrow$ изначальное уравнение равносильно системе $\left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-1+\sqrt{13} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Ответ: $x\in\{-6; -1+\sqrt{13}\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

Найдём радиусы окружностей для водомерки ($R_1 = OM_0 = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt7)^2} = \sqrt{4+28} = 4\sqrt2$) и для жука ($R_2 = ON_0 = \sqrt{5^2+(5\sqrt7)^2} = \sqrt{25+25\cdot7} = 10\sqrt2$). Заметим также, что начальные положения водомерки $(-2;-2\sqrt7)$ и жука $(5;5\sqrt7)$ лежат на прямой $y = x\cdot\sqrt7$, которая проходит через точку $(0;0)$ (т.к. $-2\sqrt7 = -2\cdot\sqrt7$; $5\sqrt7 = 5\cdot\sqrt7$ и $0 = 0\cdot\sqrt7$). Тогда введём новое обозначение: τ_M — координата водомерки, а τ_N — жука, по аналогии с числовой окружностью:



Поставим каждой точке окружности $\omega_1(O, OM_0)$ и $\omega_2(O; ON_0)$ по одинаковому правилу в соответствие значение τ_M и τ_N соотв., где A — точка $(1;0)$, O — т. $(0;0)$, и L — точка на одной из 2-х окружностей, ⇒ знач. $\tau_{N или M}$ для L равно радианной мере $\angle LOA$ (для точки на полож. полуоси x: $\tau_{N или M} = 0$). А теперь мы можем видеть, что минимальное возможное расстояние между водомеркой и жуком, когда они ~~лежат~~ находятся на 1-й полупрямой из точки O (когда расстояние между ними $= R_2 - R_1 = 6\sqrt2$. Пусть это не так, тогда $FG < R_2 - R_1$ ($G \in \omega_1$; $F \in \omega_2$), тогда рассмотрим 3 точки F, G, O, в котором (по обобщ. нерав. Δ-а) $FG + GO \geq FO$, ⇒ $FG + R_1 \geq R_2$ (т.к. $G \in \omega_1$; $F \in \omega_2$) ⇒ $FG \geq R_2 - R_1$ — противоречие), ⇒ мин. расст. будет между точками, имеющими равные

$\tau_м$ и $\tau_к$. Оба насекомых движутся в одном направлении, и водомерка имеет угловую скорость $w_1 = \frac{(2\vartheta_x)}{R_1}$, а жук – $w_2 = \frac{\vartheta_x}{R_2}$, ⇒ Отношение их угловых скоростей $\frac{w_1}{w_2} = \frac{2R_2}{R_1} = 5$, ⇒

⇒ значение $\tau_к$ изменяется на $\Delta\tau$, значение $\tau_м$ изменяется ~~тогда~~ на $5\Delta\tau$ с тем же знаком, ⇒ в любой момент времени $\tau_м = \pi + \frac{\pi}{4} + 5\Delta\tau$; $\tau_к = \pi - \frac{\pi}{4} + \Delta\tau$ (при этом значения τ, отличающиеся друг от друга на 2π, можно считать равными, т.к. при завершении полного круга насекомые тут же начинают новый). Также заметим, что при перемещении жука на $\Delta\tau = 2\pi$, водомерка переместится на $5\Delta\tau = 5 \cdot (2\pi)$. Оба перемещ. $\vdots 2\pi$, ⇒ оба насекомых находятся в начальных положениях. За это время перемещения водомерка прошла 5 полных кругов, а жук – лишь 1, ⇒ „встречались" они (ситуация нахождения на минимальном расстоянии, соответствующая равенству $\tau_м$ и $\tau_к$) ~~4~~ 4 раза в 4 разных точках (т.к. жук в каждой точке был лишь по 1-му разу за это время) (Начнём смотреть с того, что когда водомерка пройдёт $\frac{1}{2}$ круга она ни разу не „встретит" жука, пройдя после этого ещё 4 круга на каждом будет соотв. по 1-й встрече (т.к. жук за это время не пройдёт полный круг) и последние пол круга от $\frac{\pi}{4}$ до $\pi + \frac{\pi}{4}$ водомерка пройдёт без встречи жука, т.к. тот в это время проходил от $2\pi - \frac{2}{5}\pi$ до ~~[illegible]~~ $\frac{\pi}{4}$, а $(\frac{\pi}{4}; \pi + \frac{\pi}{4}) \cap ((2\pi - \frac{2}{5}\pi; 2\pi) \cup [0; \frac{\pi}{4}))$ (перв. и посл. точки не учит., т.к. в них точно не было встречи.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

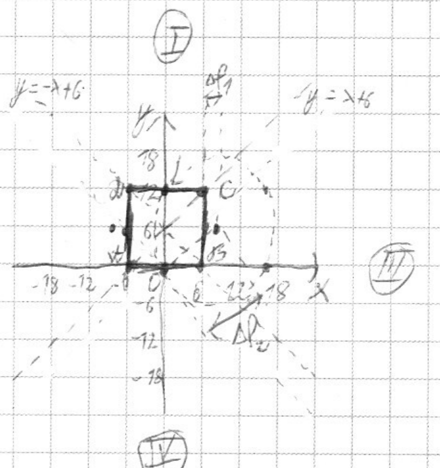
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итак прохождение 2π жуком приводит к возвр. обоих в начальное положение, $\Rightarrow$ следующие 2π и последующие будут проходить одинаково, также, как первые 2π, и „встречи" с водомеркой будут всё в тех же 4-х точках, $\Rightarrow$ искомых положений жука с кратчайшим расстоянием всего 4, ~~[illegible]~~ значение τ 1-й такой встречи – это $\tau_1 = \frac{\pi}{2}$, т.к. от $\pi + \frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ нужно $5\Delta\tau_1 = \frac{5\pi}{4}$, а от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$: $\Delta\tau_1 = \frac{\pi}{4}$. Далее, после прохождения жуком $\frac{\pi}{2}$, водомерка проходит $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow$ перемещается на те же $\frac{\pi}{2}$ и вновь „встречается" с жуком, $\Rightarrow$ следующие „места встречи" имеют $\tau_2 = \pi$, $\tau_3 = 1{,}5\pi$ и $\tau_4 = 0$ (или 2π), $\Rightarrow$ соответствующие им координаты положения жука $(\pm 10\sqrt{2}; 0)$ и $(0; \pm 10\sqrt{2})$.

Ответ: $(10\sqrt{2}; 0)$, $(-10\sqrt{2}; 0)$, $(0; 10\sqrt{2})$, $(0; -10\sqrt{2})$.

№ 4



1) Построим график $|y-6-x|+|y-6+x| = 12$:

I) $\begin{cases} y \geq x+6 \\ y \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow 2y - 12 = 12, \Rightarrow y = 12$

II) $\begin{cases} y \geq x+6 \\ y < -x+6 \end{cases} \Rightarrow y-6-x-y+6-x = 12, \Rightarrow x = -6$

III) $\begin{cases} y < x+6 \\ y \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow x = 6$; IV) $\begin{cases} y < x+6 \\ y < -x+6 \end{cases} \Rightarrow y = 0$. Значит, график – квадрат, у которого точка O – середина стороны AB.

2) теперь заметим, что график $(|x|-8)^2+(|y|-6)^2=a$ симметричен относительно осей OX и OY (т.к. x и y под знаками модуля) при $a\geq 0$ (т.к. если $a<0$, то 2-е ур-е не имеет реш. ($a<0$ и $(|x|-8)^2+(|y|-6)^2\geq 0$), ⇒ и система не имеет решений). Посмотрим часть графика в 1-й четверти (при $x\geq 0$ и $y\geq 0$): $|x|=x$; $|y|=y$, тогда получаем уравнение окружности $(x-8)^2+$ $+(y-6)^2=a$ с центром в точке (8;6) и радиусом $R=\sqrt{a}$.

Рассмотрим кол-во точек пересечения этой окружности с нашим квадратом, лежащим в 1-й ~~четв~~ четверти (при $x\geq 0$ и ~~y~~). Ⓘ Если $R<\Delta l_1$, то окружность не пересекает □-ни в 1-й точке. Ⓘⓘ Если $R=\Delta l_1$, то окружн. касается стороны □-а в 1-й точке. Ⓘⓘⓘ Если $\Delta l_1<R<\Delta l_2$ (где Δl_2 – расст. от (8;6) до (0;0), то есть $\sqrt{8^2+6^2}=10$; $\Delta l_2=10$ (и $\Delta l_1=2$, т.к. ст. □-а горизонтальна, ⇒ ⇒ радиус касающейся её окружности горизонтален и равен $x_{центр.окр.}-x_{вс}=8-6=2$)) то окружность пересекает □ в 2-х точках, у обоих из которых $x>0$. Ⓘⓥ Если $R=\Delta l_2$, то окружн. пересек. □ в 2-х точках: (0;0) и (0;12). Ⓥ Наконец, если $R>\Delta l_2$, то ни одной общей точки у $\omega((8;6);R)$ с нашим □ в I-й четверти не будет. Теперь рассмотрим эти варианты окончательно: Ⓘ в I ч. нет точек пересеч., ⇒ ⇒ их нет и во II-й четверти (симметрия относ. OY обоих графиков), а в III и IV четв.* вообще ни в 1-м из случаев нет точек пересечения, т.к. в них нет ни 1-й точки □-а (*здесь стоит уточнить, что полуоси мы включим в определённые четверти таким образом:

I) $x\geq 0$, $y\geq 0$ (т. начала и 2-е полож. полуоси включены);

II) $x<0$, $y\geq 0$ (отриц. полуось OX включ.); III) $x<0$; $y<0$; IV) $x<0$, $y\geq 0$ (отриц. полуось OY включ.).

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

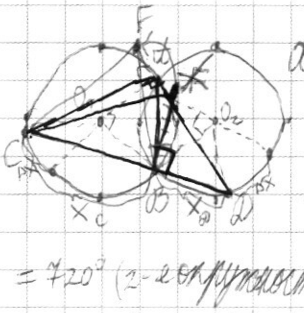
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow$ в сл. I 0 точек пересеч. графиков, а по усл. их должно быть 2-е (т.к. 1-а точка пересеч. соотв. 1-му решению системы, а их (по условию) 2). В сл. VI аналогичная ситуация из симметрии отн. OY во II-й четв., как и в I-й, 0 т. пересеч. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (в III и IV нет) всего $0 \neq 2$, $\Rightarrow$ не подходит. В сл. III в 1-й четверти 2 решения. У обоих $x > 0$, $\Rightarrow$ (из симметрии 2-х фигур отн. OY) есть 2 решения во II четверти, у каждого $x < 0$, $\Rightarrow$ решений > 2, $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не подходит.

Наконец, в 2-х оставшихся случаях: II: $R = 2$ и IV: $R = 10$, будет ровно по 2-е точки пересечения (в II: 2-е точки касания окружностей $w((8;6);2)$ и $w((-8;6);2)$ соотв. сторон BC и AD $\square$-а (точки $(6;6)$ и $(-6;6)$) (в I и II четв. по 1-й т. пересеч. графиков, в III и IV - 0);
в IV: 2-е точки $(0;0)$ и $(0;12)$, лежащие в I четв.*, но не имеющие симметр. пару во II-й четв., $\Rightarrow$ (в I четв. 2 т. пер. гр., во II, III и IV - нет)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} R = 10 \\ R = 2 \\ R = \sqrt{a}, \Rightarrow a = R^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 100 \\ a = 4 \end{array}\right.$. Ответ: $a \in \{4; 100\}$.

№6



а) 1) $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 90° = \frac{x_c + x_D}{2}$ (впис. $\angle$-ы, опир. на дуги CB и BD ($\smile CB = x_c$; $\smile BD = x_D$)), $\Rightarrow x_c + x_D = 180°$

2) $\angle CBA + \angle ABD = 180° = \frac{\smile CA}{2} + \frac{\smile AD}{2}$, $\Rightarrow \smile CA + \smile AD = 360° =$
$= 720°$ (2-е окружности) $- x_c - x_D - 2\smile AB$ (дуги AB 2-х окружностей равны из симметрии окружностей относ. прям. AB, т.к. радиусы этих 2-х окружностей $= -$ы C) $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\smile AB = 720° - 360° - 180°$ $\Rightarrow \smile AB = 90°$ $\Rightarrow$ (из $\triangle AO_1B$): $O_1A = O_1B = R = 5$; $\angle AO_1B = \smile AB$ (центр. $\angle$) $= 90°$, $\Rightarrow$ (по Th Пифаг.) $AB = \sqrt{O_1A^2 + O_1B^2} = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.!

Дано:
$R = 5$
$\angle CAD = 90°$
$BF \perp CD$
$BF = BD$

Найти
$CF - ?$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

3) ~~Из~~ $\angle tCD = \angle tCB = \frac{\vee tB}{2} = \angle tDB = \angle tDC$, $\Rightarrow$ в $\triangle$-е CtD:

$\angle tCD = \angle tDC$ ($= 45°$, т.к. $\angle CtD = 90°$ по усл.), ~~т.к. $\triangle tD$ ... равные ... хорды (стягивают равные дуги)~~ $\Rightarrow$

~~$\angle tC = \vee tD$ ... $+90° = \vee + 90°$ ... $\vee_C = \vee_D$ ... $360° - \vee tD$ ... $+\vee_C = 360° - (90° + \vee_D)$~~ по заметим: $FB = BD$ и $\angle FBD = 90°$ (по усл.), $\Rightarrow \triangle FBD$ — равноб. с основ. FD, $\Rightarrow$ (из Σ-ы $\angle$-ов $\triangle$-а) $\angle FDB = 45°$, $\Rightarrow \angle FDC = 45° = \angle tDC$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (т.к. от луча в 1-у полуплоскость (по усл. t и $F \in$ 1-й $\frac{1}{2}$-плоск. отр. DC) можно отложить лишь 1 $\angle = 45°$), $\Rightarrow$ т. $F \in tD$, $\Rightarrow$

4) Из $\triangle FtC$ ($\angle FtC = \angle DtC = 90°$): $FC^2 = \underline{tC^2 + tF^2} =$ (из $\triangle CBF$ ($\angle CBF = 90°$ по усл.))

$= CB^2 + BF^2 = CB^2 + \frac{FD^2}{2}$ (из $\triangle DBF$) $=$ (из $\triangle CtD$, т.к. $\angle tCD = \angle tDC = 45°$, из ...) $=$

$= \underline{tD^2 + tF^2}$, $\Rightarrow$ ($BD = x = FB$, $\Rightarrow FD = x\sqrt{2}$; $tF = y$, $\Rightarrow tC = tD = y + x\sqrt{2}$, $\Rightarrow CD =$

$= tD\sqrt{2} = 2x + y\sqrt{2} = CB + BD = x + CB$, $\Rightarrow CB = x + y\sqrt{2}$), $\Rightarrow FC^2 = (y + x\sqrt{2})^2 + y^2 =$

$= (x + y\sqrt{2})^2 + \frac{(x\sqrt{2})^2}{2}$, $\Rightarrow$ $FC^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2xy\sqrt{2}$, где (из $\triangle tDB$ по Th cos-ов) $tB^2 = tD^2 + DB^2 - 2\,tD \cdot DB \cdot \cos 45° = (y + x\sqrt{2})^2 + x^2 - \sqrt{2}(x)(y + x\sqrt{2}) =$

$= y^2 + 2x^2 + 2yx\sqrt{2} + x^2 - 2x^2 - xy\sqrt{2} = x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} = \frac{FC^2}{2}$, $\Rightarrow FC = tB\sqrt{2} = \boxed{10}$.

б) Теперь мы ещё знаем, что $BC = x + y\sqrt{2} = 6$, $\Rightarrow S_{\triangle tCF} =$ (т.к. $\angle CtF = 90°$) $= \frac{Ct \cdot tF}{2} = \frac{(y + x\sqrt{2}) \cdot y}{2}$, при этом $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} = 50 \\ x + y\sqrt{2} = 6 \end{cases}$ $\Rightarrow (6 + y\sqrt{2})^2 + y^2 + y\sqrt{2}(6 + y\sqrt{2}) = 50$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 36 + 12\sqrt{2}y + 2y^2 + y^2 + 6y\sqrt{2} + 2y^2 = 50$, $\Rightarrow y^2 + 6\sqrt{2}y - 14 = 0$, ~~$D = \ldots$~~

~~$\ldots \Rightarrow y_{1,2} = \frac{6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2}$, $\Rightarrow$ (т.к. $y > 0$) $y = \ldots - \sqrt{2}$ (полученный результат лишь означает, что точка F на луче лежит за точкой t, а не перед, в остальном всё сохраняется) ($y = 7\sqrt{2}$ не подх., т.к. в этом случае $x = 6 - y\sqrt{2} = -8 = BF$, что уже быть не может). Итак, $x = 6 - y\sqrt{2} = 8$, $\Rightarrow \frac{Ct \cdot tF}{2} = \frac{(8\sqrt{2} + \sqrt{2})\sqrt{2}}{2}$~~

~~$\ldots = 648 + 280 = 928 = 4 \cdot 232 = 16 \cdot 58 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-12\sqrt{2} \pm 4\sqrt{58}}{10}$, т.к. $y > 0$, $\Rightarrow$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= (6\sqrt{2})^2 + 4\cdot 14 = 128 = (8\sqrt{2})^2 > 0, \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow$

$\Rightarrow (y > 0)\ y = \sqrt{2}, \Rightarrow x = 8,^{*} \Rightarrow S_{\triangle ECF} = \frac{y\cdot(x\sqrt{2} - y)}{2} =$

$= \frac{\sqrt{2}\cdot(8\sqrt{2} - \sqrt{2})}{2} = \boxed{7}$. **Ответ: а) $FC = 10$; б) $S_{\triangle ECF} = 7$.**

---

* То, что у нас получились оба $(x и y) > 0$ значит, что мы правильно выбрали расположение точки F на луче DE (за точкой E). Случай, когда $F \in ED$ неверен, т.к. при нём $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} = 50 \\ x + y\sqrt{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 6\sqrt{2}y - 14 = 0, \Rightarrow y_{1,2} = \frac{6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{2} \\ \begin{cases} y = 7\sqrt{2} \\ x = -8 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка F на отрезке ED лежать не может.

(При этом заметим, что и в случае $F \in ED$ равенство из (а) ($FC = EB\sqrt{2}$) выполняется, т.к. $EC = ED = y + x\sqrt{2}$; $CD = 2x + y\sqrt{2}$; $CB =$ $= x + y\sqrt{2}, \Rightarrow FC^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2xy\sqrt{2}$ и $EB^2 = x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} = \frac{FC^2}{2}, \Rightarrow FC = EB\sqrt{2} = 10$ — верно для любого расположения точки F на DE.