

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в Γ
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ у нас произведение цифр
т.к. это цифровое значение числа мы
рассматриваем только натуральные числа
если мы домножим $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ на любое
число кроме 1 то $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot k_1 k_2 \neq 4900$ $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow k_1 k_2 = 1$ $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 1^2 = 4900$

мы можем считать восьми-значное чис-
ло из $2 \cdot 2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1$ способами
однако заметим, если мы умножим 2 на 2
то получится тоже цифра 4 . (умножить на
 1 имеет смысл т.к. мы получаем то же число,
а $2 \cdot 5 = 10$ - 2 знака, $2 \cdot 7 = 14$ - 2 знака $5 \cdot 5 = 25$ - 2 знака
аналогично с $5 \cdot 7$, $7 \cdot 7$) $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$ так же
даёт 4900 кол-во способов составить 8-ми знач-
ное число из этих цифр $= \frac{8!}{3!2!2!}$
всего кол-во способов $= \frac{8!}{2!4!} + \frac{8!}{24} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{24} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{24}$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 (3 + 2) = 7 \cdot 6 \cdot 100 = 4200$$

Ответ: 4200

№2

Если мы увеличим каждую 3-ий член
последовательности, то сумма будет =

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} + 39(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000})$$

поправкой $(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000})$ / сумма чисел последовательности $\times 5$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000} + 39(b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{3000}) = 5(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000})$$

$$39(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = 4(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{3000})$$

$$4b_1 + 4b_2 + 4b_3 - 39b_3 - 4b_4 - 4b_5 - 4b_6 - 39b_6 + \dots + 4b_{2998} - 4b_{2999} + 4b_{3000} - 39b_{3000} = 0$$

$\Rightarrow$ п.р. последовательность геометрическая, $b_n = a_n \cdot x \cdot a^{n-1}$.

$$4x + 4x \cdot a - 35xa^2 + a^2(4x + 4xa - 35xa^2) + \dots + a^{2998}(4x + 4xa - 35xa^2) = 0$$

$$(4x + 4xa - 35xa^2)(1 + a^3 + a^6 + \dots + a^{2997})$$

$$4x + 4xa - 35xa^2 = 0$$

$$4 + 4a - 35a^2 = 0$$

$$D = 4 + 140 = 144$$

$$a = \frac{-2 \pm 12}{-35} =$$

$$a_1, a_2 = \frac{2}{5} \in (X)$$

$$a_2 = -\frac{2}{7} \notin (X)$$

$$a = \frac{2}{5}$$

≥ 0 п.р. по условию
множеств членов прогрессии
 $< 0 \Rightarrow a > 0$ (*)

заменим второй условие так же как и первое

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{3000} + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = (b_1 + b_2 + \dots + b_{3000})$$

$$(k-1)b_1 + (k-1)b_2 + \dots + (k-1)b_{3000} = 2b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}$$

$$(k-1)b_1 + (k-1)b_2 - 2b_2 + (k-1)b_{2998} + (k-1)b_{3000} - 2b_{3000} = 0$$

$$k_2 (k-1)b_1 + (k-3)b_2 + (k-1)b_3 + (k-3)b_4 + \dots + (k-1)b_{2998} + (k-3)b_{3000} = 0$$

$$(k-1)x + (k-3)ax + a^2((k-1)x + (k-3)ax) + \dots + a^{2998}((k-1)x + (k-3)ax) = 0$$

$$((k-1)x + (k-3)ax)(1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2998}) = 0$$

$\Rightarrow 0 \in (X)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(k-1)x + (k-3)ax = 0$$

$$k-1 + (k-3) \cdot \frac{2}{5} = 0$$

$$R + \frac{2}{5}R = \frac{11}{5}$$

$$\frac{14}{5} R = \frac{11}{5}$$

$$k = \frac{11}{7}$$

Omber: $6\frac{11}{7}$ raz.

✓ 3.

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{x^2 - 64x + 200} = x^2 - 64x - 40$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}}, \sqrt{x^2-64} = (x+10)(x-4)$$

поделить обе части на $x+10$ ~~то~~ ~~т.к. при~~

$$x = -10 \quad x^3 - 64x + 200 = -1000 + 640 + 200 = -160 < 0$$

Взбл $\chi = -10$ - не корректно.

$$\frac{\sqrt{x^3 - 64x + 70}}{2\sqrt{2}} \quad x = 6.$$

$$\begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8x^2 - 64x + 128 \\ x \geq 4. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 72 \\ x \geq 4 \quad (*) \end{cases}$$

~~$$\text{RPM } x=4 \quad x^3 \text{ } x^2 \quad yz = 64 - 64 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 8$$~~

~~Найдём производную от функции $x^3 - 8x^2 + 7x$~~

$$3x^2 - 16x - 7(3x - 16) \quad \text{заметим, что}$$

-корень $x^2 - 8x + 7$

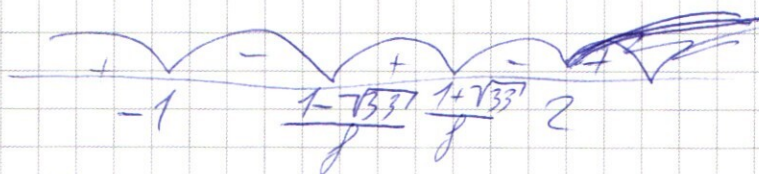
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 3x^2 - 3x - 2 & x+1 \\ \underline{4x^3 + 4x^2} & 4x^2 - x - 2 \\ \underline{-x^2 - 3x} & \\ \underline{-x^2 - x} & -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} & 0 \end{array}$$

$$9 (4x^2 - x - 2)(x+1)(x-2) \geq 0$$

$$D = 1 + 32$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$



если $x < -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 10x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

производная от $4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 =$
 $= 16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$

производная от $16x^3 + 15x^2 + 22x + 4 = 48x^2 + 30x + 22$

$D_1 = 225 - 22 \cdot 48 < 0 \Rightarrow$ корней у $48x^2 + 30x + 22$ нет

$\Rightarrow$ ф-ция $16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$ ^{применяя} достаточно возрастает и имеет такой вид:

вершина ф-ции $48x^2 + 30x + 22 = -\frac{b}{2a} = -\frac{15}{48} \Rightarrow$

этой точки на оси x минимального

растает ф-ция $16x^3 + 15x^2 + 22x + 4$

при $x = -2$ $16x^3 + 15x^2 + 22x + 4 = 128 + 60 - 44 + 4 = -68 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при м.к. p -из φ убывает для всех $\pi \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{2} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$R_{N_0} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 2^2} = 6$$

М.К. & Прищиповичу

$$\frac{dB'}{AB'} = \frac{dt}{dt'}$$

2 л песка = 1 карася (т.к. 2 песка = 2 карася)

первое пересечение Σ с $\partial \Omega$ м.б.к. $\Delta \text{ широк} \sim \Delta \text{Алго}$

первое пересечение $\frac{1}{2} l_{kp} + 5Vt = Vt$

$$\frac{1}{2} 6 \cdot 2\pi = 4l \Rightarrow l = \frac{3}{2} \text{ lrp.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{3}{2}l_{\text{кр}} = \frac{2\pi R}{k} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow R = 8$$

пескоро прямая осьную часть
круга. Это 45°

рассмотрим совмещен
линии $\angle (90^\circ)$

т.к. это круг. то все

$$M(2; -4\sqrt{2})$$

$$MO(1; -4\sqrt{2}; -2)$$

$MO = KO$ т.к. R окр-сти $\Rightarrow$ меди OK - медиана
и биссектриса

$$K = \text{среднее арифметическое } MO \text{ и } K \text{ - медиана}$$

$$\left(\frac{-4\sqrt{2}+2}{2}, \frac{-2-4\sqrt{2}}{2} \right) = (-2\sqrt{2}+1; -1-2\sqrt{2})$$

$\angle OKK = 45^\circ$ т.к. OK - биссектриса.

продлим OK до окр-сти. т.к. это прямая, про-
ходящая через $(0; 0)$ то она имеет вид $Y = X$
мы можем просто умножить K на l'

$$(l'(-2\sqrt{2}+1); l'(-1-2\sqrt{2})),$$

$$\sqrt{l'^2(9-2\sqrt{2}) + l'^2(9+2\sqrt{2})} = \sqrt{l'^2 \cdot 18} = 3l'\sqrt{2} = R = 6 \Rightarrow$$

$$l' = \sqrt{2}$$

итого место первой встречи $(-\sqrt{2}-4; -\sqrt{2}-4)$

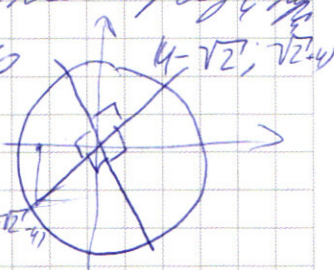
скажем так, второй слог

длина Карась обгоняет пещера и проходит для кр.

$$2\pi R \& 5Vt = Vt$$

$$4Vt = 12\pi$$

$$l = 4\pi \text{ } 3\pi$$

т. е. пещера и карась встречаются через $\frac{1}{4}$ периода по св-ву & круга $\frac{1}{4}$ периода "вторая координата становится первой, первая становится второй" 

вторая встреча: $(-\sqrt{2}-4; 4-\sqrt{2})$

третья ^{встреча} $(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$

четвертая ^{встреча} $(-4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4)$

пятая ^{встреча} будет в том же месте что и первая, шестая ^{встреча} - в том же месте где и вторая и т.д.

ответ: $(4-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2}), (-4+\sqrt{2}; \sqrt{2}-4), (\sqrt{2}-4; -\sqrt{2}-4)$



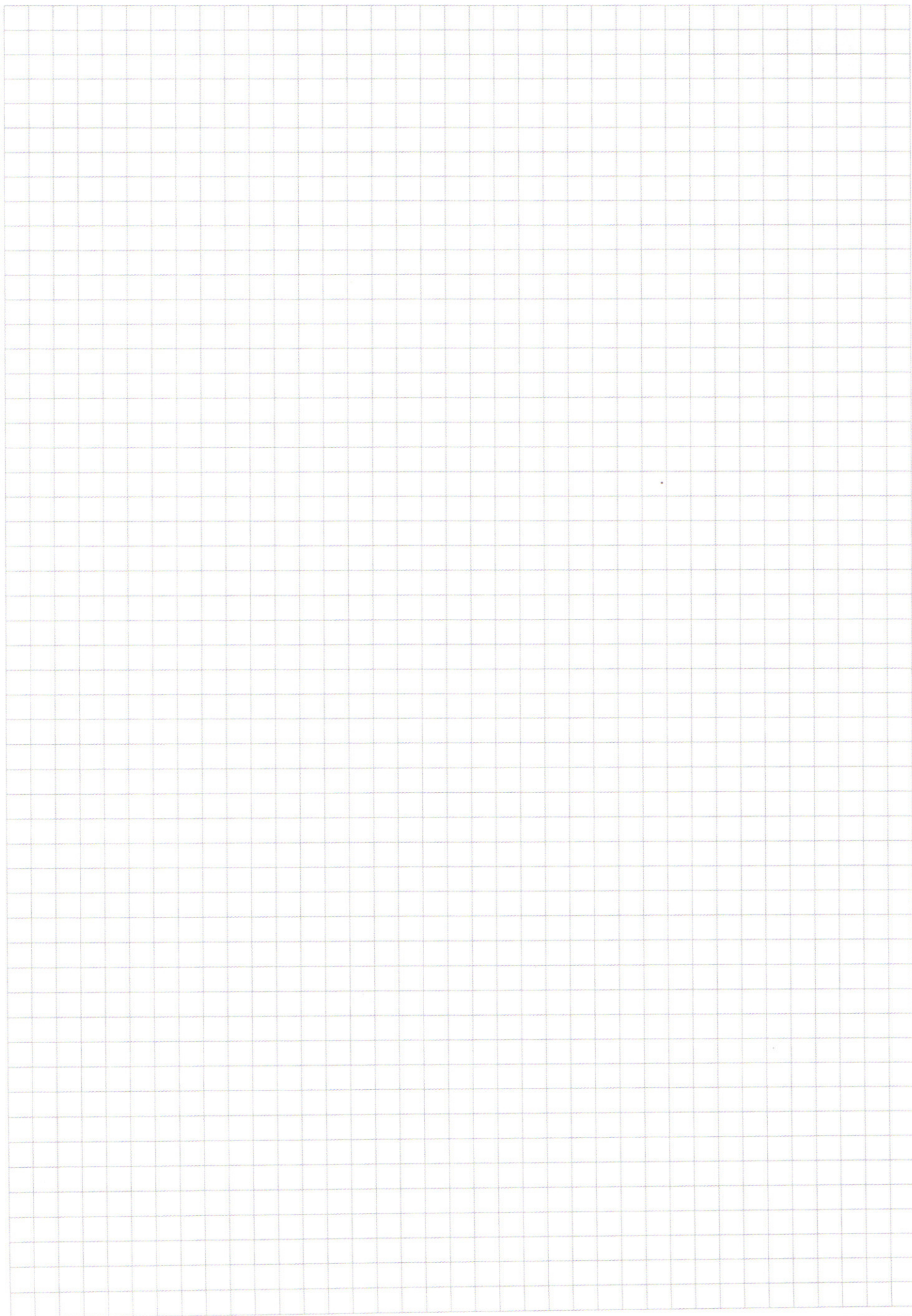
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

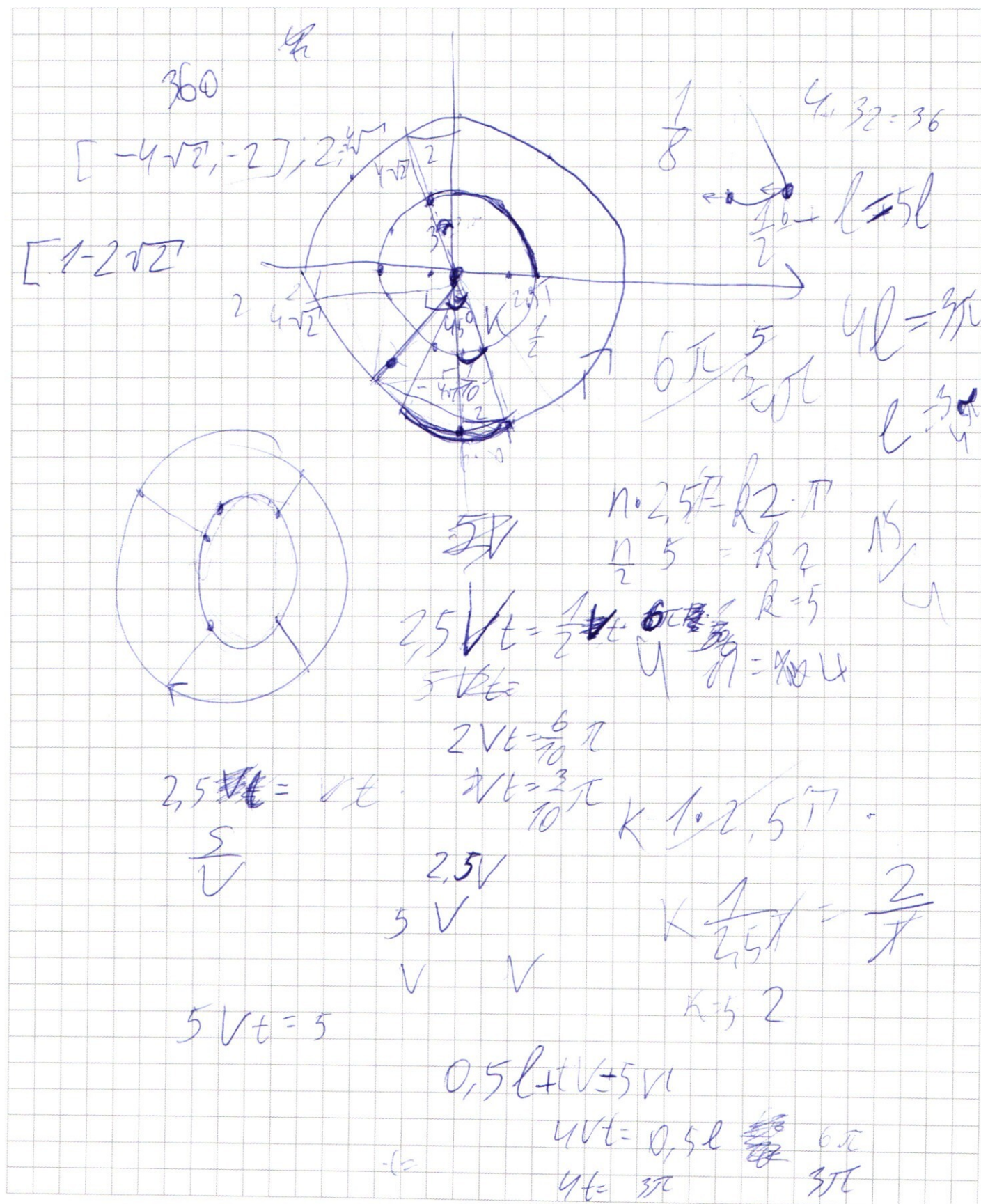
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



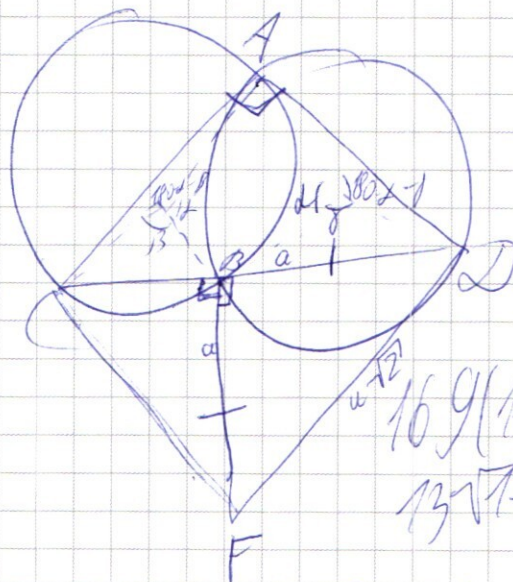
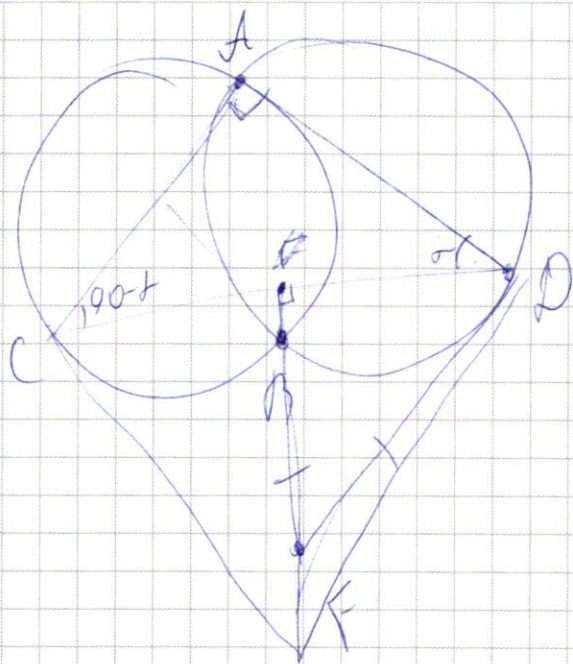
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

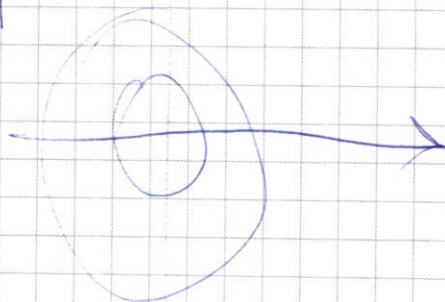
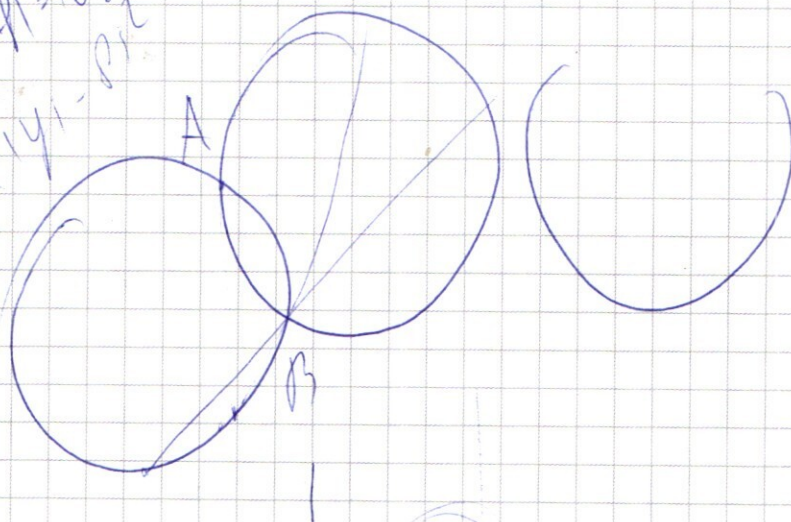


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



169/1
137-1000000

$|x| = 14 - x$
 $|x| = 16 - x$
 $|x| = 15$
 $|x| = 14$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \quad \frac{81}{2!2!2!} = 765 \cdot 43$$

$$45577111$$

$$\frac{81}{3!2!2!} = 875 \cdot 43$$

$$7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 (8+6) = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 14$$

N2

$$40(a^2x + a^5x + a^8x + \dots + a^{2999}x) = 535(a^2x + a^5x + a^8x + \dots + a^{2999}x)$$

$$a^2(a^2x + a^5x + a^8x + \dots + a^{2999}x) = 535(a^2x + a^5x + a^8x + \dots + a^{2999}x)$$

$$P(a^2x + a^5x + \dots + a^{2999}x)$$

$$f(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2999}) = 7(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2999})$$

$$7(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2999}) = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2999}$$

$$40a^2x = 5a^2x + 5a^5x$$

$$35a^2x = 5a^2x + 5x$$

$$7a^2 = a + 1$$

$$2a = n$$

$$7b_3 = b_1 + b_2$$

$$7a^2x = a^2x$$

$$7a^2 = a + 1$$

$$7a^2 - a - 1 = 0$$

$$1 \pm \sqrt{1+28}$$

$$1 - \sqrt{29}$$

$$2a^2x = nx$$

$$\frac{1 - \sqrt{29}}{7} \quad N2$$

$$\frac{15\sqrt{29}}{74} = \frac{1-x}{74} = 1$$

$$\frac{1 - \sqrt{29}}{74}$$

$$\frac{1 + \sqrt{29}}{74}$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40 \quad (x+10)(x-4)$$

$$\frac{x+10}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^3-64x+200} = (x+10)(x-4)$$

$$\frac{x^3}{8} - 8x + \frac{200}{8} = x^2 - 4x + 16$$

$$x^3 - 64x + 200 - 8x^2 + 32x - 128 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 - 32x + 172 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 72$$

$$x^3 - 8x^2 - 32x + 172$$

$$3x^2 - 2x$$

$$x \geq 4$$

$$x^3 - 8x^2 + 72$$

$$\frac{2}{3}$$

$$36x - 2$$

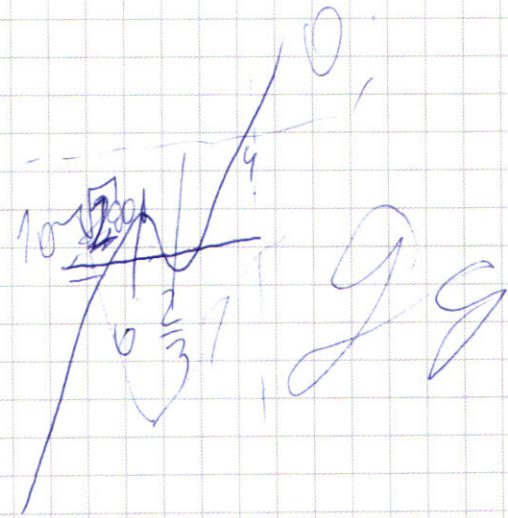
$$36x - 2$$

$$36x - 2$$

$$36x - 2$$

$$3x^2 - 2x - 56$$

$$36x - 2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4x^4 + 4x - 5x^3 - 9x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4$$

$$x \geq -2$$

$$64 - 36 - 40 + 4 + 4$$

$$76 \neq 0$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \\ 4x^4 - 8x^3 \\ \hline 3x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \\ 3x^3 - 6x^2 - 4x \\ \hline -3x^2 + 6x + 4 \\ -3x^2 + 6x - 2 \\ \hline -4 + 3 + 3 - 2 \end{array}$$

$$-4 + 3 + 3 - 2$$

$$4x^3 - 3x^2 - 3x - 2$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 3x^2 - 3x - 2 \\ 4x^3 - 4x^2 \\ \hline x^2 - 3x - 2 \\ x^2 - x \\ \hline -2x - 2 \\ -2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$32 + 10 = 42$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 3x^2 - 3x - 2 \\ 4x^3 + 4x^2 \\ \hline -7x^2 - 3x - 2 \\ -7x^2 - 7x \\ \hline 4x - 2 \\ 4x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$4x^2 - x - 2$$

$$1 + 32 = 33$$

$$[-2; -1] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$$

$$4x^4 + 11x^3 + 10x^2 - 4x - 4$$

KL-1

$$32x^3 + 33x^2 - 20x + 4$$

$$48x^2 + 66x + 20$$

$$66^2 - 4 \cdot 20 \cdot 48$$

$$480 \cdot 48$$

$$3840$$

$$\begin{array}{r} 66 \\ 66 \\ 396 \\ 396 \\ 356 \end{array}$$

$$28$$

$$24$$

$$26$$

$$196$$

$$52$$

$$116$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ 68 \end{array}$$

$$(228)$$

$$22 - 23 \frac{46}{29}$$

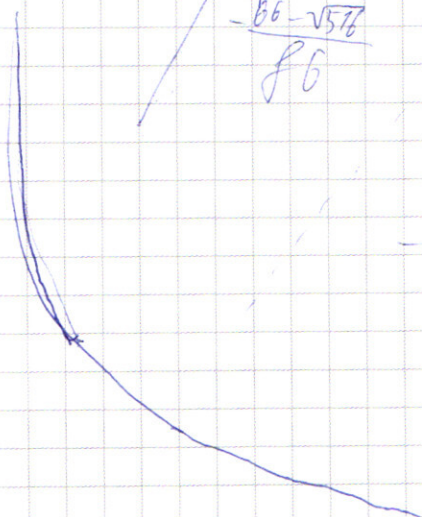
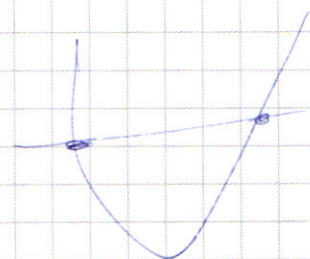
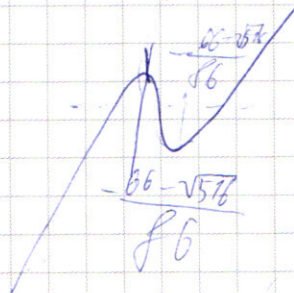
$$8.8 - 11.8 + 40 - 12$$

$$4356 - 3840 = 516$$

$$-24 \quad 3.8 \quad 4$$

$$22.8$$

$$\frac{-66 \pm \sqrt{56}}{86}$$



$$-60 - (483/27 + 4)$$

$$-60 - 15 \cdot 27 + 4$$

$$-40$$