МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S, если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \ldots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}=x^2+6x-40$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$.

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0;0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0\left(-1;2\sqrt{2}\right)$ и $N_0\left(2;-4\sqrt{2}\right)$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF. б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16, \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$. Т.е. среди делителей его цифр (его - числа нужного в задаче) встречаются ровно эти множители.

Цифр, на которые делится 4900: 2, 4, 5, 7, 1.
Значит наше число состоит из них $\Rightarrow$ есть 2 варианта набора цифр из которого сост. наше число: 7, 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1 или 7, 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1.

1 случай: Выбрать цифру на первое место можно 8 вар, на второе - 7 и т.д. Но все случаи мы посчитали по 2^4 раза, меняя одинак. цифры местами. $\Rightarrow$
Отв: $8! : 2^4 = \frac{7!}{2}$

2 случай: Теперь у нас опять 8! расстановок, но теперь мы можем менять местами только 7 и 7, 5 и 5, 1, 1 и 1. Итого: $\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 3!} = 5! \cdot 7 \cdot 4$

Итого: $\frac{7!}{2} + \frac{7! \cdot 2}{3} = 5040 : 2 + 5040 \cdot 2/3 =$
$2520 + 3360 = 5880$

Ответ: 5880.

№2.

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4 \geqslant 0$

Рассмотрим 1 сл.:

$x+2\geqslant 0 \qquad x\geqslant -2.$

$4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4 \geqslant 0$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4=0.$

Подбором находим корни -1 и 2.

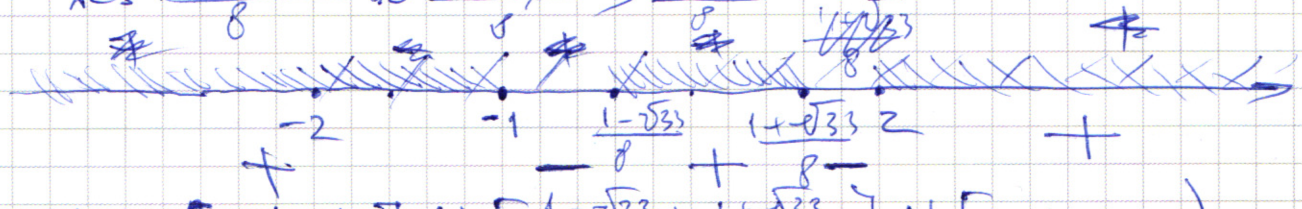
$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4=(x+1)(x-2)(4x^2-x-2)$

$4x^2-x-2=0$

$D=1+32$

$x_1=\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\frac{1+5,5}{8}<\frac{7}{8}$

$x_2=\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\frac{1-5,5}{8}>\frac{\cancel{1}-5}{8}$



$x\in[-2;-1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{33}}{8};\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cup[2;+\infty).$

2 случай:

$x+2<0 \qquad x<-2.$

$4x^4+x^2+4x+5x^3+10x^2+4\geqslant 0.$

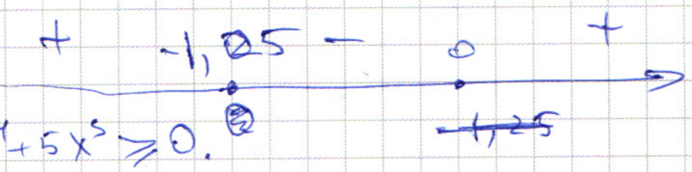
$4x^4+5x^3+12x^2+4x+4\geqslant 0.$

$x<-2 \Rightarrow |x|>2$ Давайте докажем, что это верно при $\forall x$.

~~При $|x|>2$, $4x^4+5x^3\geqslant 0$, т.к. $x^2(4x^2$~~

$4x^4+5x^3=x^3(4x+5)$

$4x^4+5x^3$:



$4x+5=0$

$x=-1,25.$ Т.е.

Т.е. при $x<-2$, $4x^4+5x^3\geqslant 0.$

$12x^2+4x+4=0$

$D = 16 - 16\cdot 12$

$-16\cdot 11 < 0.$

~~Вет~~ Коэф. при $x^2 > 0$, $D<0$ => при любых x

$12x^2+4x+4>0$ =>

$12x^2+4x+4+4x^4+5x^3>0$ при $\forall x \in [-\infty; -2)$

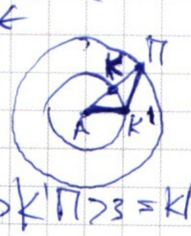
Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2;\infty)$.

№5.

Наши рыбы плавают по окружности с рад. $r_1 = \sqrt{1^2 + 2\sqrt{2}^2} = 3$ и $r_2 = \sqrt{2^2 + 4\sqrt{2}^2} = 6$.

Тогда длины этих окр: 6π и 12π. Рыба плывущая по окр. с рад 6π плывет в в 2,5 раз быстрее. Пусть v_2 – скорость второй => t_2, за которое она проплывет круг: $t_2 = \frac{12\pi}{v_2}$, а у карася: $t_1 = \frac{6\pi}{v_1}$, $v_1 = 2,5\cdot v_2$ => $t_1 = \frac{12\pi}{5v_2}$, т.е. пока пескарь делает 1 круг – карась делает 5.

Заметим, что между ними кратчайшее расстояние, когда К, П и крючок с червячком лежат на 1 прямой:*



На рис. $АП = 6$, $АК = 3$ => $КП = 3$. По нер-ву треугольника $АК' + К'П > АП = 6$, $АК' = 3$ => $К'П > 3 = КП$.

* Причем к между червяком и П.
Рассмотрим их 1 „встречу". Изначально M_0 и N_0 лежат на одной прямой с O (O – крючок), т.к. все 3 точки M_0, N_0 и $O \in$ одной прямой $y = -2\sqrt{2} \cdot x$.

Тогда чтобы оказаться на 1 прямой в положении П, К, O. Путь карася будет

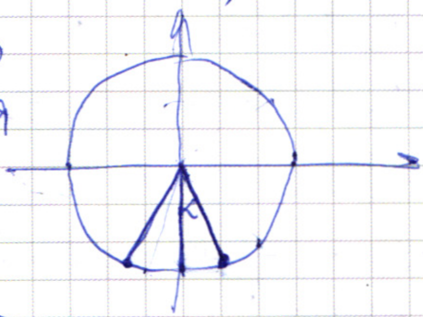
$S_к = 3\pi + \frac{S_п}{2}$, т.к. длина ~~он~~ дуги у пескаря и кар. имеющая одинак. градусную меру, у пескаря имеет в 2 раза больше длину дуги:

$S_к = 3\pi + \frac{V_п \cdot t}{2}$, в то же вр.: $S_к = V_к \cdot t = 2{,}5 V_п \cdot t$.

$2{,}5 V_п \cdot t = 3\pi + 0{,}5 V_п \cdot t$.

$V_п \cdot t = 1{,}5\pi$. Значит пескарь сместится на x°, такое что $\frac{x}{360} = \frac{1{,}5\pi}{12\pi}$, $x = 45^\circ$.

Тогда если ~~карась~~ пескарь изнач. в точке $2; -4\sqrt{2}$.
и „отклонялся" на $\angle \alpha$ (см. рис.),
то теперь он отклоняется на $\angle 45 - \alpha$. т.е. имеет коорд:



$(-3 \cdot \cos 45-\alpha ; 3 \cdot \sin 45-\alpha)$.

~~$\sin 45 \alpha = \sin 45 \cdot \sin\alpha + \cos 45 \cdot \cos\alpha =$~~
~~$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{6}$~~

$\sin 45 - \alpha = \sin 45 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 45 =$
$= \sqrt{2}/2 \left(\frac{4\sqrt{2}}{6} - \frac{4}{6}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

$\cos = \sqrt{1 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{3+4\sqrt{2}}/3.$

$\Rightarrow$ первая встреча произойдет в:

~~$2\sqrt{2}$~~; ~~$\left(-3\sqrt{3+4\sqrt{2}}\right.$~~ ; ~~$\sqrt{3+}\ \frac{2-\sqrt{2}}{3}$~~)

Ответ: $\left(\sqrt{3+4\sqrt{2}}; \frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

Все члены положительные $\Rightarrow$ (коэф. множитель) > 0. Т.е. у нас есть прогрессия:

$a, ak, ak^2 \ldots ak^{2999}$. Тогда её сумма $=$

$(a+ak+ak^2)(1+k^3+k^6+\ldots k^{2997})$.

Теперь увелич. каждое 3 в 40 раз:

$a_3 = 40a$. $(a+ak+40ak^2)(1+k^3+k^6+\ldots k^{2997})$.

Тогда $(a+ak+ak^2)\cdot 5 = (a+ak+40ak^2)$

$4a+4ak-35k^2a=0$

$35k^2-4k-4=0$.

$D = 16+16\cdot 35 = 16\cdot 36 = 24^2$.

$k_1 = \frac{4+24}{70} = \frac{7\cdot 2\cdot 2}{7\cdot 2\cdot 5} = \frac{2}{5}$.

$k_2 = \frac{4-24}{70} < 0$ – неуд.

Зн. сумма изнач. $=$

$(a+\frac{7}{5}a)(1+(\frac{2}{5})^3+\ldots 2/5^{2997})$

После увелич. 2 ~~коэф~~ членов:

$(a+1\frac{1}{15}a)(1+(\frac{2}{3})^3+\ldots(\frac{2}{5})^{2997})$

$\frac{\frac{11}{5}a}{\frac{7}{5}a} = \frac{11}{7}$.

Ответ: в $11/7$ раз.

№6.

Дано:

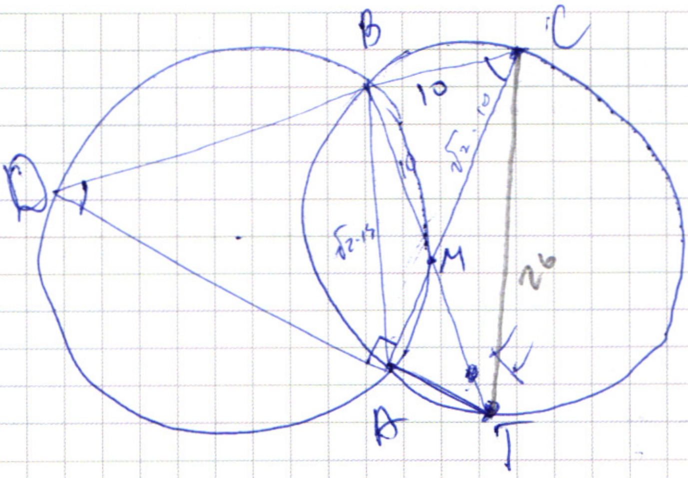
$r_1 = r_2 = 13$

$\angle CAD = 90^\circ$,

$BF = BD$,

$BF \perp BD$.

Найти: CF.



Решение:

1) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}$, т.к. $w_1 = w_2 \Rightarrow \angle BDA = \angle ACB$.

2) $\angle BDA = \angle ACB$, $\angle BDA + \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \angle BDA + \angle ACB = 45^\circ$;

$\Rightarrow$ пусть $AD = a \Rightarrow AC = a$, $CD = \sqrt{2}\, c$.

3) $\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF$ – диаметр $\Rightarrow CF = 26$.

4) $\angle BCM = 45^\circ$, $\angle CBM = 90^\circ \Rightarrow \angle BMC = 45^\circ \Rightarrow$

$BC = BM$.

5) Рассмотрим $\triangle DBM$ и $\triangle FBC$:

$BM = BC$, $BD = BF$, $\angle DBM = \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle DBM = \triangle FBC \Rightarrow FC = DM$, при этом, т.к.

$\angle DBM = 90^\circ \Rightarrow DM = 26 = d = CF \Rightarrow F$ и T – совпали.

Ответ: 26.

б) Дано:

$BC = 10$

Найти

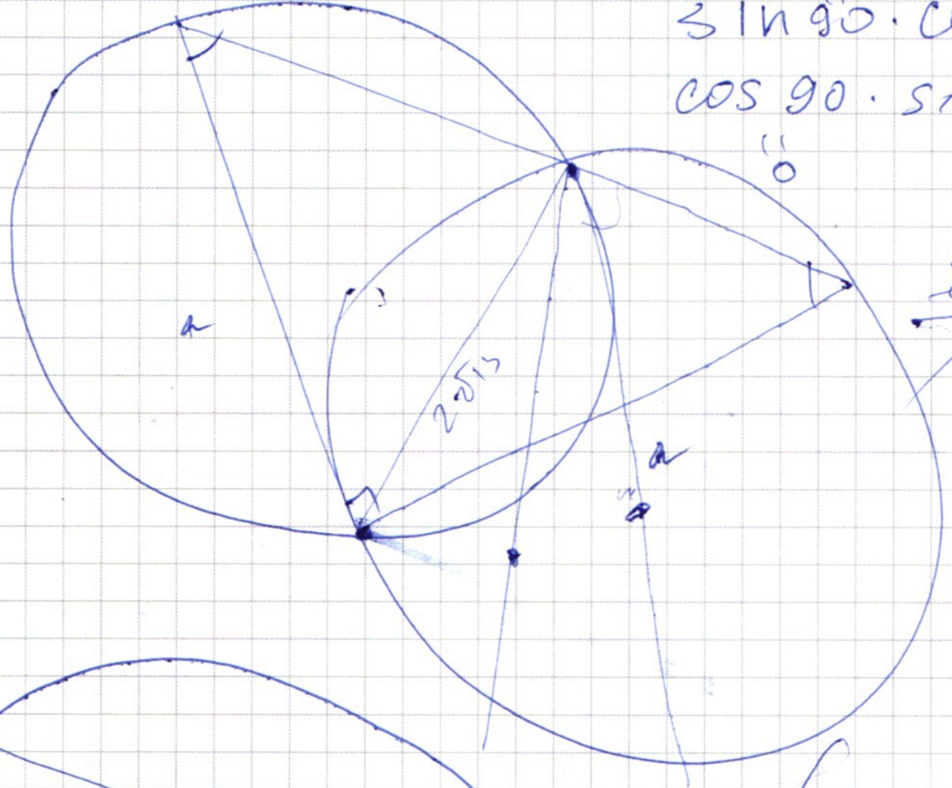
$S_{\triangle ACF}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

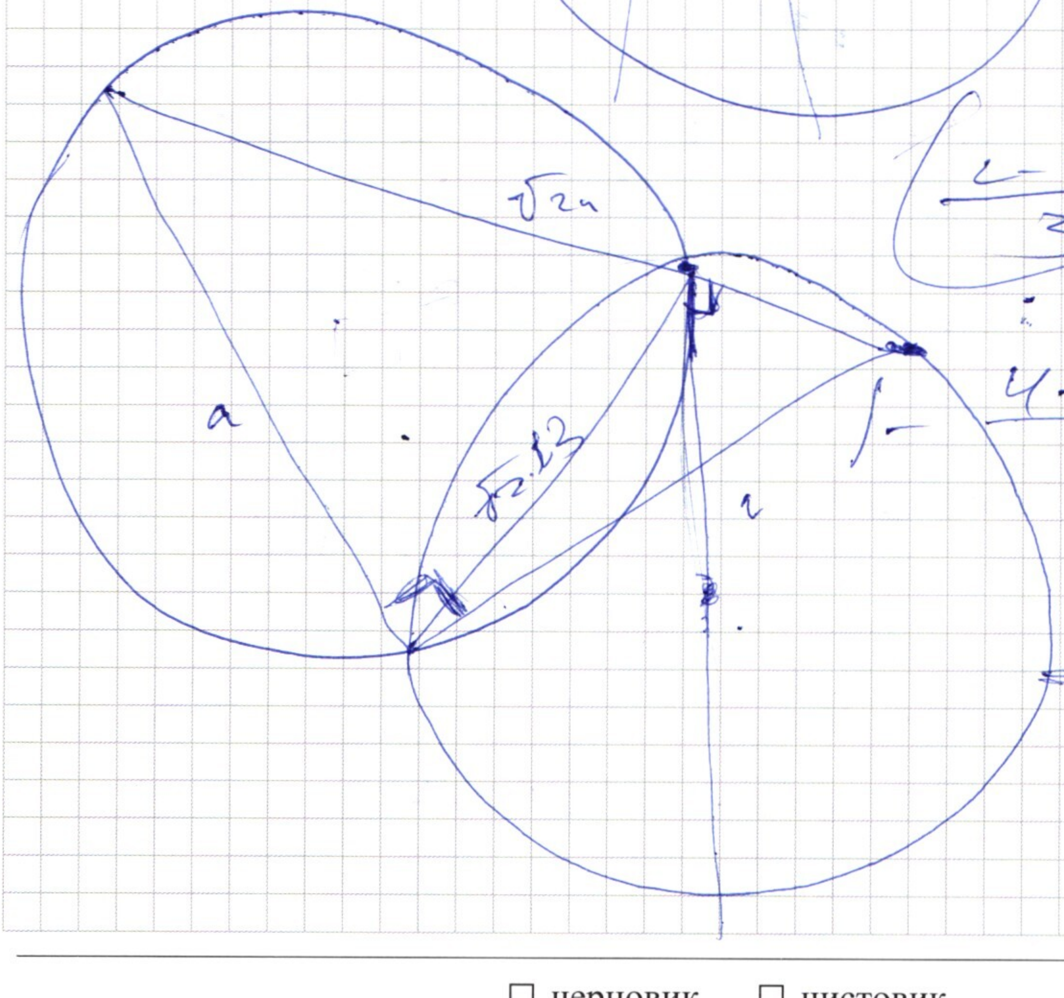
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 60 = \sin 90 \cdot \cos 30 - \cos 90 \cdot \sin 30$



$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{2-(\sqrt{2}-1)}{3}$

$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$



$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)^2$ 5

$\frac{4-4\sqrt{2}+2}{3}$

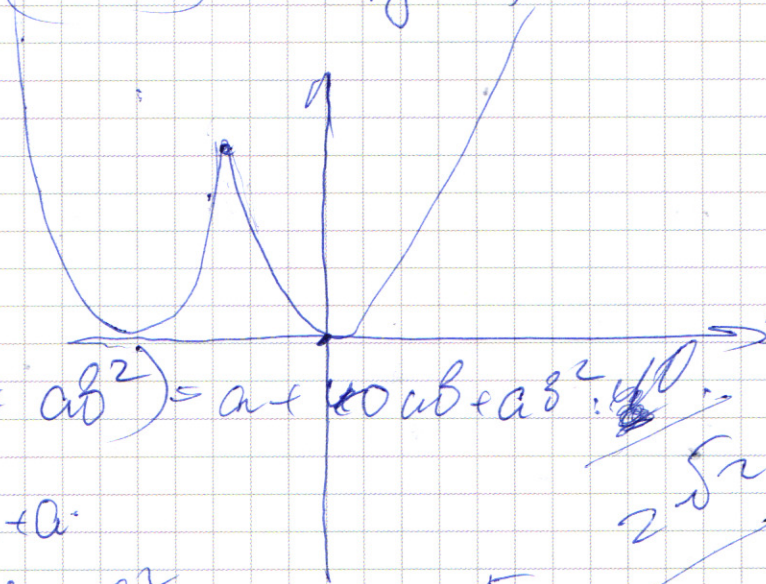
$\frac{3+4\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{cases} |y+x+8|+|y-x+8|=16 \\ (|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a. \end{cases}$$

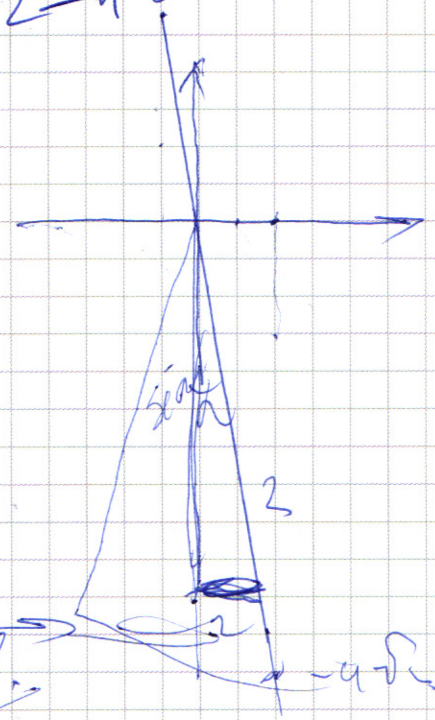
$2x=16.$

$2y+16=16$

$(|x|-15)^2+(|y|-8)^2=a,$



$2-4\sqrt{2}.$



$-4\sqrt{2}$

$5(a+ab+ab^2)=a+40ab+ab^2:40$

$2\sqrt{2}.$

$a+a$

$a \quad ab \quad ab^2$

$40.$

$7.5.$

$4a-35ab+4ab^2=0$

$4-39b+4b^2=..$

$40\cdot40-40\cdot39.$

1600

1560

$1521-64$

$25\cdot50-$

$1250-64=1186.$

$\sin 45-\alpha=\sin\alpha\cdot\sin 45-\cos\alpha\cdot\cos 45.$

$4\cdot25-7\cdot25+4$

$D=16+39^2-64.$

$4b^2-35b+4=0.$

$5 \quad 7. \quad D=$

$14\cdot61-4$

$1457.$

$4a \quad -35x^2+4x+4$

$D=16+560=571.$

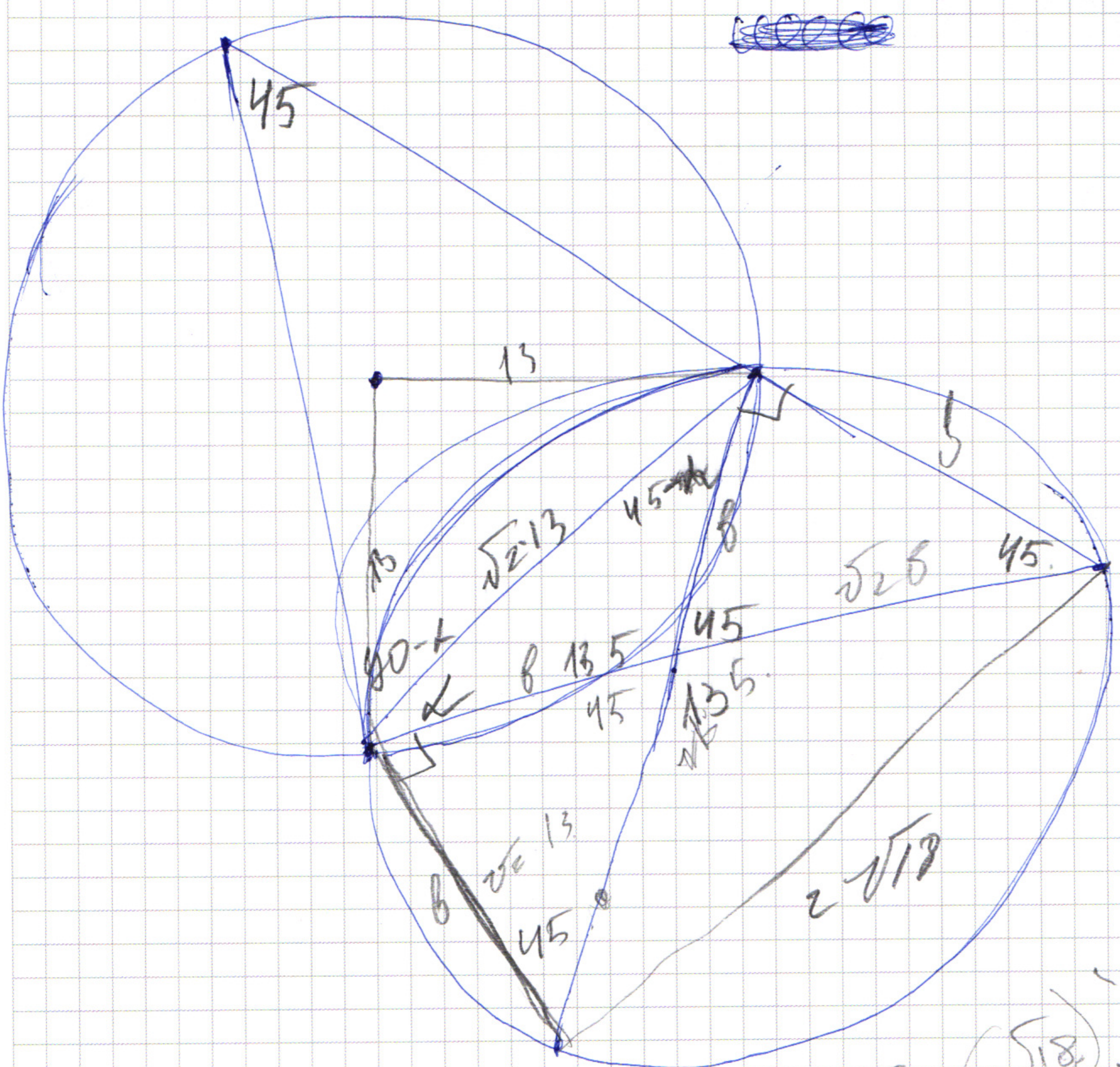
$x_1=\frac{-4+12}{35}$

$x_2=$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sqrt{2}\,b$

$(\sqrt{2}+1)^2 b^2 + b^2 = (2\sqrt{18})^2$

$(2+1+2\sqrt{2}+1)\,b^2 = (2\sqrt{18})^2$

$(4+2\sqrt{2})\,b^2 = 2\cdot 18$

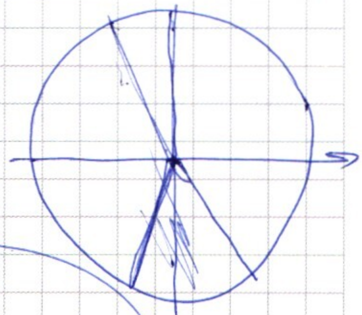
$2b^2+\sqrt{2}\,b^2$

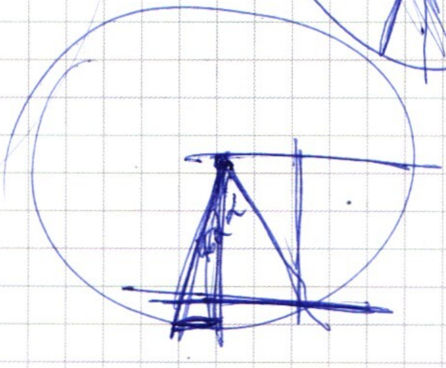
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

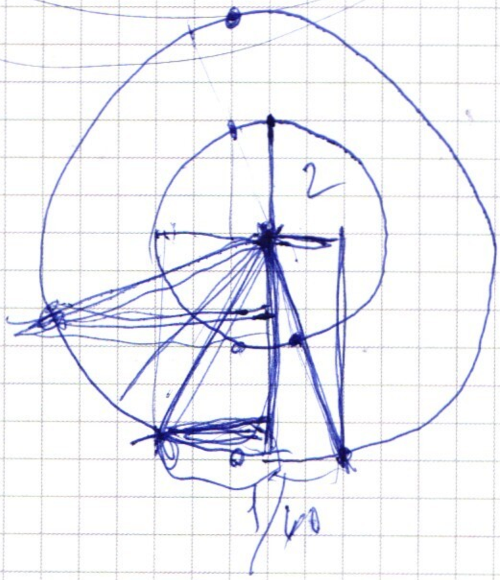
$1+8=$

$4+32=6$

$2\pi r$





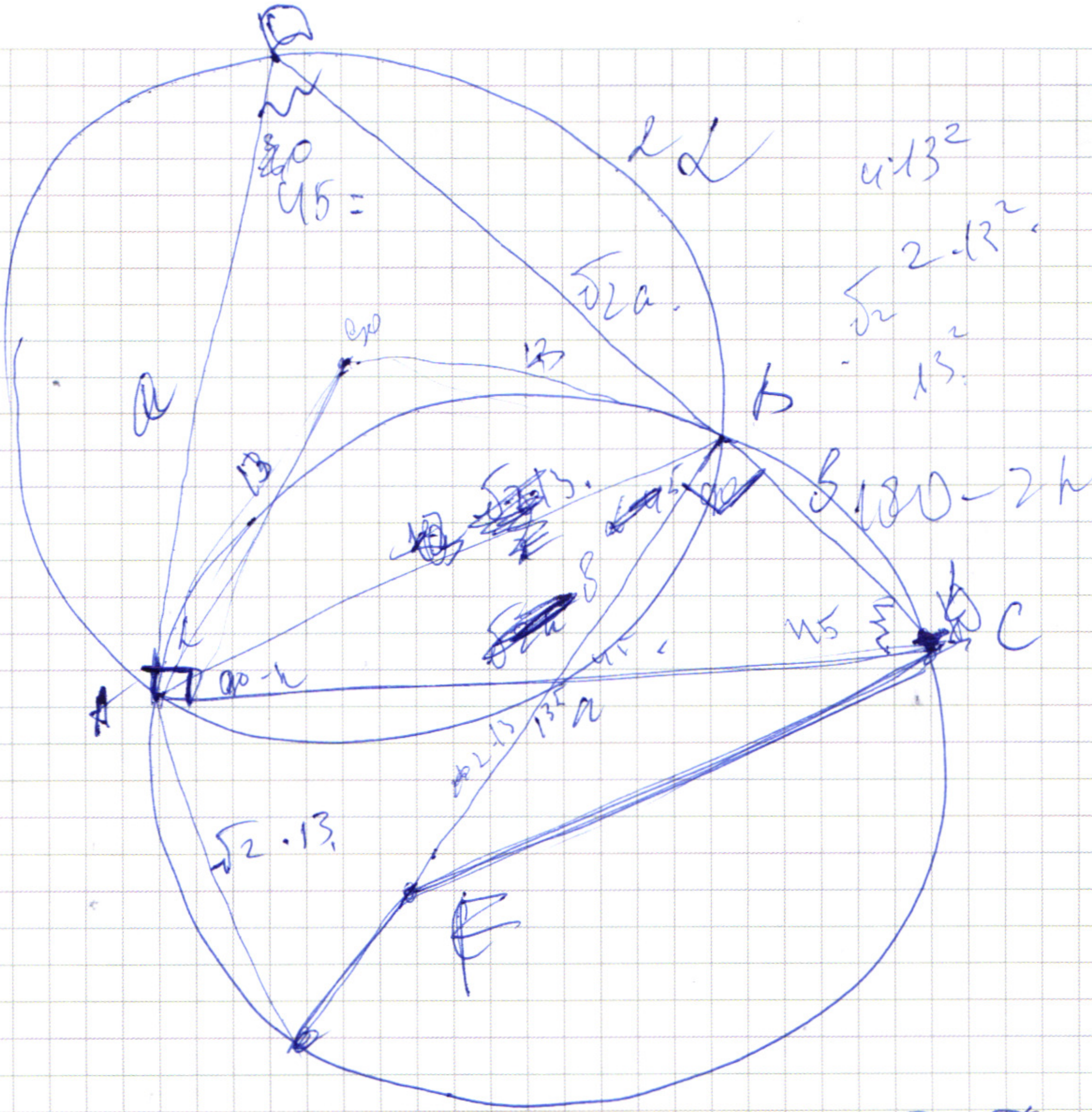


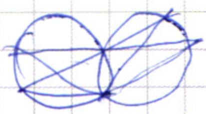
$3\pi +$

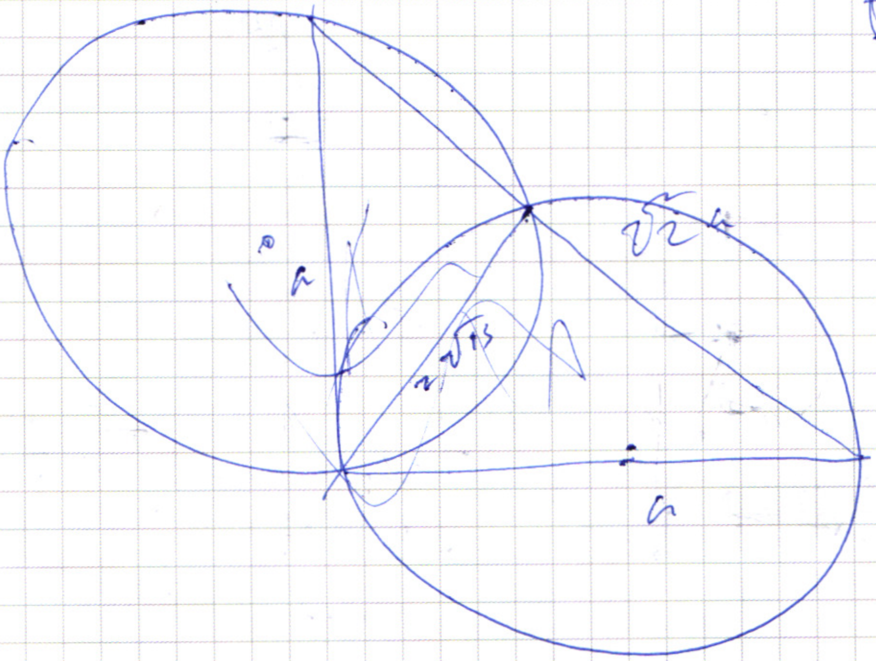
$t \cdot 2{,}5 V_2 = 3\pi + t \cdot V_2$

$1{,}5 V_2 t = 3\pi$

$V_2 \cdot t = 2\pi$


A
B
C
E
a
2L
4·13²
2·13²
13²
√2a
180−2h
90−h
45
135
√2·13




a
√2a
a

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$7\cdot7\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2$

$77\cdot5\cdot3\cdot2\cdot2$ 11 1 $\frac{81}{4}$ $\frac{7}{2}$ 380

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{5-\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{x^3-64x+200}$$

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot5\cdot7$ 24 120 720

1080

360

$5x^2+6x-40$

$4x^4+x^2+4x-5x^2$

$4400+1400$

5800

3000

$\frac{10080}{3}$

$4(\cancel{16-10+12-4+1})$

$4\cdot4\cdot4-5\cdot4\cdot2+12\cdot4-4\cdot4+4$

1400

14

5040

2520

$4x^4+5x^3+12x^2+4x+4\,|\,x+2$

$4x^4+8x^3$ $\quad 4x^3$

$-3x^3+12x^2+4x+4$

$-3x^3-6x^2$

$18x^2$

$10080\,|\,3$ $\quad 3360$

$5040\,|\,2$ $\quad 2520$

$4x^4+5x^3+12x^2+4x+4\,|\,x+2$

$4x^4+8x^3$

$-3x^3+12^2$

$3x^3+12x^2$

$4^5-5\cdot4^3+12\cdot4^2-4^2+4=0$

-4

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4x^4+x^2+4x-5x^2|x+2|+4\geq 0.$

$4x^4+x^2+4x-5x^3-10x^2+4\geq 0$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4\geq 0$ (-1)

$\cancel{4}\ \cancel{-5}\ -9\ -4\ +4$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 \,|\, x+1$

$4x^3-9x^2$

$-x^2+10x$

$\cancel{9x^3+9x^2}$

$18x^2+4x$

$9x^3$

$4x^4-4x^3-18$ 3 $4\cdot 3^4-5\cdot 3^3+12\cdot 3^2-4\cdot 3+4$

$-x^3+9x^2$ 4.1

$-10x^2+10x$

$4\cdot 8-9\cdot 4+4$

$4x^4-5x^3-9x^2+4x+4 \,|\, x-1$

$-9x^3-9x^2$

$4x^3-9x^2+4$ 1 (-)

2 (-)

sin 30+60

30+45

sin 60

sin 30 · sin 30 − cos 60 · cos 30

$4\cdot 2^4+5$

$4\cdot x^4+5\cdot x^3$

$4x^3-9x^2+4 \,|\, x-2$

$4x^3-8x^2$

$-x^2+4$

$+2x$

$4x^2-x+2$

$\sin 30=\frac{1}{2}$

$\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60=\frac{1}{2}$

$4x^2-x-2$

$D=1+32$

$x_1=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

$x_2=\frac{1-\sqrt{33}}{8}$

$(4x^2-x-2)(x-2)=$

$4x^3-8x^2-x^2+2x-2x-4=$

$4x^3-9x^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)