

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 5 $t = \frac{5}{8} \frac{1}{t}$
 $t - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$4\sqrt{2}$ и $10\sqrt{2}$

$\frac{2}{5} \quad 2$

$\frac{1}{5}$

$t - k_1 = \frac{1}{5} t - k_2$
 $t - 1 = \frac{1}{5} t$
 $t = \frac{5}{4}$

$t = \frac{5}{4}(k_1 - k_2)$

$\sqrt{7}$

$|y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$
 $((x-8)^2 + (y-6)^2 = a$

$a = 232$
 $(0,0)$ и $(0,12)$

144
 196

$0) a > 232$
 $1) 232 > a > 196$
 $2) 196 > a >$

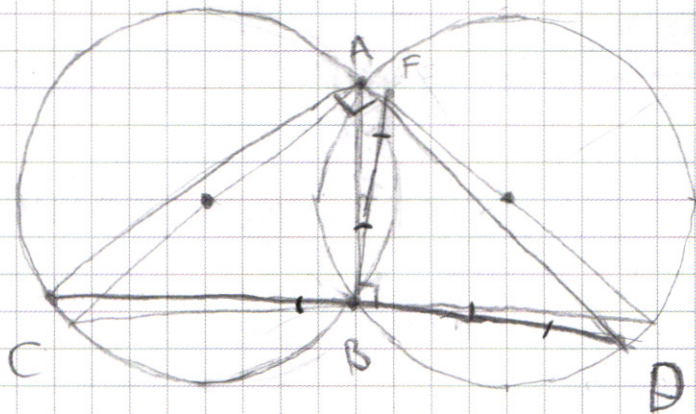
$\frac{-2}{-2\sqrt{2}}$
 $\frac{-2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
 $\frac{-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\lg(a+b)}{11}$
 $\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$
 $\frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$\int 7+1+7+1$
 4

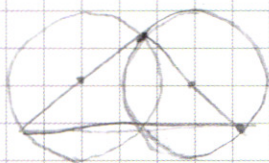
$$BF = BD$$

$$CB =$$



$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2}$$

$$\sqrt{CB^2 + BD^2}$$



5



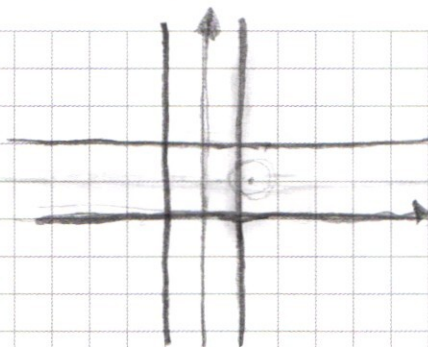
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

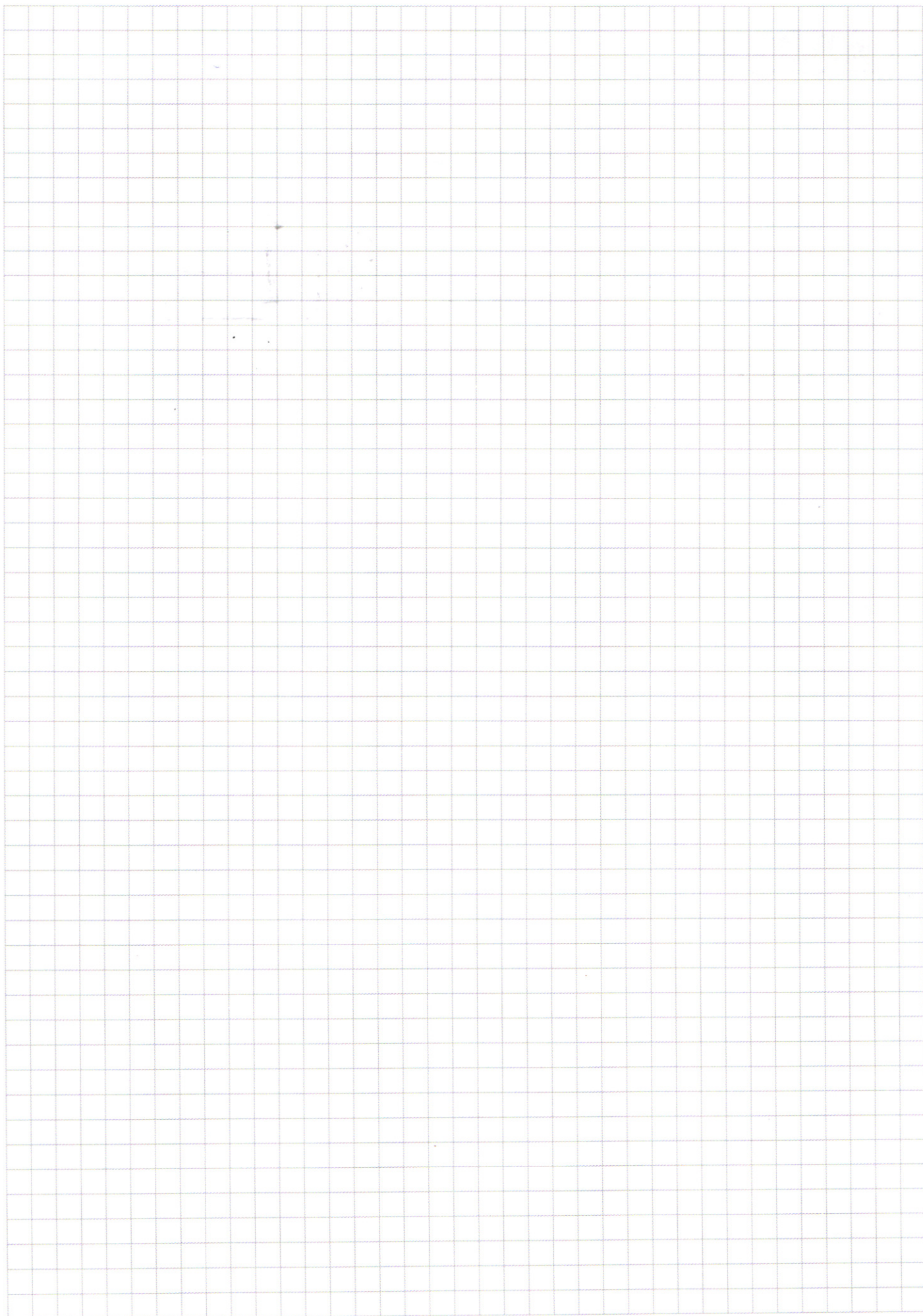
$$|y-6-x| + |y-6+x| = 12$$

$$1) y > 6$$

$$1. x > 12 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 1 + 6 \\ + \\ 1 - 6 \\ \hline 12 \end{array}$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$\frac{22557}{4557}$

$$\begin{aligned} & C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 \\ & + C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 \\ & 8 \cdot 21 \cdot (10+5) \\ & 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

№2 $\sum_{i=1}^{3000} b_i = S$

$\frac{b_{i+1}}{b_i} = a$

$\left(\sum_{i=1}^{1000} b_{3i} \right) = \frac{9}{49} S$

$$\begin{aligned} & + \frac{9}{49a} S \\ & + \frac{9}{49a^2} S \\ & \hline S \end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right) + \left(1 - \frac{49}{9} \right) = 0$

$\frac{1}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 49}{9}}}{2}$

$a = \frac{6}{-3 + \sqrt{161}}$

$X + \frac{X}{a} = S$

$X = \frac{S}{1 + \frac{1}{a}}$

$\frac{6S}{3 + \sqrt{161}}$

№3

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$

$\frac{\sqrt{2}}{2} (x+6)$

$x \neq -6$

$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} (x+4)$

$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$

	1	-2	-20	48
+1	1	-1	-21	27
-1	1	-3	-17	65
+2	1	0	-20	8
-2	1	-4	-12	72
+3	1	1	-17	-3
-3	1	-5	-5	63
+4	1	2	-12	0
-4	1			
+6	1			



1 2 3 4 6 8 12 16 24 48

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x-4)(x^2+2x-12)=0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$$\left\{ 4; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right\}$$

$$x^3 - 4x + 80$$

$$-\frac{(1+\sqrt{13})^3}{8} + 2 \cdot (1+\sqrt{13}) + 80 > 0$$

$$-\frac{5^3}{2^3} = -15 \frac{5}{8}$$

N4

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x-2 | + 4 \geq 0$$

$$1) x \geq 2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

при $x \geq 2$ $2x^4 - 3x^3 > 0$, $7x^2 - 4x > 0$, $4 > 0 \Rightarrow \checkmark$

$x^3(2x-3)$ $x(7x-4)$

$$2) x < 2$$

$$2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\frac{124}{12} \rightarrow \frac{1}{2} 124$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4}$$

$$(x-1)(2x^3+5x^2-4)$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2+x-2)=0$$

	2	3	-5	-4	4
+1/2	2	4	-3		
-1/2	2	2	-6	-1	
+1	2	5	0	-4	0

	2	5	0	-4
-1	2	3	-3	-1
+2	2	9	18	32
-2	2	1	-2	0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Тогда у 700 есть ровно 4 однозначных делителя: 2, 4, 5 и 7. Тогда множество цифр 8-значного числа, произведение цифр которого равно 700, равно $\{2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1\}$ или $\{4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1\}$ (если произведение части цифр равно 700, то остальные цифры должны быть 1, чтобы произведение всех было 700). Тогда количество 8-значных чисел, множеством цифр которых является $\{2, 2, 5, 7, 1, 1, 1, 1\}$ равно $C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2$ (количество способов выбрать, где находятся цифра 7, 2 цифры 2 ^{из оставшихся мест} и 2 цифры 5 из оставшихся); множеством цифр которых является $\{4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1\}$ — $C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1$ (количество способов выбрать, где находятся цифра 7, 2 цифры 5 из оставшихся и 1 цифра 4 из оставшихся). Тогда всего 8-значных чисел с произведением цифр 700

$$C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 + C_8^1 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2} + 5 \right) = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 2520.$$

Ответ: 2520

№2

По условию, $\sum_{i=1}^{3000} b_i = S \wedge \left(\sum_{i=1}^{3000} b_i \right) + (50-1) \left(\sum_{i=1}^{1000} b_{3i} \right) = 105$, что равносильно $\sum_{i=1}^{3000} b_i = S \wedge \sum_{i=1}^{1000} b_{3i} = \frac{9}{49} S$. Пусть $a = \frac{b_2}{b_1}$. Тогда $\sum_{i=1}^{1000} b_{3i-1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{9}{49} S$, $\sum_{i=1}^{1000} b_{3i-2} = \left(\frac{1}{a} \right)^2 \cdot \frac{9}{49} S$. Тогда $S = \sum_{i=1}^{3000} b_i =$

$$S = \left(\sum_{i=1}^{1000} b_{3i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{1000} b_{3i-1} \right) + \left(\sum_{i=1}^{1000} b_{3i-2} \right) = \frac{9}{49} S + \left(\frac{1}{a} \right) \cdot \frac{9}{49} S + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \cdot \frac{9}{49} S$$

Тогда $\frac{49}{9} = \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right) + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} \right) - \frac{40}{9} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{160}{9}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{a} = -\frac{8}{3} \end{cases} \text{ Вся последовательность поло-}$$

жительна, значит $a = \frac{b_2}{b_1}$ положительно, значит $\frac{1}{a}$ положительно. Тогда $\frac{1}{a} = -\frac{8}{3} < 0$, значит $\frac{1}{a} = \frac{5}{3}$.

~~Требуется найти $\sum_{i=1}^{3000} b_i$ что равно~~

Найдём $\sum_{i=1}^{1500} b_{2i}$. Тогда $\sum_{i=1}^{1500} b_{2i-1} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{1500} b_{2i}$. Тогда $S = \sum_{i=1}^{3000} b_i = \left(\sum_{i=1}^{1500} b_{2i} \right) + \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^{1500} b_{2i-1} \right) =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{1500} b_{2i} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right) = \left(\sum_{i=1}^{1500} b_{2i} \right) \cdot \frac{8}{3} \text{ Тогда } \sum_{i=1}^{1500} b_{2i} = \frac{3}{8} S$$

Требуется найти $\frac{\left(\sum_{i=1}^{3000} b_i \right) + (2-1) \left(\sum_{i=1}^{1500} b_{2i} \right)}{\sum_{i=1}^{3000} b_i}$, что равно

$$1 + \frac{\frac{3}{8} S}{S} = \frac{11}{8}$$

Ответ: S увеличится в $\frac{11}{8}$ раза.

N3

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$$

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4) \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+6) \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x+6) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+4)(x+6)$$

$\Updownarrow$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32 \textcircled{2} \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -6 \\ \sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x+4) \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 20x - 48 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

Тогда $x^3 - 2x^2 - 20x - 48$ имеет корни 4, ~~и $-\frac{3}{2}$ и $-\frac{5}{2}$~~

$$\frac{3}{2} \text{ и } -\frac{5}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Проверка~~ проверка

Тогда ① $\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{5}{2} \\ x^3-4x+80 \geq 0 \end{cases}$

$x^3-4x+80$ при $x=4$ равно $4^3-4 \cdot 4+80=64-16+80=128 > 0$,
при $x=\frac{3}{2}$ равно $(\frac{3}{2})^3-4 \cdot \frac{3}{2}+80 = \frac{27}{8}-6+80 = 87\frac{3}{8} > 0$,
при $x=-\frac{5}{2}$ равно $(-\frac{5}{2})^3-4 \cdot (-\frac{5}{2})+80 = -\frac{125}{8}+2 \cdot 5+80 = 74\frac{3}{8} > 0$.

Тогда ① $\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}$

Тогда $(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}) \sqrt{x^3-4x+80} = x^2+10x+24$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{5}{2} \\ x \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 4\}$

✓ 4

при $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 \geq 0$

При $x \geq 2$ $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 = 2x^4-3x^3+7x^2-4x+4$.

Тогда $2x^4-3x^3 = x^3(2x-3) > 0$ $7x^2-4x = x(7x-4) > 0$,
 $4 > 0 \Rightarrow 2x^4-3x^3+7x^2-4x+4 \geq 0$.
 $\forall (2 \geq 0, f(x)=x^3)$ $\forall (2 \cdot 2-3=1 > 0, f(x)=2x-3)$ $\forall (7 \cdot 2-4=10 > 0, f(x)=7x-4)$ $\forall (2 > 0, f(x)=x^3)$ $\forall (7 \cdot 2-4=10 > 0, f(x)=7x-4)$

При $x < 2$ $2x^4+x^2-4x-3x^2|x-2|+4 = 2x^4+3x^3-5x^2-4x+4$.

$2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 = (x-1)(2x^3+5x^2-4) = (x-1)(x+2)(2x^2+x-2) =$
 $= (x-1)(x+2)(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4})$.

Тогда $2x^4+3x^3-5x^2-4x+4 \geq 0$
 $(x-2)(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4})(x+2) \geq 0$

Решим методом интервалов!

$$([1; +\infty) \setminus [2; +\infty)) \cup [2; +\infty) = [1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$



$$\left(\begin{aligned} -2 &< -\frac{6}{4} = -\frac{1+5}{4} = -\frac{1+\sqrt{25}}{4} < \\ &< -\frac{1+\sqrt{17}}{4} < -\frac{1-\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}-1}{4} < \\ &< \frac{\sqrt{25}-1}{4} = 1 \end{aligned} \right)$$

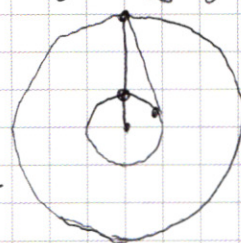
N5

Радиус окружности, по которой бегает водолерка, равен $\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{5}$; по которой бегает жук-плавунец - $\sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{5}$. Тогда отношение радиусов равно $\frac{10\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{5}{2}$.

Отношение скоростей, по условию, равно $\frac{1}{2} \Rightarrow$ отношение условий скоростей равно $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$.

~~Заметим, что водолерка и жук-плавунец расположены на одной прямой с началом (0; 0).~~

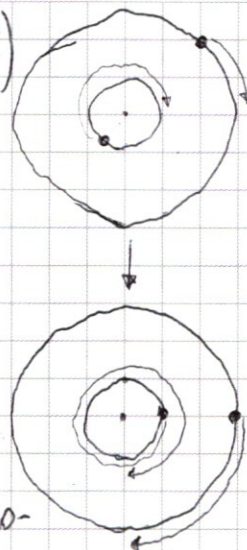
Заметим, что водолерка расстояние между насекомыми будет кратчайшим, когда они будут лежать на одной прямой с началом в (0; 0) (тогда расстояние между ними будет равно расстоянию между окружностями). Заметим, что такая ситуация случится, когда водолерка пройдет $\frac{5}{8}$ круга, ведь тогда жук-плавунец пройдет $\frac{5}{8} - \frac{1}{5} = \frac{1}{8}$ круга, а изначально между насекомыми было $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ круга ($\frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} \Rightarrow$ они на 1 прямой, но водолерка



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ка в III четверти, а жук-плавунец - в I)

Во время этого перемещения кратчайшее расстояние не достигалось.



Пусть t - часть круга, которую проходит водоемка между моментами с кратчайшим расстоянием (эта часть всегда одна и та же за счёт симметричности случая). Тогда $t > 1$ (~~и~~ жук-плавунец движется сонаправленно). Предположим, что $t < 2$. Тогда $t - 1 = \frac{1}{5}t \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} \Rightarrow$ между моментами с кратчайшим расстоянием водоемка проходит $\frac{5}{4}$ круга, а жук-плавунец - $\frac{1}{4}$.

Координаты первого момента с кратчайшим расстоянием для водоемки - $(\frac{\sqrt{2}+1}{4}; -\frac{\sqrt{2}-1}{4})$ (исходные координаты - $(\frac{-2}{4\sqrt{2}}; \frac{-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}) \Rightarrow$ тангенс

$$\frac{-2\sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{тангенс угла } \approx \text{мкс } \frac{5}{8} \cdot 2\pi$$

равен $-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, это IV четверть, $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} = 4$)

Тогда остальные координаты моментов с кратчайшим расстоянием - $(\frac{\sqrt{2}-1}{4}; \frac{\sqrt{2}+1}{4})$,

