

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Rightarrow (x+6) \left(\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} - (x+4) \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+6=0 \\ \sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = x+4, (x) \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Решим (x)

$$\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = x+4 \Rightarrow x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 20x + 48 = 0 \Rightarrow x^2(x-4) + 2(x^2 - 10x + 24) = 0 \Rightarrow x^2(x-4) + 2(x-6)(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1-2\sqrt{3})(x-1+2\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=4, \\ x=-1-\sqrt{3}, \\ x=-1+\sqrt{3}. \end{cases}$$

Итак:

$$\begin{cases} \begin{cases} x=-6, \\ x=4, \\ x=-1-\sqrt{3}, \\ x=-1+\sqrt{3} \end{cases} \\ x^3 - 4x + 80 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ x=-1+\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{4; -1+\sqrt{3}\}$$

№1.

Разложим 100 на простые множители.

$100 = 2^2 \cdot 5^2$. Значит, что 1 и 5 при умножении на натур. число дадут число, которое состоит из двух цифр. Поэтому нек. разложение. Число состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 5 и цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 4 цифр.

А-то, на сколько раз, то $\frac{8!}{2!2!3!} + \frac{8!}{2!4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} =$
 $= \frac{1680 + 1680}{2} = 1680 + 840 = 2520.$

Ответ: 2520.

№2.

Пусть b -первый член геом. прогрессии, q -ее знаменатель. Тогда

$$\frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} = S, \quad \frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{bq^2(q^{1000} - 1) \cdot 49}{q^3 - 1} = 10S, \text{ откуда}$$

$$\frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{bq^2(q^{3000} - 1) \cdot 49}{q^3 - 1} = 10S \Leftrightarrow \frac{bq^{3000} - 1}{q - 1} \left(1 + \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} \right) = 10S$$

Откуда $1 + \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} = 10 \Rightarrow 49q^2 = 9q^2 + 9q + 9 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0.$

$$D = 9^2 + 40 \cdot 9 \cdot 9 = 81 + 1620 = 81 + 900 + 540 = 1440 + 81 = 1521.$$

$$q = \frac{9 \pm \sqrt{1521}}{80}, \quad q_1 = 9, \quad q_2 = -\frac{3}{8}.$$

Поскольку все члены данной геом. прогрессии положит., то $q = 9$.

Найдём ответ на втор. вопрос.

$$S \cdot \frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} + \frac{bq^2(q^{1000} - 1)}{q^3 - 1} = S + \frac{Sq}{q + 1} = S + \frac{96S}{105} = S + \frac{6S}{10} = \frac{22S}{10} =$$

$$= \frac{11}{5}S = 2\frac{2}{5}S.$$

Ответ: $2\frac{2}{5}S$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4

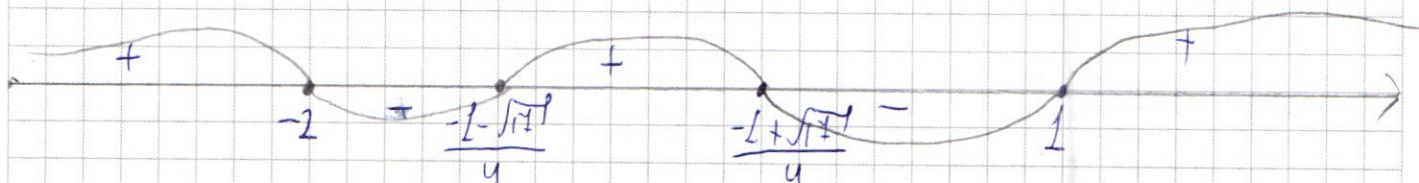
$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(x-2) + 4 \geq 0, \\ x-2 < 0 \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2(2-x) + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0, \\ x < 2, \\ 2x^4 + x^2 - 4x - 6x^2 + 3x^3 + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \geq 0, \\ x < 2, \\ 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ (2x^2 - x + 2)(x^2 - x + 2) \geq 0, \\ x < 2, \\ (x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \in \mathbb{R}, \\ x < 2, \\ (x-1)(2x^2(x+2) + (x-2)(x+2)) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 2, \\ (x-1)(x+2)(2x^2+x-2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 2, \\ (x+2)(x-1)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right) \geq 0(x) \end{cases}$$

Решим пер-б (x)



$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{1-\sqrt{17}}{4}; -\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right] \cup [1; +\infty)$$

Итого:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 2, \end{cases} \quad \left[x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty) \right] \quad (=)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 2, \end{cases} \quad \left[x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; 2) \right] \quad (=>)$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$$

№7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y^2 + 36 + x^2) - 24y + 2(|y-6|^2 - x^2) = 144, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 2 \end{cases} \quad (=)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y^2 + 72 + 2x^2 - 24y + 2y^2 - 24y + 72 - 2x^2 = 144, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 2, \\ y-6 \geq x, \\ 2y^2 + 72 + 2x^2 - 24y + 2x^2 - 2y^2 + 24y - 72 = 144, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 2, \\ x > y-6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 48y \neq 0, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 2, \\ y-6 \geq x, \\ 4x^2 = 144, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 2, \\ x > y-6 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} y=0, \\ y=12, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 2, \\ y-6 \geq x, \\ x=6, \\ x=-6, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 0, \\ x > y-6. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=\sqrt{2-36}+8, \\ y=12, \\ |x|=\sqrt{2-36}+8, \\ y-6 \geq x, \\ x=6, \\ |y|=\sqrt{2-4}+6, \\ x=-6, \\ |y|=\sqrt{2-4}+6, \\ x > y-6 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} y=0, \\ x=\sqrt{2-36}+8 \end{cases}$$

пара $(\sqrt{2-36}+8; 0)$ удов. ум. $x \in \emptyset$

пара $(-\sqrt{2-36}-8; 0)$ удов. ум. $x \in [36; +\infty)$

пара $(\sqrt{2-36}+8; 12)$ удов. ум. $x \in \emptyset$

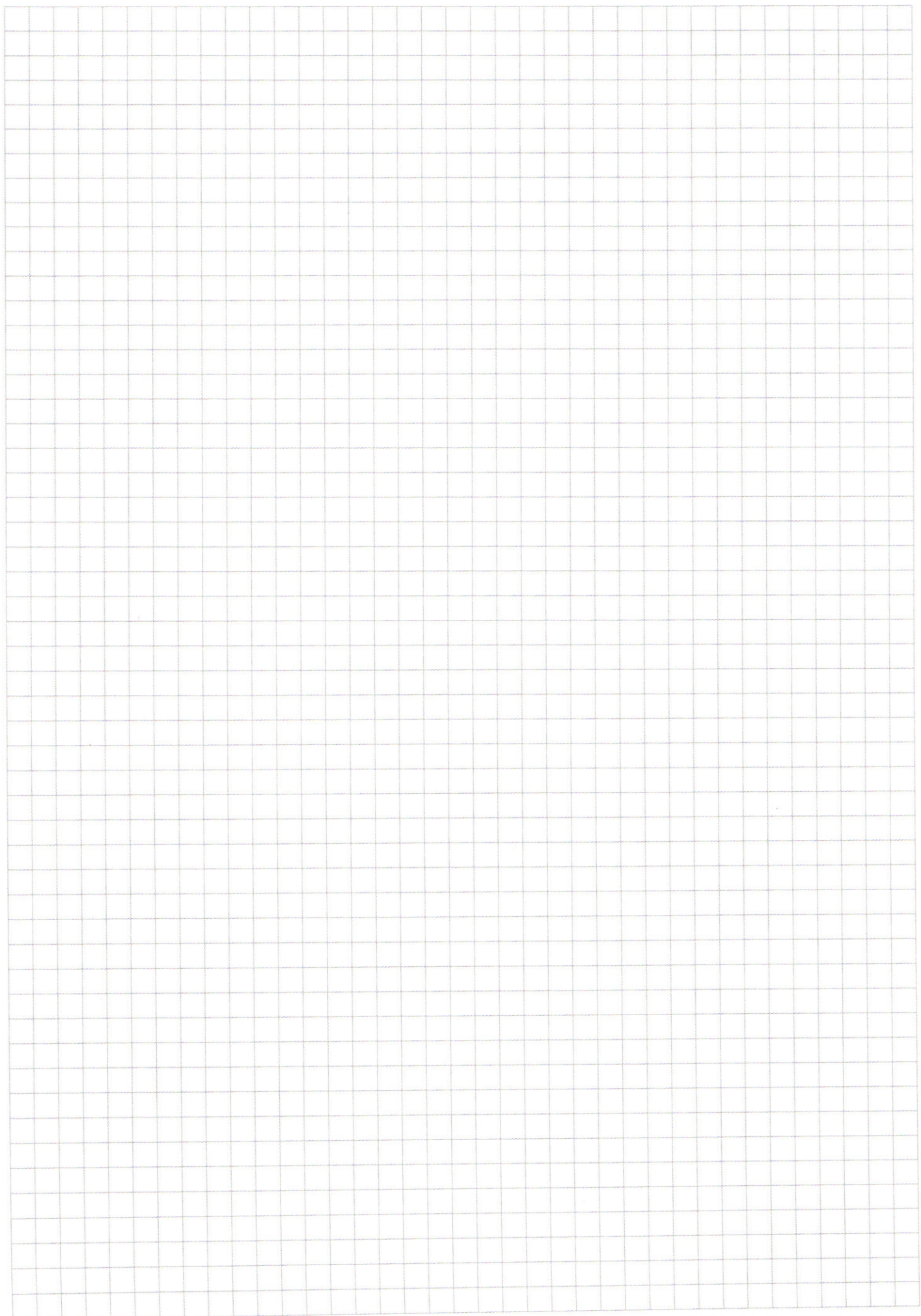
пара $(-\sqrt{2-36}-8; 12)$ удов. ум. $x \in [36; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

пара $(6; \sqrt{a-4} + 6)$ есть, при $a \in [4; 40)$
 пара $(6; -\sqrt{a-4} - 6)$ есть, при $a \in [4; +\infty)$
 пара $(-6; \sqrt{a-4} + 6)$ есть, при $a \in \emptyset$
 пара $(-6; -\sqrt{a-4} - 6)$ есть, при $a \in [4; +\infty)$
 При $a < 4$, корней нет, а при $a \geq 4$, корней всегда больше

2.

Ответ: ~~а~~ $a \in \emptyset$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$h = \rho g$$

$$2c + d = 3 - 3.$$

$$L.SA = 8 + 20 + 10^7$$

$$h = p + 22$$

$$(-1 - \sqrt{13})^3 + 4 + 4\sqrt{13} + 80$$

$$-1 - 3\sqrt{13} - 39 - 13\sqrt{13}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 7-x & x \\ x & 7-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7-x & x \\ x & 7-x \end{pmatrix}$$

$$0 = 1 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

$$-1 + \sqrt{13}$$

$$x^4 - 9x^3 + 4x^2 - nx + n$$

$$\sqrt{13} - 1$$

$$\sqrt{22+4\sqrt{13}} = 3+\sqrt{13} \quad 13\sqrt{13} - 32\sqrt{13} + 3\sqrt{13} - 1$$

$$2\sqrt{13} - 45 + 4 - 4\sqrt{13} + 80$$

$$\underline{44 + 12\sqrt{13}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$x^2|x-2| = 3|x-2|$$

$$x^2(x-2) = 3(x-2)$$

$$x^2(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 - 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ or } x = \pm\sqrt{3}$$

$$x \leq 2$$

$$4\sqrt{2} + 10\sqrt{2}$$

$$\frac{x\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$(x+6)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)\sqrt{2}$$

$$\omega = \sqrt{r}$$

$$\omega = \sqrt{r}$$

$$\frac{(x+6)\sqrt{x^3 - 4x + 80}}{(x+6)(x+4)\sqrt{2}} = 1$$

$$\frac{\sqrt{x^3 - 4x + 80}}{(x+4)\sqrt{2}} = 1$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{49 + 49 \cdot \frac{1}{5^2}}$$

$$(x-8)^2 + 36 = 0$$

$$(x-8) = \sqrt{a-36}$$

$$49 + 49 \cdot \frac{1}{5^2}$$

$$4 + 18 = \sqrt{32}$$

$$\sqrt{5 \cdot 8}$$

$$\frac{64 - 16 + 80}{2}$$

$$\frac{49 + 49}{\sqrt{64}}$$

$$\frac{L^5}{8} + \frac{L^4}{8}$$

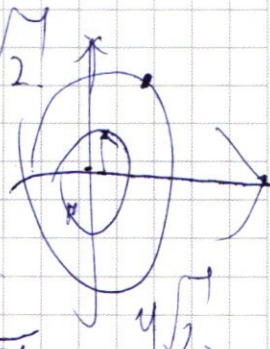
$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\omega = \frac{v}{5\sqrt{2}}$$

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{2}}$$



$$4\sqrt{2}$$

$$\frac{49 + 49}{\sqrt{64}}$$

$$8 - 8 = 0, \omega_2 = \frac{10\sqrt{2}}{8}$$

$$\sqrt{13} = 3.6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0 \quad \text{на } 80 - 32$$

$$1/x^2$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 6 \cdot 6 \\ \times 36 \\ \hline 226 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 + 20 + 80 \\ \hline 125 + 20 + 80 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$8 - 8 - 40 + 48 = -125 + 20 + 80$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$\frac{x^3 - 4x + 80}{2} = x^2 + 8x + 16$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$84 - 32 - 80 + 48 = 112$$

$$x^2(x-4) + 2(x^2-10x+24) = 0$$

$$x^2(x-4) + 2(x-6)(x-4) = 0$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 16$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$(x+6)\sqrt{x^3 - 4x + 80} - (x+4)\sqrt{2}$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^3 + 64 - 4x + 16$$

$$x^3 - 18 - 10 + 4 = 0$$

$$(x+6)\sqrt{(x+4)(x^2-2x+4)} - 4(x-4)$$

$$(x-13)^3 - 4(x-13) + 80$$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} = x + 4$$

$$x^3 - 4x + 80 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} -5 \\ \times 36 \\ \hline 226 \end{array}$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 16$$

$$226 + 24 + 80$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$\frac{(x+6)}{\sqrt{2}} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x+6)(x+4)$$

$$\left(\frac{(x+6)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x^3 - 4x + 80}{2}} - (x+4) \right) = 0$$

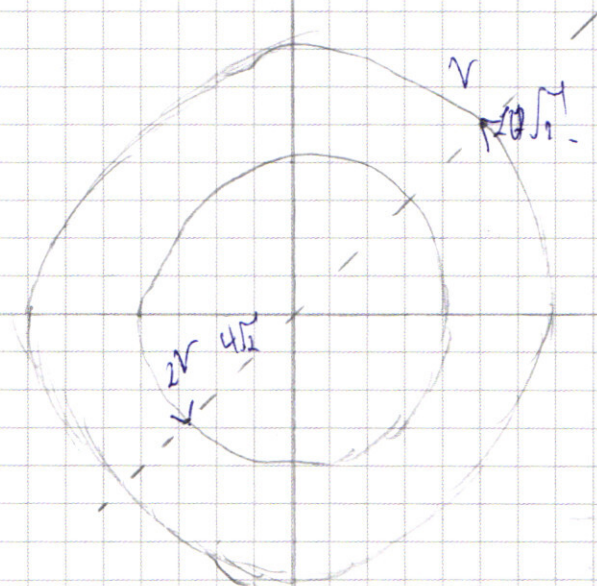
$$x^3 - 2x^2 - 20x + 64 = 0$$

0,640

0,36-40-9-9

36-4-54-9

14,4-54-9



$$\frac{r}{2r}$$

$$w = \frac{r}{r}$$

$$\frac{2r}{4\sqrt{2}} = \frac{r}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}r}{4}$$

$$\frac{r}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}r}{4}$$

$$\begin{cases} (y-6-x)^2 + (y-6+x)^2 + 2|(y-6)^2 - x^2| = 1 \\ (x-8)^2 + (y-6)^2 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 36 + x^2 + y^2 + 36 + x^2 - 24y + 2|(y-6)^2 - x^2| = 144$$

$$2y^2 + 72 + 2x^2 - 24y + 2|(y-6)^2 - x^2| = 144$$

$$\begin{cases} y-6 \geq x \\ x > y-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=12 \end{cases}$$

$$2y^2 + 72 + 2x^2 - 24y + 2y^2 - 24y + 72 - 2x^2 = 144$$

$$\begin{cases} 4y^2 - 48y = 0 \\ y-6 \geq x \end{cases}$$

$$2y^2 + 72 + 2x^2 - 24y + 2x^2 - 24y + 72 = 144$$

$$\begin{cases} 4x^2 = 144 \\ x > y-6 \end{cases}$$