

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Разложим 700 на простые множители. $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

П.к. цифры меньше 10, то необходимое восьмизначное число может состоять только из следующих наборов цифр:

$$\{2; 2; 5; 5; 7; 1; 1; 1\}$$

$$\{4; 5; 5; 7; 1; 1; 1; 1\}$$

Из первого набора возможно составить: $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 1680$ чисел

Из второго: $\frac{8!}{2! \cdot 4!} = 840$ чисел, всего $1680 + 840 = 2520$

Ответ: 2520 чисел

N2

Пусть изотонная прогрессия: $b_1; b_1 q; b_1 q^2; b_1 q^3; \dots; b_1 q^{2999}$, тогда

$$S = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

Найдем S_1 , сумму $b_3, b_6, b_9, \dots, b_{3000}$: $S_1 = b_1 q^2 \cdot \frac{(q^3)^{1000} - 1}{q^3 - 1}$

По условию: $10S = S + 49S_1$ (49, т.к. в изотонной прогрессии

есть $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$)

$$9S = 49S_1 \Rightarrow 9b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = 49b_1 q^2 \frac{q^{3000} - 1}{q^3 - 1} \Rightarrow \frac{9}{q - 1} = \frac{49q^2}{q^3 - 1}$$

$$9q^3 - 9 = 49q^2(q - 1) \Rightarrow 9(q - 1)(q^2 + q + 1) = 49q^2(q - 1)$$

на $q - 1$, т.к. $q = 1$ не подходит

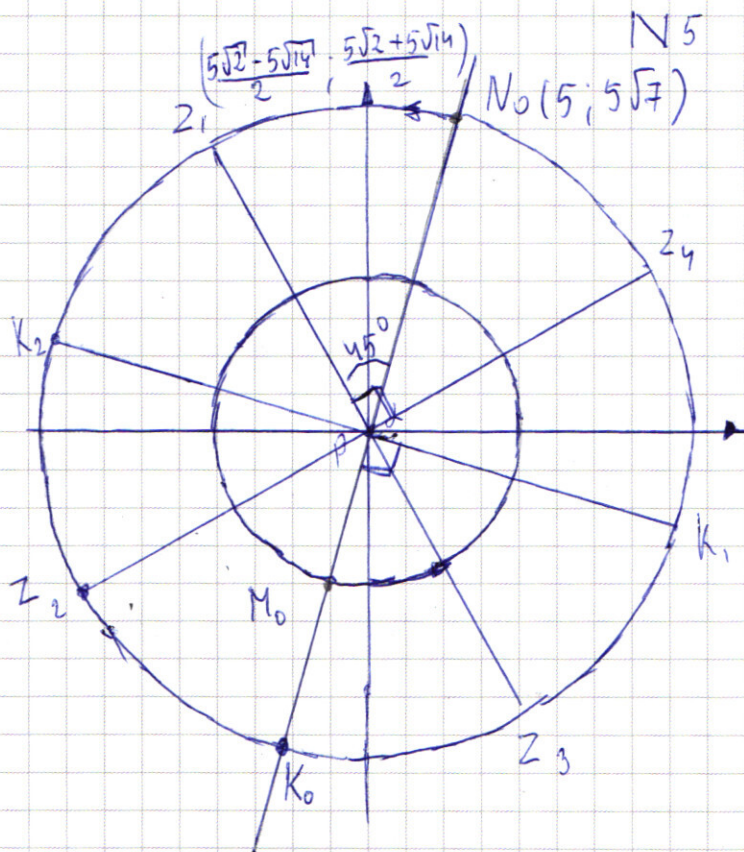
$$9q^2 + 9q + 9 = 49q^2 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0; D = 39^2$$

$$q_1 = \frac{9 + 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{12}{20} = 0,6$$

$$q_2 = \frac{9 - 39}{20} = -\frac{3}{2} \text{ - не подходит, т.к. } b_1, b_2, \dots, b_{3000} \text{ положительные} \Rightarrow$$

$$q = 0,6$$

Найдём S_2 , сумму $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$: $S_2 = b_1 q \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1} = b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}$
 Найдём, во сколько раз увеличилась S : $\frac{S + S_2}{S} = \frac{b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} + b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}}{b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}} =$
 $= 1 + \frac{q(q-1)}{q^2 - 1} = 1 + \frac{q}{q+1} = 1 + \frac{0,6}{1,6} = 1\frac{3}{8} = \frac{11}{8}$
 Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз



1. Заметим, что M_0N_0 проходит через центр окружностей, т.к.
 $\alpha = \beta = \arctg(\sqrt{7})$

2. Найдём отношение угловых скоростей ω_z и ω_m

$$\frac{\omega_z}{\omega_m} = \frac{S_m}{V_m} : \frac{S_z}{V_z} = \frac{2\pi r_m}{V_m} : \frac{2\pi r_z}{2V_z} =$$

$$= \frac{4r_m}{2r_z} = \frac{2r_m}{r_z}$$

$$r_m = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = 10\sqrt{2}$$

$$r_z = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\omega_z}{\omega_m} = 5,$$

т.е. пока жук совершает 1 круг, воуалерки проходит 5 кругов, т.е. существует 4 точки, лежащие на окружности и равные пути, в которых расстояние между ними наименьшее.

Заметим, что когда жук пройдёт $\frac{1}{8}$ круга, то воуалерки пройдёт $\frac{5}{8}$ круга; $\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, т.е. точка Z_1 является одной из 4 точек,

которые необходимо найти $(\frac{5-5\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{2}, \frac{5+5\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{2})$ — координаты Z_1 ,

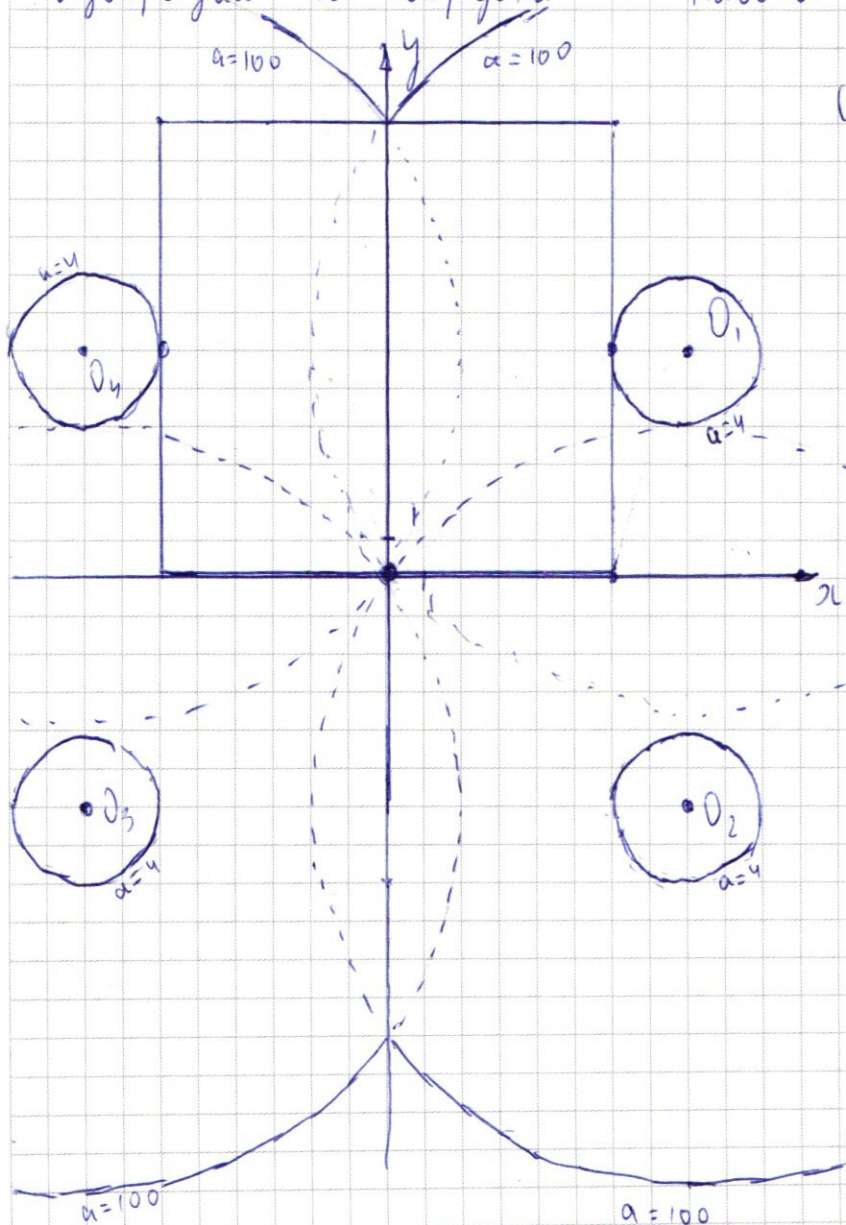
Ответ: $(\frac{5(\sqrt{2}-\sqrt{14})}{2}, \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{14})}{2})$; $(-\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{14})}{2}, \frac{5(\sqrt{2}-\sqrt{14})}{2})$; $(\frac{5(\sqrt{14}-\sqrt{2})}{2}, -\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{14})}{2})$;
 $(\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{14}}{2}, \frac{5(\sqrt{14}-\sqrt{2})}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (x-3)^2 + (y-6)^2 = a \end{cases}$$

Изобразим на координатной плоскости $|y-6-x| + |y-6+x| = 12$



$(x-3)^2 + (y-6)^2 = a$ — это
окружности, описанные
вокруг координат, радиус
которых равен $\sqrt{a}$

При $a \in [0; 4)$ решений
нет, затем при $a = 4$
есть два решения $(6; 6)$
и $(-6; 6)$. Затем при
 $a \in (4; 100)$ решений 4,
при $a = 100$ решений 2:
 $(0; 0); (0; 12)$. При
 $a \in (100; +\infty)$ решений
нет.

Ответ: 4; 100

N6

Дано:

$$R=5$$

$$\angle CAD=90^\circ$$

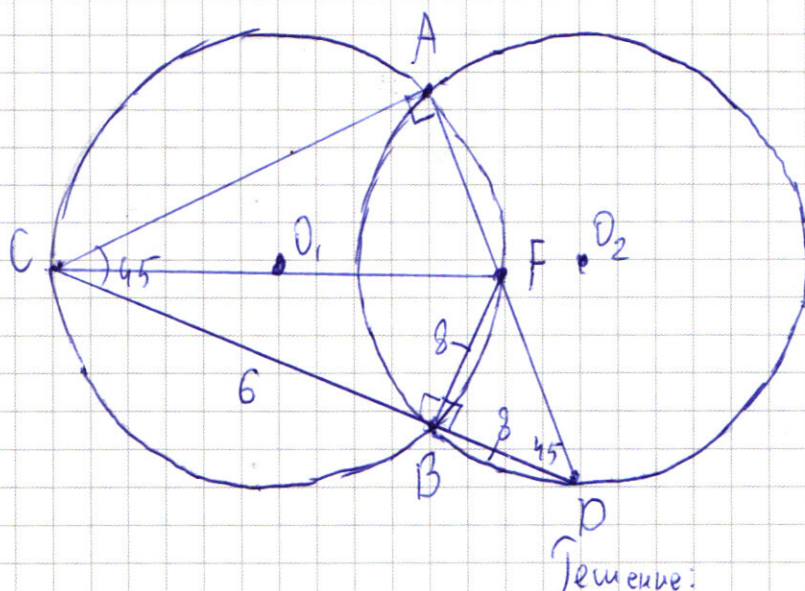
$$BF \perp BD$$

$$BF=BD$$

Найти:

$$a) CF - ?$$

$$b) BC=6; S_{\triangle CBF} - ?$$



Решение:

а) 1) $\angle ACD = \angle ADC$, т.к. они опираются на равные дуги $\widehat{AB} \Rightarrow$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ, \text{ т.к. } \angle CAD = 90^\circ$$

2) $\angle BFD = 90 - 45 = 45^\circ \Rightarrow F$ лежит на AD , т.к. по условию

$BF=BD$; $\triangle FBD$ равнобедренный; $\Rightarrow F$ принадлежит первой окружности.

3) $\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF$ - диаметр $\Rightarrow CF = 2R = 10$

Ответ: 10

б) 1) По т. Пифагора: $BF = \sqrt{100 - 36} = 8$

$$2) AD = \sin(45) \cdot 10 = 7\sqrt{2}$$

$$3) AF = \frac{8}{\sin(45)} = 8\sqrt{2}$$

$$4) AF = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$5) AC = \sqrt{100 - 2} = \sqrt{98}$$

$$6) S_{\triangle CBF} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{98}}{2} = \frac{\sqrt{196}}{2} = 7$$

Ответ: 7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{56}{1680}$$

$$3000; 3000 + 49 \cdot 1000$$

$$700 = 2 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1 \quad \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 30 \cdot 56$$

$$4, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1 \quad \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \cdot 56 = 840$$

$$840 + 1680 = 2520$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 30 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$2. \quad b, b, q, b, q^2, b, q^3, b, q^{2999} \quad b, \frac{q^2-1}{q-1} = b(q+1) = bq + b$$

$$S = b, \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

$$q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$$

$$q^3 + q^2 + q - q^2 - q - 1$$

$$b, q^2; b, q^5; b, q^8; b, q^{2999}$$

$$q^2 = q^3$$

$$z = b, q^2$$

$$k = q^3$$

$$S_1 = z, \frac{k^{1000} - 1}{k - 1}$$

$$\begin{array}{r} 40q^3 - 49q^2 + 9q + 5 \quad | \quad q-1 \\ \hline 40q^3 - 40q^2 \\ \hline -9q^2 + 9q \\ \hline -9q^2 + 9q \\ \hline -9q + 5 \\ \hline -9q + 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$10S = S + 49S_1$$

$$9S = 49S_1; \quad 9b, \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} = 49b, \frac{q^2 - 1}{q^3 - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{9}{q-1} = \frac{49q^2}{q^3-1} \Rightarrow 9q^3 - 9 = 49q^3 - 49q^2 \Rightarrow 40q^3 - 49q^2 + 9 = 0$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 36 \cdot 40 = 1440 + 81 = 1521 = 39^2$$

$$q_1 = \frac{9+39}{80}; \quad q_2 = \frac{9-39}{80} = -\frac{3}{8} \text{ не подходит}$$

$$q = \frac{48}{80} = \frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$q = 0.6$$

$$S = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}$$

S_2

$$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$G = 1 + \frac{b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}}{b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}} = 1 + \frac{q(q-1)}{q^2 - 1}$$

$$b_2 \quad b_1 q; b_1 q^3; b_1 q^5 \dots b_1 q^{2999}$$

$$S_2 = b_1 q \frac{(q^2)^{1500} - 1}{q^2 - 1}$$

$$S_k = S + S_2 = b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} + b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}$$

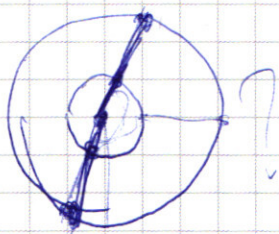
$$\frac{b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1} + b_1 q \frac{q^{3000} - 1}{q^2 - 1}}{b_1 \frac{q^{3000} - 1}{q - 1}} = 1 +$$

$$= 1 + \frac{q(q-1)}{(q-1)(q+1)} = 1 + \frac{0,6}{1,6}$$

$$= 1 + \frac{6}{16} = 1\frac{3}{8} = \frac{11}{8} S!$$

5. $r_1 = \sqrt{4 + 28} = \sqrt{32}$ — водопроводчик $4\sqrt{2}$

$r_2 = \sqrt{25 + 25 \cdot 7} = \sqrt{25 \cdot 8} = \sqrt{200}$ — муж $10\sqrt{2}$



$$\frac{V_1}{V_2} =$$

$$t_1 = \frac{4\sqrt{2}}{2V_2}$$

$$t_2 = \frac{10\sqrt{2}}{V_2}$$



$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 24 \\ D = 100 - 96 = 4 \\ x_1 = \frac{-10 + 2}{2} = -4 \\ x_2 = -6 \end{aligned}$$

$$3. \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 36} = x^2 + 10x + 24$$

$$\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} \right)^2 (x^3 - 4x + 36)} = x^2 + 10x + 24$$

$$\sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + 6x + 18 \right) (x^3 - 4x + 36)} = x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$$

$$\sqrt{(x^2 + 12x + 36)(2x^3 - 8x + 160)} = 2x^2 + 20x + 48 =$$

$$\begin{array}{r} 61 + \quad 36 \cdot 40 \quad 1440 \\ \quad \quad 1521 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 20x + 48 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4. \quad 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

При $x \geq 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad -4 \quad 4$$

$$1 \quad 2 \quad -1 \quad 6 \quad -2 \quad 6$$

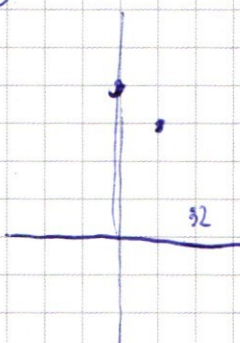
$$-1 \quad 2$$

$$1 \quad 1 \quad -2 \quad 5 \quad 1 \quad 5$$

$$-1 \quad 1 \quad -4 \quad 11 \quad -15 \quad -11$$

$$2 \quad 1 \quad -1 \quad 5 \quad 6 \quad -$$

$$-2 \quad 1 \quad -5 \quad 17 \quad -32$$



$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0$$

$$x(2x^3 + x - 4) - 3x^2|x-2|$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 4 - 3x^2|x-2| \geq 0$$

$$32 + 4 - 3 + 4$$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 4 \geq 3x^2|x-2|$$

При $x > 2$

$$2x^4 + x^2 - 4x + 4 \geq 3x^3 - 6x^2$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 4$$

$$2 \quad -3 \quad 4 \quad -4 \quad 4$$

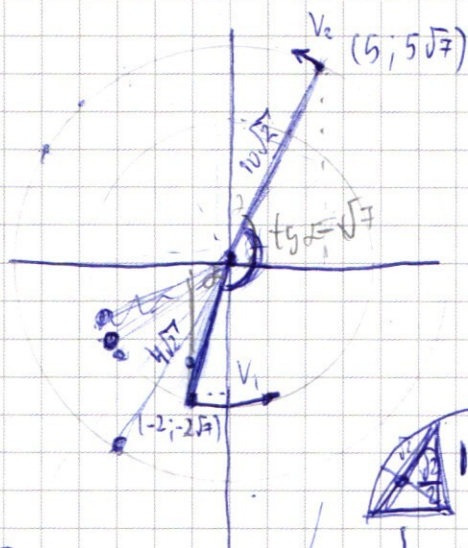
$$1 \quad 2 \quad -1 \quad 13 \quad -5$$

$$-1 \quad 2 \quad -17 \quad 2$$

$$-2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



$$\tan(\varphi) = \sqrt{7}$$

$$r_1 = \sqrt{4+28} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$r_2 = \sqrt{25+25 \cdot 7} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{S_2}{V_2} \cdot \frac{S_1}{V_1} = \frac{2\pi \cdot 10\sqrt{2}}{V_2} \cdot \frac{2\pi \cdot 4\sqrt{2}}{2V_1} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 10\sqrt{2} \cdot 2}{2\pi \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{20}{4} = 5, \text{ м.е.}$$

$$\cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{7}$$

пока мух прохаживает 1 круг, водолерки прохаживает 5

$$(a_i + b) \cdot 0,5i$$

$$0,5bi - 0,5a$$

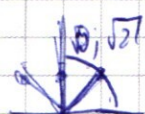


$$(-5\sqrt{7}, 5)$$

$$\frac{5 \pm 5\sqrt{7}}{2}; \frac{5\sqrt{7} \pm 5}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$5; 5\sqrt{7}$$

$$-5\sqrt{7}; 5$$



1:1

0:1

$$(-5\sqrt{7}, 5)$$

$$\frac{5}{4} = 1,25 \quad \frac{5}{2} = 2,5$$

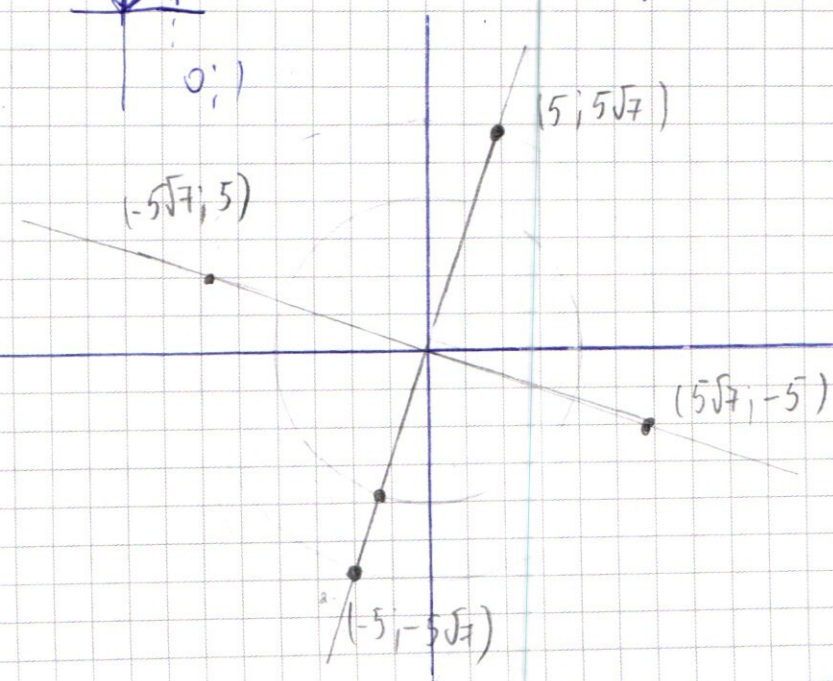
$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

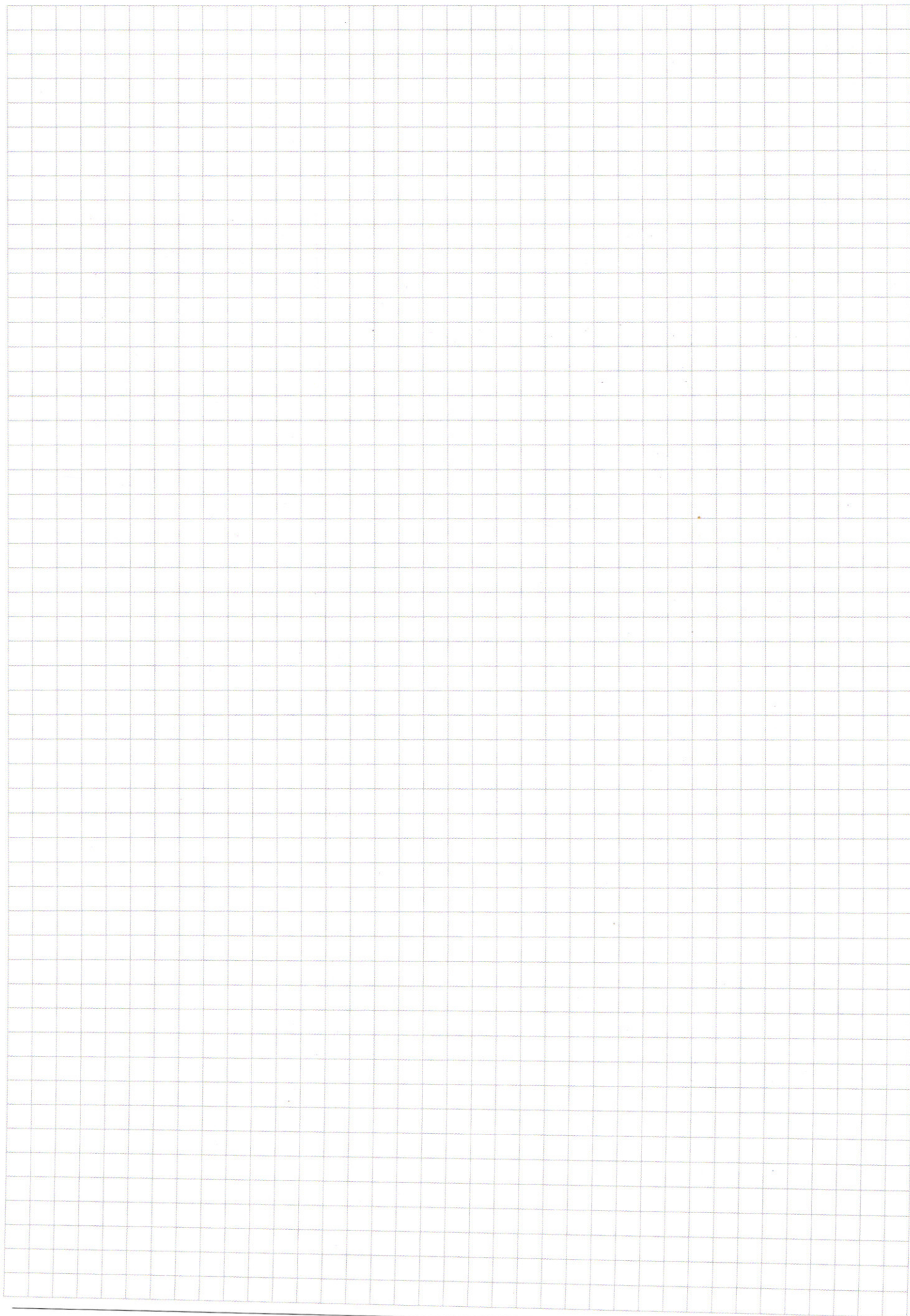
В 4 точках по 90°

$$0,25 \cdot 5 = 1,25$$

$$0,125 \cdot 5 = 0,625$$

$$\frac{5\sqrt{2} - 5\sqrt{14}}{2} \cdot 5\sqrt{2}$$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7. \begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 \\ (|x-8|^2 + |y-6|^2 = a \end{cases}$$

При $x > 0, y > 0$

$$(x-8)^2 + (y-6)^2$$

При $x > 0, y < 0$

$$(x-8)^2 + (y+6)^2$$

-8, 1

-1, -6

h5

$$y-6-x=0$$

$$y-6+x=0$$

$$y=6-x$$

$$y=6+x$$

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

$$y=12$$

$$a=4$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$196 - 9 = 205$$

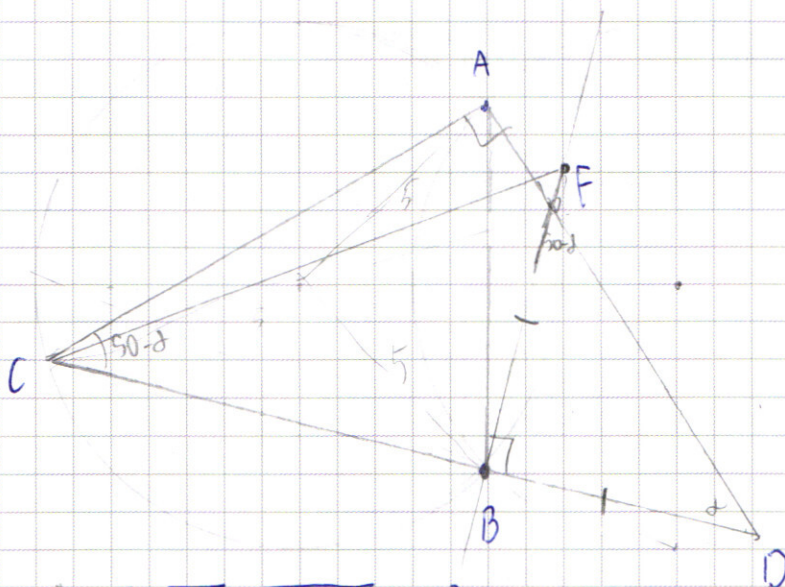
$$14, 3$$

$$36 + x^2 = 205$$

$$x^2 = 169$$

$$x = 13$$

Найдем $a=4$



$$r=5$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline 86 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad 10x \quad 24 \\ x^2 \quad x^4 \quad 10x^3 \quad 24x^2 \\ 10x \quad 10x^3 \quad 100x^2 \quad 240x \\ 24 \quad 24x^2 \quad 240x \quad 576 \end{array}$$

$$\left(\frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 20} = x^2 + 10x + 24$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + 6x + 12\right)(x^3 - 4x + 20) = x^5 + 20x^3 + 148x^2 + 480x + 576$$

$$(x^2 + 12x + 36)(x^3 - 4x + 20) = 2x^5 + 40x^3 + 296x^2 + 560x + 1152$$

$$x^5 + 12x^4 + 32x^3 + 768x^2$$

$$x^5 + 12x^4 + 32x^3 + 80x^2 + 768x + 2840 =$$

$$= 2x^4 + 40x^3 + 296x^2 + 560x + 1152$$

$$2x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 216x^2 - 192x + 1688 = 0$$

$$1 \quad 10 \quad -8 \quad -216 \quad -192 \quad 1688$$

$$2 \quad 1 \quad 12 \quad 16 \quad -184$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 | x - 2 | + 4 \geq 0$$

$$\text{При } x \geq 2$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2 + 6x^2 + 4 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$2 \quad -3 \quad 7 \quad -4 \quad 4$$

$$1 \quad 1 \quad -1 \quad 6 \quad -2$$

$$-1 \quad 1 \quad -4 \quad 11 \quad -15 \quad 19$$

$$2 \quad 1 \quad -1 \quad -5 \quad -14$$

$$-2 \quad 1 \quad -3 \quad 17$$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad -4x \quad 80 \\ x^2 \quad x^5 \quad -4x^3 \quad 80x^2 \\ 12 \quad 12x^4 \quad -48x \quad 560x \\ 36 \quad 36x^3 \quad -144x \quad 2840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10/10 \\ -2840 \\ \hline 1152 \\ 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -184 \\ \hline 368 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ -2 \\ \hline 10 \\ -216 \\ \hline 32 \\ 184 \end{array}$$