

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$5 + 14 \quad 15$$

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$5 + 8 \quad 14 \quad 15$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 7

$$\begin{cases} |y+x+8| + |y+8-x| = 16 \\ (|x|-15)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$$

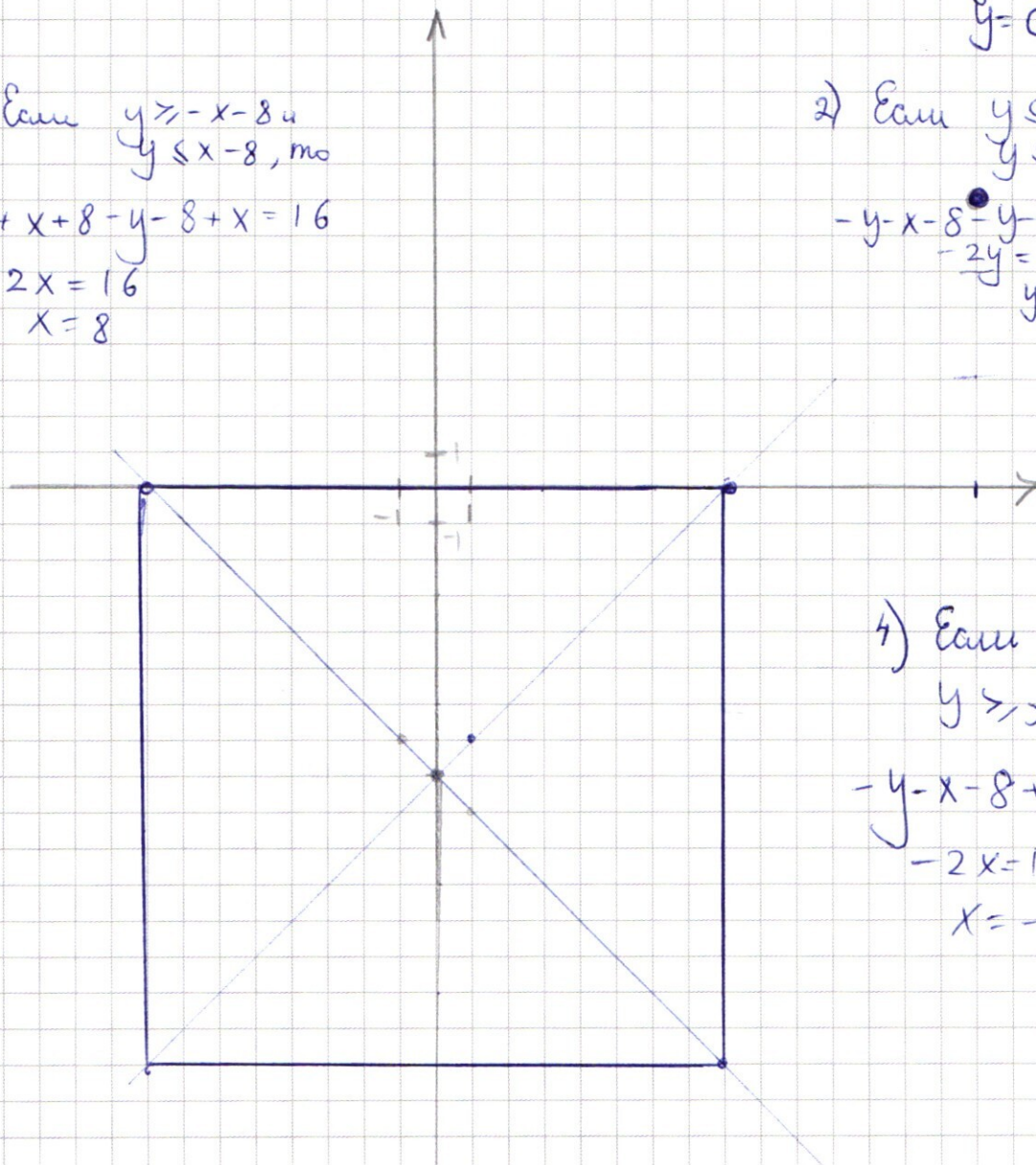
3) Если $y \geq -x-8$ и $y \leq x-8$, то

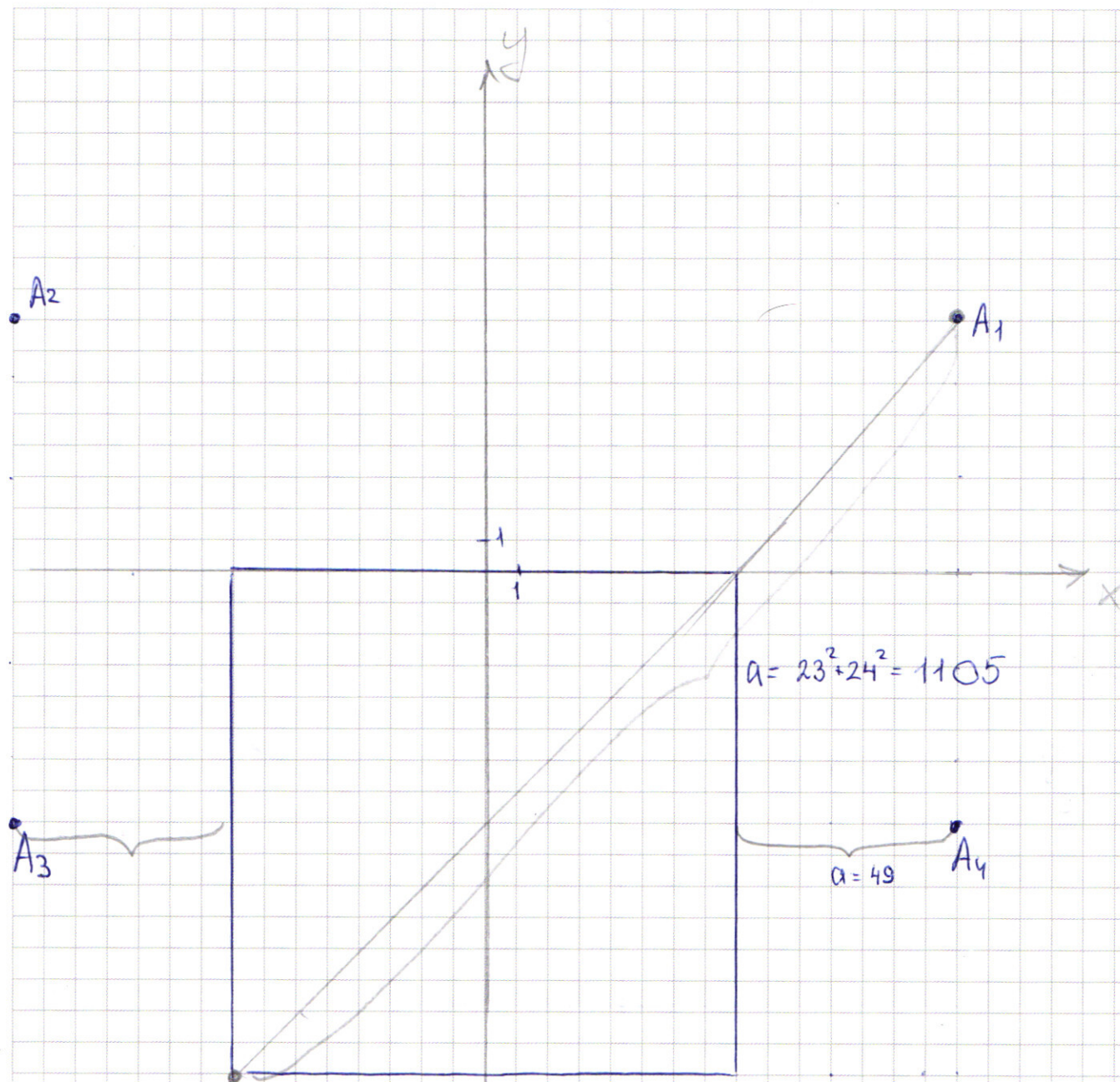
$$\begin{aligned} y+x+8-y-8+x &= 16 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

1) Если $y+x+8 \geq 0$,
 $y \geq -x-8$ и $y+8-x \geq 0$,
 $y \geq x-8$, то
 $y+x+8+y+8-x=16$
 $2y=0$
 $y=0$

2) Если $y \leq -x-8$ и $y \leq x-8$, то
 $-y-x-8-y-8+x=16$
 $-2y=32$
 $y=-16$

4) Если $y \leq -x-8$ и $y \geq x-8$, то
 $-y-x-8+y+8-x=16$
 $-2x=16$
 $x=-8$





Ответ: $a = 49$
 $a = 1105$

- 1) Если в I четверти,
 то $(x-15)^2 + (y-8)^2 = a$
- 2) Если в II четверти,
 $(x+15)^2 + (y-8)^2 = a$
- 3) Если в III четверти,
 то $(x+15)^2 + (y+8)^2 = a$
- 4) Если в IV четверти,
 то $(x-15)^2 + (y+8)^2 = a$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ЗАДАЧА 1

$$4900 = 100 \cdot 49 = 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Значит, число состоит или из 2, 2, 5, 5, 7, 7, 1, 1
или из 1, 1, 1, 4, 5, 5, 7, 7

Тогда, посчитаем сколько всего таких чисел.

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 21 \cdot 120 = 2520$$

т.к.
4 пары одинаковых
цифр

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 14 \cdot 120 = 1680$$

$$1680 + 2520 = 4200$$

Ответ: 4200 чисел.

ЗАДАЧА 3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\cancel{\frac{x+10}{4}} \sqrt{2x^3 - 128x + 400} = \frac{(x^2 + 6x - 40)4}{x+10} \quad x \neq -10$$

$$(x^2 + 6x - 40)4 = \begin{array}{r} 4x^2 + 24x - 160 \quad | \quad x+10 \\ \underline{4x^2 + 40x} \\ -16x - 160 \\ \underline{-16x - 160} \\ 0 \end{array}$$

$$(4x - 16) = \sqrt{2x^3 - 128x + 400}$$

$$16x^2 + 256 - 2 \cdot 4 \cdot 16x = 2x^3 - 128x + 400$$

$$8x^2 + 128 - 64x = x^3 - 64x + 200$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x = 6, \quad \begin{array}{r} x^3 - 8x^2 + 72 \quad | \quad x-6 \\ \underline{x^3 - 6x^2} \\ -2x^2 + 72 \\ \underline{-2x^2 + 12x} \\ -12x + 72 \\ \underline{-12x + 72} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 12 = 48 + 4 = 52$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{13}; 6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_4}{2} = \frac{18\pi + S_4}{2,52}$$

$$2,5 S_4 = 18\pi + S_4$$

$$1,5 S_4 = 18\pi$$

$$S_4 = \frac{18 \cdot 10}{15} = 2 \cdot 6 = \underline{12\pi}$$

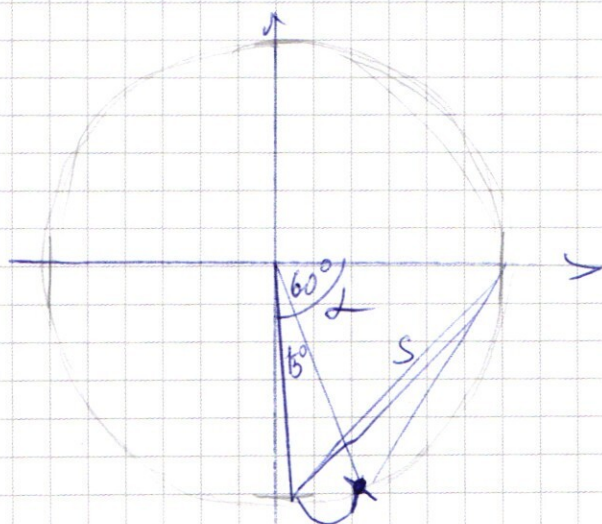
$$\frac{S_5}{2} = \frac{24\pi + S_5}{2,52}$$

$$2,5 S_5 = 24\pi + S_5$$

$$1,5 S_5 = 24$$

$$S_5 = \frac{24 \cdot 10}{15} = 2 \cdot 8 = \underline{16\pi}$$

Таким образом у кесаря, находясь
с места зр. ~~вс~~ находится, 16^{ти} положений:
1,5π; 4π; 8π; 12π; 16π



у перес
Чтобы найти координату
положения, возьмем угол 2
 $36 \times 36 = 72 \cdot \cos 2 = S$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

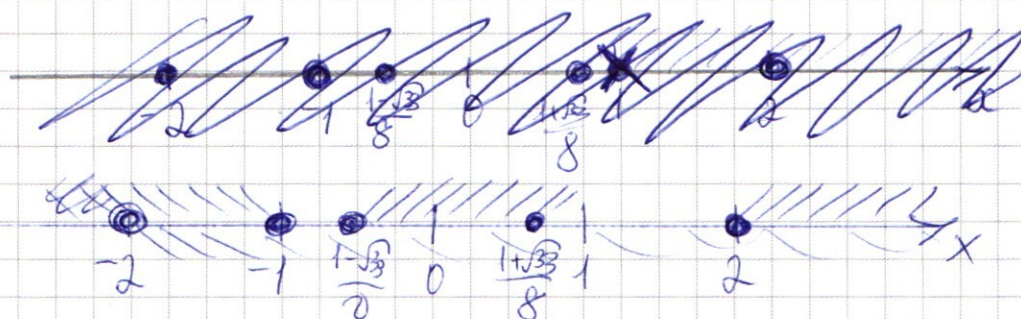
Для $x \geq -2$;

$$4x^4 + x^2 + 4x - 3x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 10x^2 + x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x = -1 \text{ и } x = 2; \quad (x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



Ответ: $[-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

Для $x \leq -2$

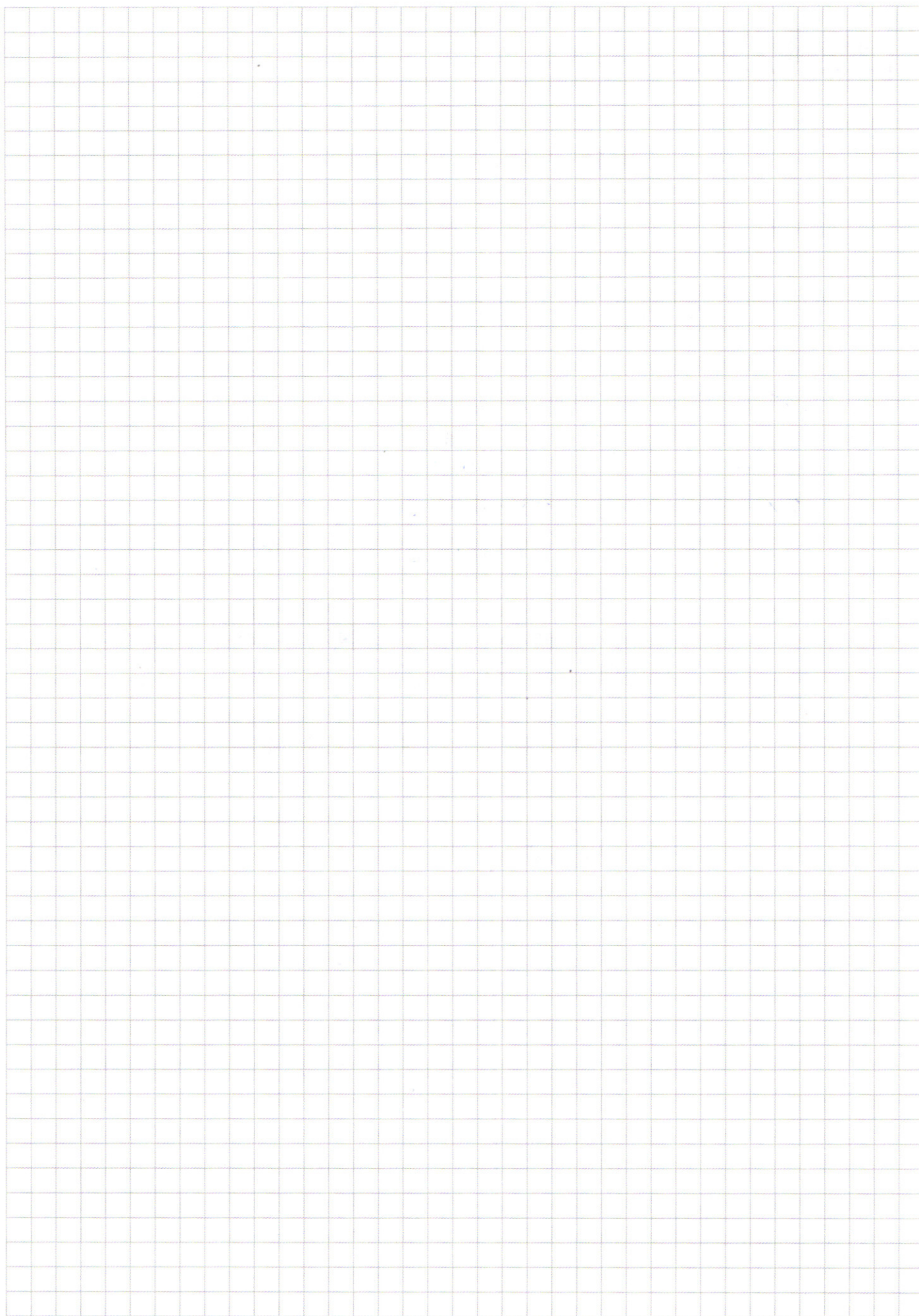
$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(-x-2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

При любых $x \leq -2$, данное выражение ≥ 0

Поэтому

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sqrt{2x+10}}{4} \sqrt{x^3-64x+200} = x^2+6x-40$$

~~40~~

$$\frac{x+10}{4} \sqrt{2x^3-128x+400} = (x^2+6x-40)4$$

$$\begin{array}{r} 4x^2+24x-160 \quad | \quad x+10 \\ \underline{4x+40x} \quad \quad 4x+16 \\ -16x-160 \end{array}$$

$$4x-16 = \sqrt{\quad}$$

$$16x^2+256-8 \cdot 16x = 2x^3-128x+400$$

$$8x^2+128-64x = x^3-64x+200$$

$$x^3-8x^2+72=0$$

$$\textcircled{\text{X}} = x^2(x-8)+72=0$$

$$x=6$$

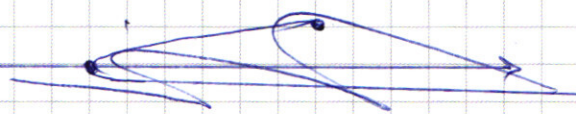
$$\begin{array}{r} x^3-8x^2+72 \quad | \quad x-6 \\ \underline{x^3-6x^2} \quad \quad x^2-2x-12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2+72 \\ \underline{-2x^2+12x} \\ -12x+72 \\ \underline{-12x+72} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2-2x-12$$

$$4+48$$

4x4



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - 9 + 1,5S = x_2^2 + y_2^2 - 36$$

$$25 + 1,5S = (x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2)$$

$$\frac{1,5}{360}$$

$$\frac{1,5}{360}$$

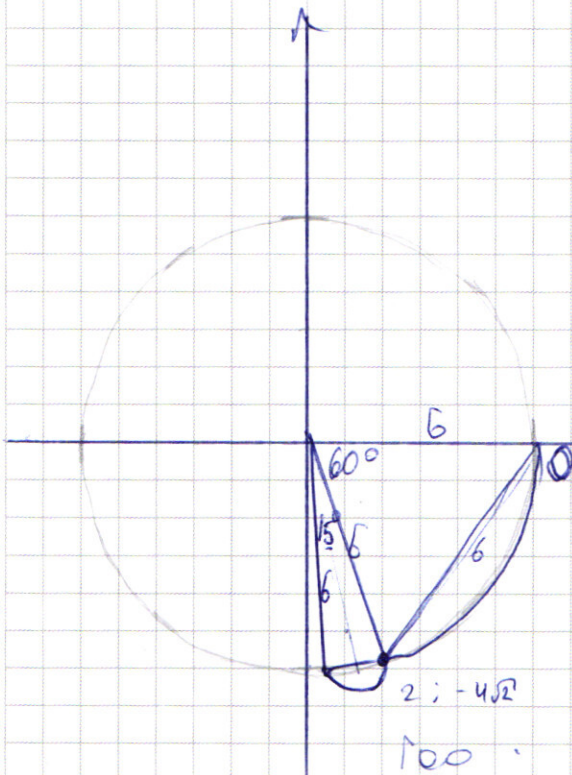
$$\frac{1 \cdot 360}{24} = 15$$

$$\frac{1}{36} \quad \left(\frac{1}{9} \right)$$

$$\sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2}$$

$$\frac{1,5}{36}$$

6



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

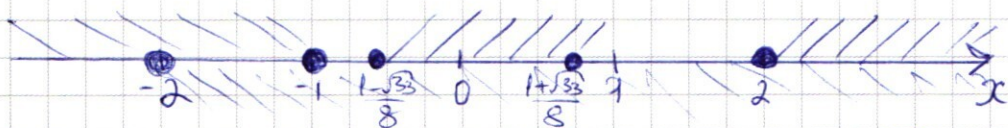
$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2/(x+2) + 4 \geq 0$$

Если $x \geq -2$, то $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



Ответ: $[-2; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [2; +\infty)$

Если $x \leq -2$, то $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(-x-2) + 4 \geq 0$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 11x^2 + 4 + 5x^3 + 4x \geq 0$$

у уравнение $4x^4 + 11x^2 + 4 + 5x^3 + 4x = 0$,
корни (если они есть) отрицательны

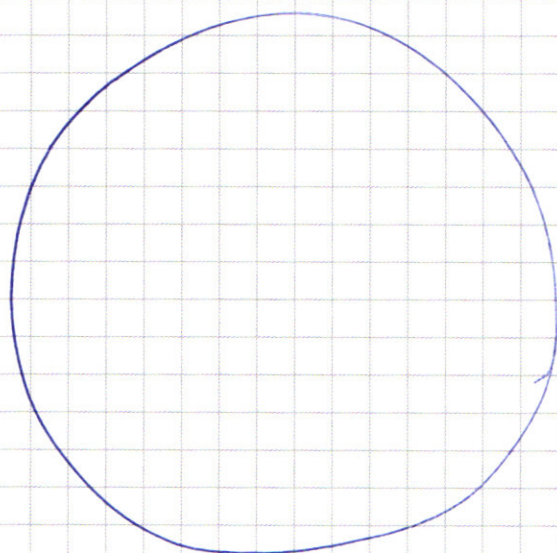
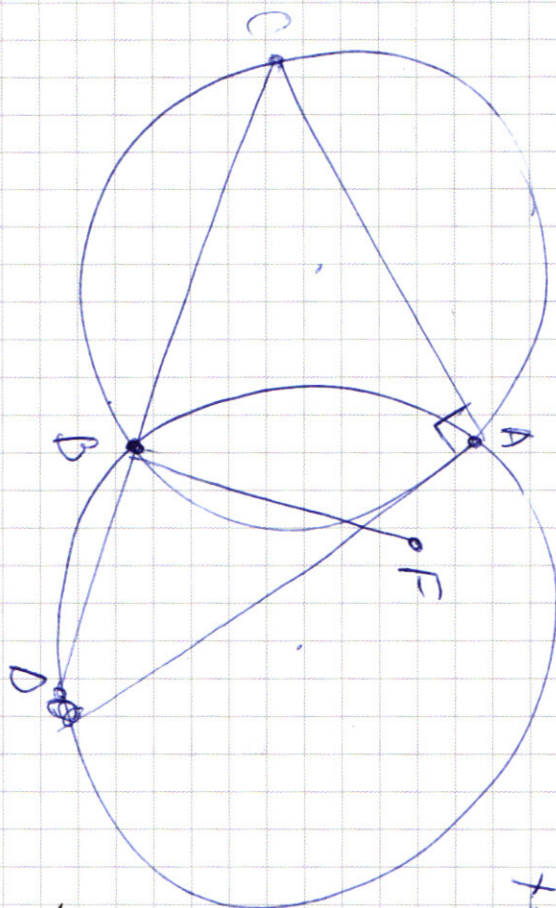
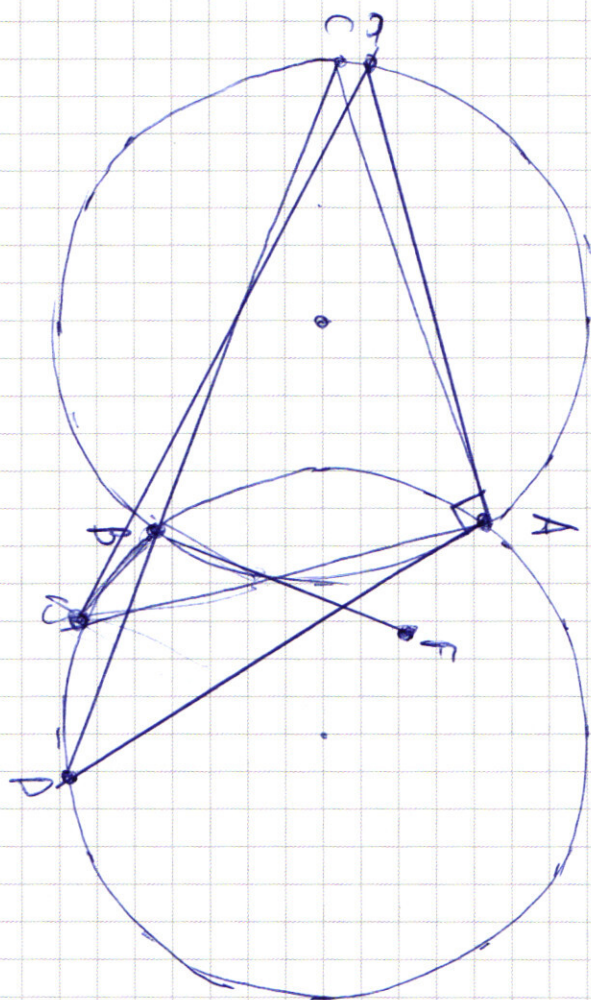
Докажем, что если они есть, то не удовлетворяют
условию $x \leq -2$

$$4x^4 + 11x^2 + 4 > -5x^3 - 4x$$

$$4x^4 + 11x^2 > -5x^3 - 4x$$

$$4x^3 + 11x < -5x^2 - 4$$

Вспомогательная левая часть,
так мы доказываем
что левая часть
больше



Х

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\frac{\sqrt{2x+10}\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$\sqrt{2x^3 - 128x + 400} \cdot \frac{x+10}{4} = \frac{(x^2 + 6x - 40) \cdot 4}{x+10}$$

$$2x^3 - 128x + 400 = \frac{4x^2 + 24x - 160}{x+10}$$

$$2x^3 - 128x + 400 = 4x - 16$$

$$2x^3 - 132x + 416 = 0$$

$$x^3 - 66x + 208 = 0$$

$$D = 66^2 - 4 \cdot 208 = 9776$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 24x - 160 \\ \underline{4x^2 + 40x} \\ -16x - 160 \\ \underline{-16x - 160} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+10 \\ 4x-16 \end{array}$$

120 · 35
5
600 · 7

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

Пусть $x \geq -2$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$-1$$

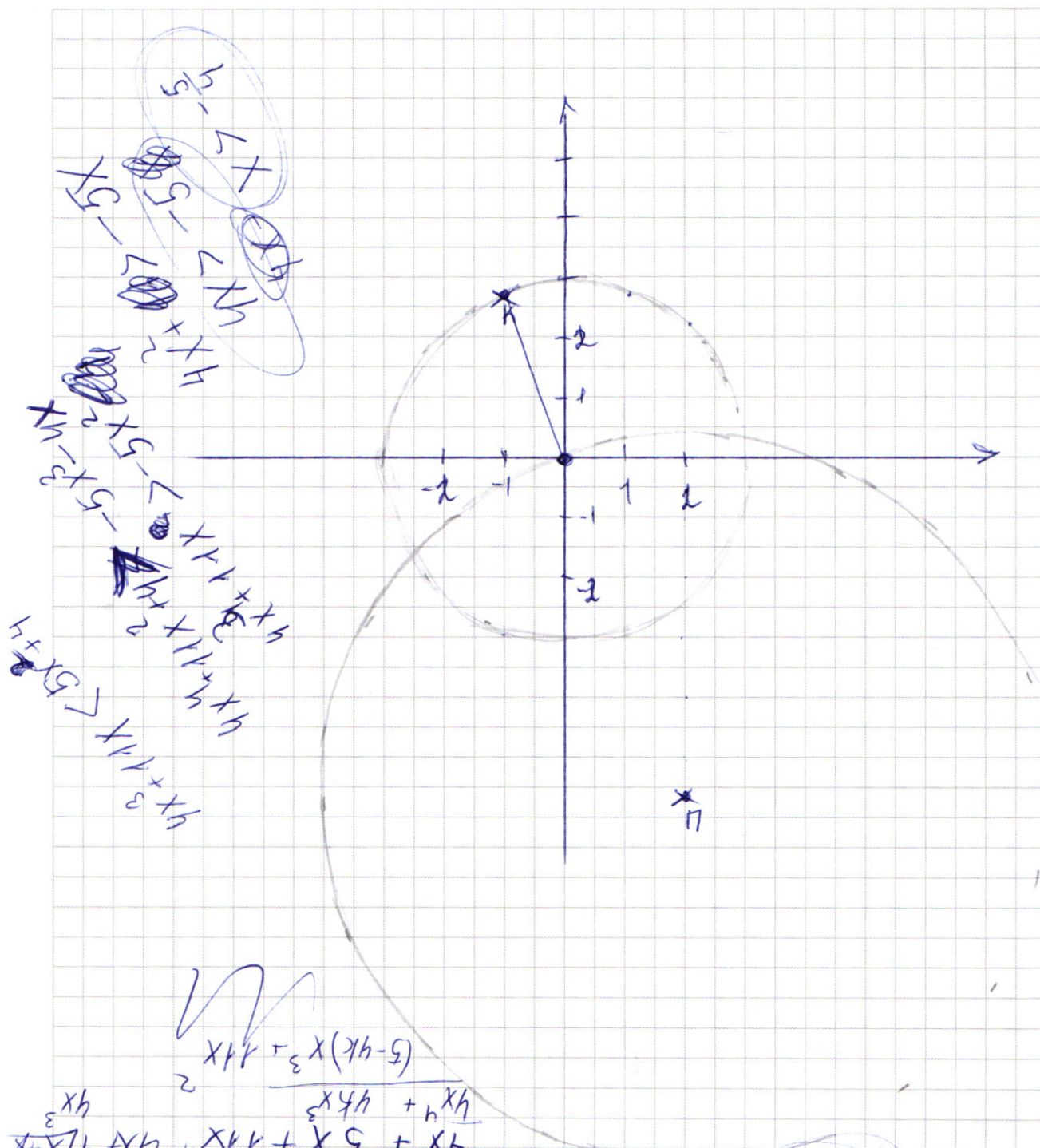
$$4 + 5 - 9 - 4 + x$$

$$(x+1) \dots$$

$$x^2(4x-9) + 4$$

$$\begin{array}{r} 120 - 120 \\ \underline{14} \quad 21 \\ 48 \quad 12 \\ \underline{12} \quad 24 \\ 1680 \quad 2520 \end{array}$$

1,2
28
R M
N N



$$\frac{(5-4k)x^3 + 11x^2}{4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4}$$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$

$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4$

$\boxed{C-1}$

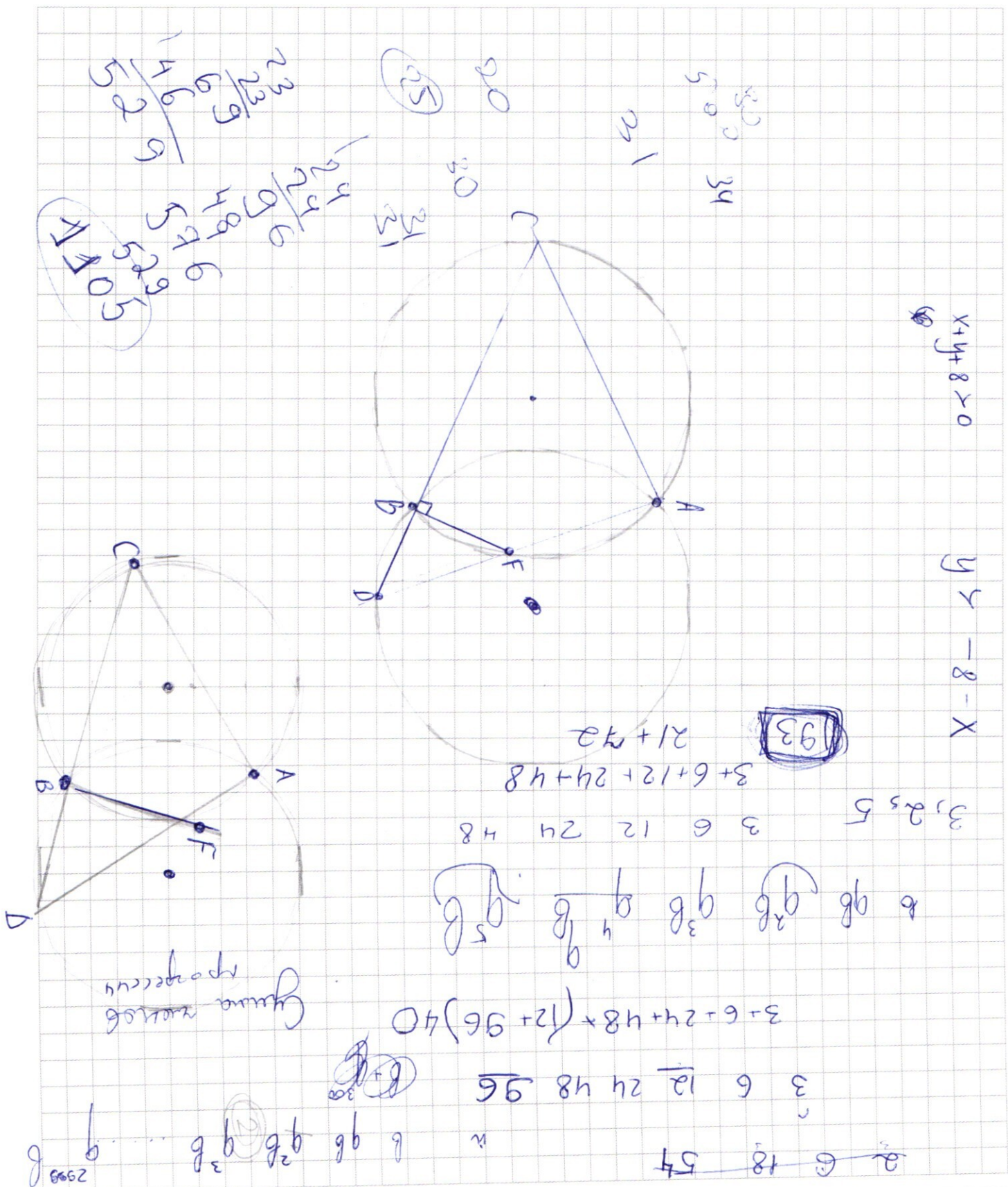
64

$$64 - 40x + 8x^2 + 4x^3$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 > 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 > 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



12 11 (23) 12

11 22 33 44 4

(6)

35

(2, 5, 7, 1)

11 22 3
11 22 3
11 23 2
6! 1232 1



4900 =
= 7.7.100
7.7.5.5.2.2

11 22 33

11 22 3

11 22 33

$X_0^2 + 13^2 - X_0$

$(X_0 - X_1)^2$

22 55
25 25
25 52
55 22
52 25
52 52

(6)

2 2 5.5 7 7 1 1
4 5 5 7 7 1 1 1

2 2 5 7

11 22 33 (8, 8)

(2, 3)

11 22 2

11 22 2
12 1 2 2
1 2 2 2 1
1 2 2 1 2
2 1 1 2 2
2 2 1 1 2
2 2 2 1 1
2 1 2 1 2
2 2 2 2 1
2 2 1 2 1

3 3 2 2 1 1
3 3 1 1 2 2
3

22 55
1 2 2 2

(4, 3, 2, 1)

5.4.3.2
2.3.2

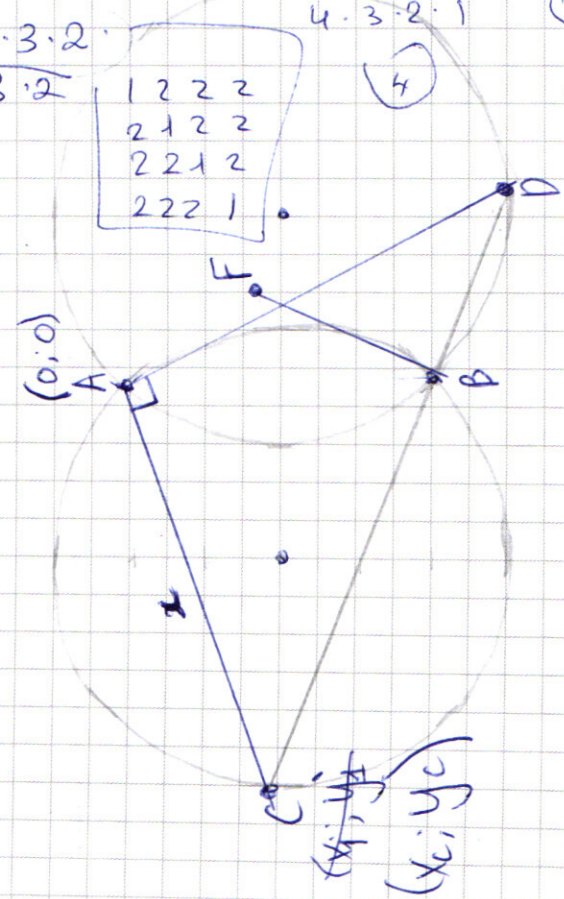
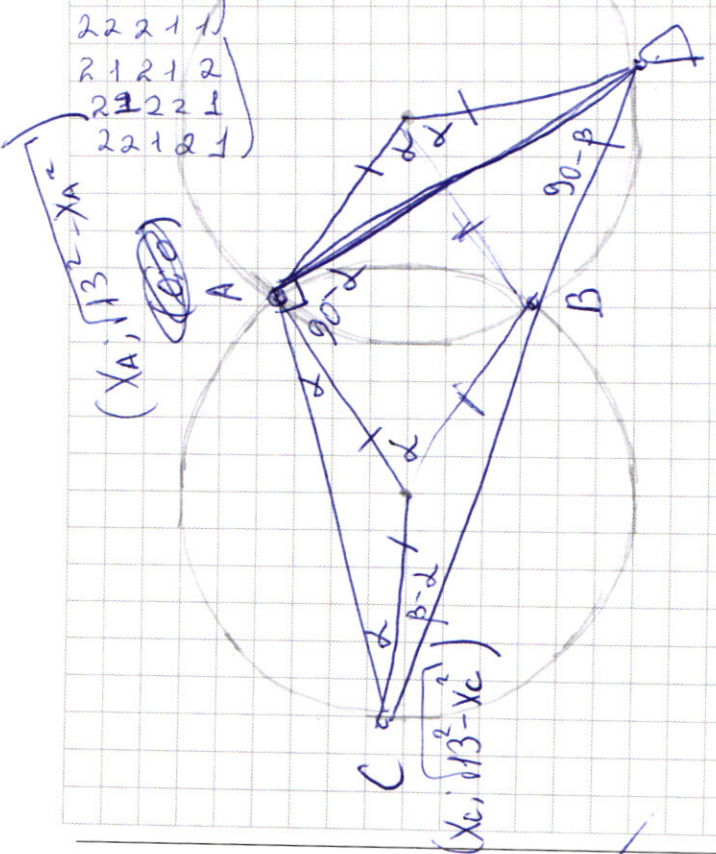
4.3.2.1

(24)

1 2 2 2
2 1 2 2
2 2 1 2
2 2 2 1

(4)

2



$y^2 + x^2 = 13^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

Если $x \geq -2$, то

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \quad | \quad x+1 \\ \underline{4x^3 + 4x^2} \\ -9x^3 - 9x^2 \\ \underline{-9x^3 - 9x^2} \\ 0 + 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 4 \quad | \quad x-2 \\ \underline{4x^3 - 8x^2} \\ -x^2 + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x + 4 \\ \underline{-2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0$$

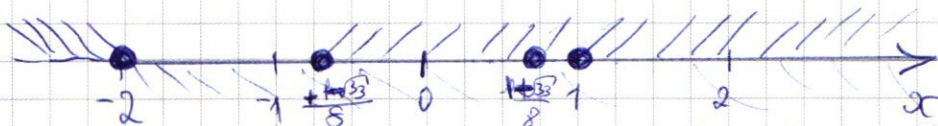
$$(x+1)(4x^3 - 9x^2 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(4x^2 - x - 2) \geq 0$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 33$$

$$x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \geq 0$$



$$\text{Ответ: } \{-2\} \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right] \cup [1; +\infty)$$

$$2,5S - 6 = S - 3$$

$$1,5S = 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6 + 2,5S &= \\ &= x^2 + y^2 - 36 + S \end{aligned}$$

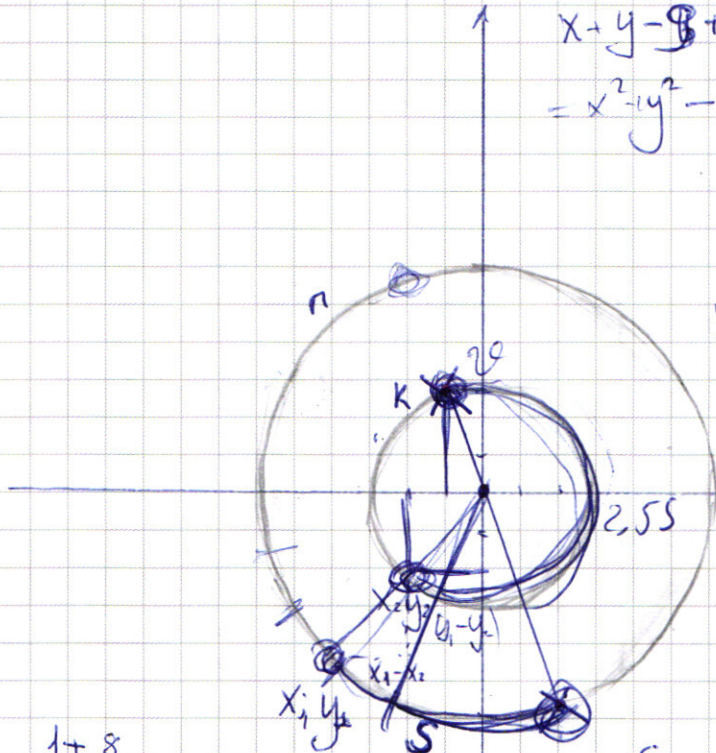
$$x^2 + y^2 = 3 \quad S = 0,5$$

$$x^2 + y^2 = 6 \quad S = 2$$

$$1,5S = -28$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 9$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6 + 2,5S &= x_2^2 + y_2^2 = 36 \\ &= x^2 + y^2 - 3 + S \end{aligned}$$



$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$1 + 8$$

$$4 + 32 \quad \left(\frac{1}{20}\right) 2\pi$$

$$\frac{S}{12\pi} = \frac{2,5S}{5 \cdot 12\pi}$$

$$y = kx$$

$$k = 2\sqrt{2}$$

$$k = -2\sqrt{2}$$

$$y = -2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$$

$$12\pi$$

$$\left(\frac{6\pi}{12\pi}\right)$$

$$\frac{6\pi}{2,5\pi}$$

$$\frac{12\pi}{2\pi}$$

$$\left(\frac{2}{12\pi}\right) \left(\frac{1}{6\pi}\right)$$

$$\frac{60}{25}k$$

$$12k$$

$$\frac{12}{5}k$$

$$12k$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 25$$

$$\frac{5}{5} = x$$

$$S = x_h$$

$$8 + S = x_h$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 3$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 9$$