

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

I Представим число 700, т.е. $700 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2$, как
видим у нас 2 варианта как может выглядеть
числа из которых составлено восьмизначное число

1. 7, 5, 5, 2, 2, 1, 1, 1

2. 7, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 1

Итак для 1. случая у нас N_1 вариантов,
а для 2. случая N_2 вариантов

$N_1 = 8 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2$ - варианты как мы можем
поставить 7, 5, 5, 2, 2 на 8 мест

$$N_1 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1600 + 80 = 1680 \text{ вариантов}$$

$$N_2 = 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 40 \cdot 21 = 800 + 40 = 840$$

$$N = N_1 + N_2 = 1680 + 840 = 2520 \text{ вариантов.}$$

N2.

$$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} - \text{сумма первых } n \text{ членов геометрической последовательности.}$$

$$S = b_1 \frac{1 - q^{3000}}{1 - q} - \text{сумма изначальной последовательности}$$

$$S_3 = b_{13} \frac{1 - q_3^{1000}}{1 - q_3} - \text{сумма членов с номерами : 3.}$$

$$b_{13} = b_1 \cdot q^2 \quad q_3 = q^3 \Rightarrow S_3 = b_1 q^2 \frac{1 - q^{3000}}{1 - q^3}$$

Многа $S' = S + 50S_3 - S_3 = S + 49S_3 = 10S$

$$49S_3 = 9S$$

$$49 \cdot b_1 q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} = 9 \cdot b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} \quad \underline{q \neq +1}$$

$$\frac{q^2(1-q)}{1-q^3} = \frac{9}{49} \Rightarrow (1-q) = \frac{9}{49} \cdot \frac{1-q^3}{q^2}$$

$$S_2 = b_{12} \frac{1-q_2^{1500}}{1-q_2} - \text{сумма элементов с геометрической прогрессией}$$

$$b_{12} = b_1 q \quad q_2 = q^2$$

$$S + 2S_2 - S_2 = S + S_2 = n \cdot S \Rightarrow S_2 = (n-1)S$$

$$b_1 q \frac{1-q^{3000}}{1-q^2} = (n-1) b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q}$$

$$\frac{q(1-q)}{1-q^2} = n-1$$

$$(1-q) = \frac{(n-1)(1-q^2)}{q}$$

$$\frac{q}{49} \cdot \frac{1-q^3}{q^2} = \frac{(n-1)(1-q)^2}{q} \quad \underline{q=0}$$

$$\frac{q}{49} \cdot (1+q+q^2) = (n-1)(1+q)$$

$$qq^2 + qq + q - 49(n-1)(1+q) = 0$$

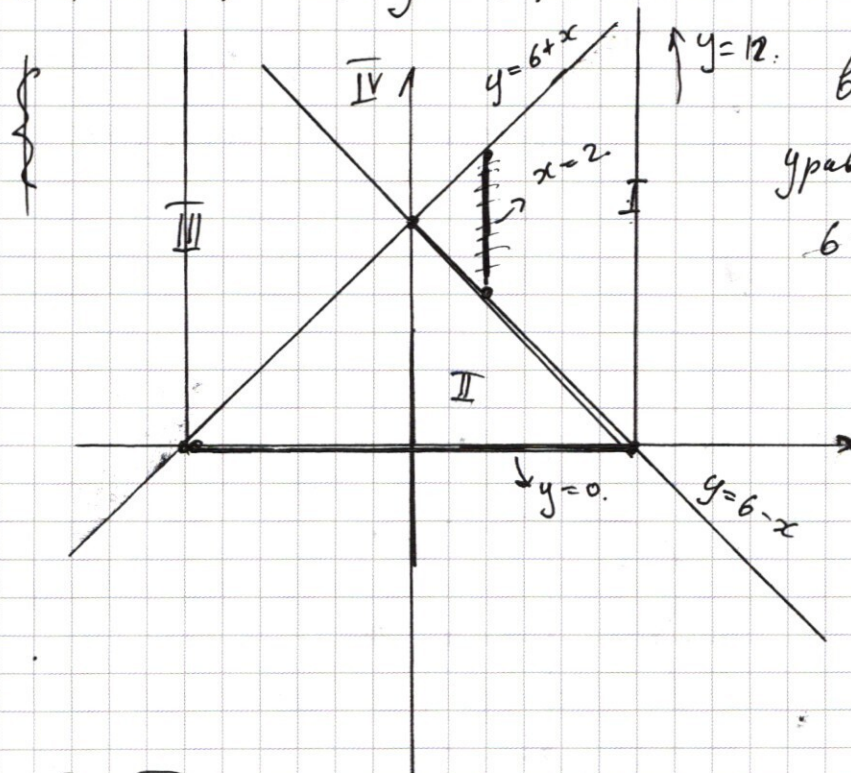
$$qq^2 + qq - 49nq + 49q + q - 49n + 49 = 0$$

$$qq^2 + q(q - 49n + 49) + q - 49n + 49 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12. & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$



в I плоскости. (1)
уравнение имеет вид.

$$6+x-y + y-6+x = 12.$$

$$2x = 12.$$

$$x = 6.$$

в II

$$6+x-y + 6-x-y = 12$$

$$12 - 2y = 12.$$

$$y = 0.$$

в III

$$y-6-x + 6-x-y = 12.$$

$$-2x = 12$$

$$x = -6$$

в IV плоскости

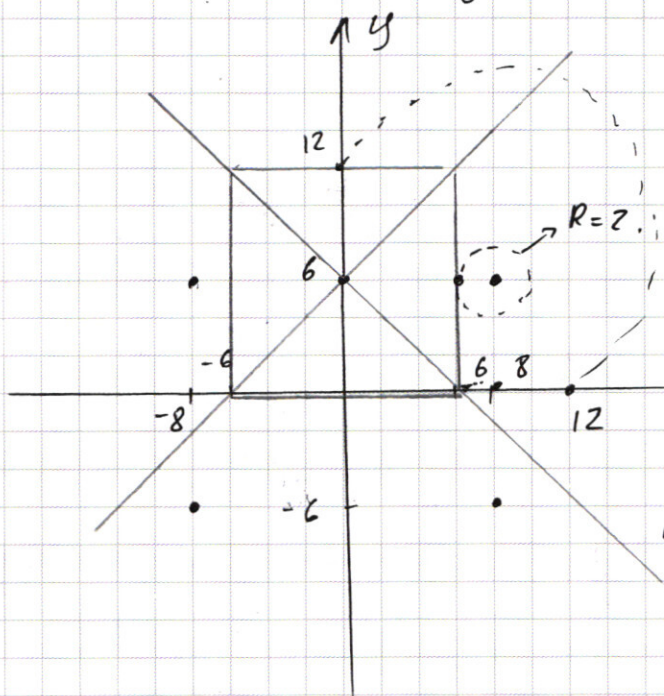
$$y-6-x + y-6+x = 12.$$

$$2y - 12 = 12.$$

$$y = 12.$$

Получили квадрат.

$$(2) \quad (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a.$$



Данное уравнение задает 4 точки с координатами

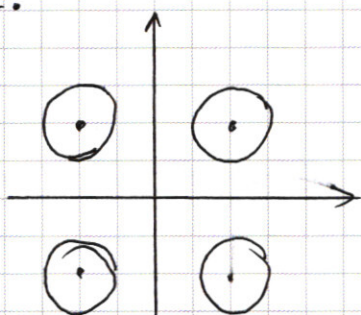
$$(8; 6); (8; -6)$$

$$(-8; 6); (-8; -6)$$

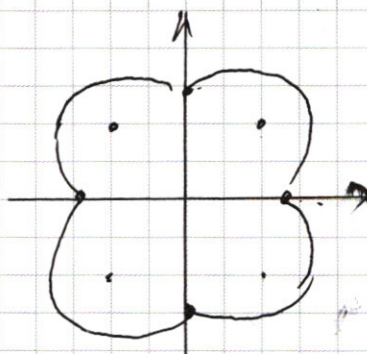
и график будет иметь следующий

варианты:

1.



2.



Чтобы было 2 корня $a = R^2 = 2^2 = 4$
 $a = R^2 = \sqrt{8^2 + 6^2}^2 = 100$ и $a \in [36; 100)$

Ответ: $a = 4$ ~~$a = 100$~~ $a \in [36; 100]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x-2| + 4 \geq 0.$$

• $x - 2 \geq 0$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0.$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 14x - 4 \quad \text{на интервале } x \in [2; +\infty)$$

$f'(x) > 0$ и $f(x) > 0 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает $\Rightarrow$ При $x \geq 0$ $f(x) > 0$ всегда.

• $x - 2 < 0$

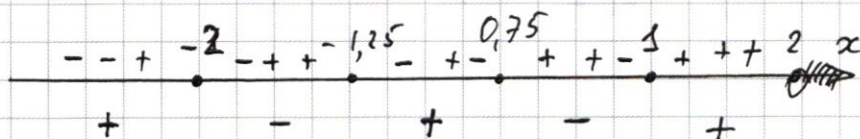
$$2x^4 + x^2 - 4x + 3x^2 - 6x^2 + 4 \geq 0.$$

$$2x^4 + 3x^2 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0.$$

$$(x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0.$$

$$(x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0.$$

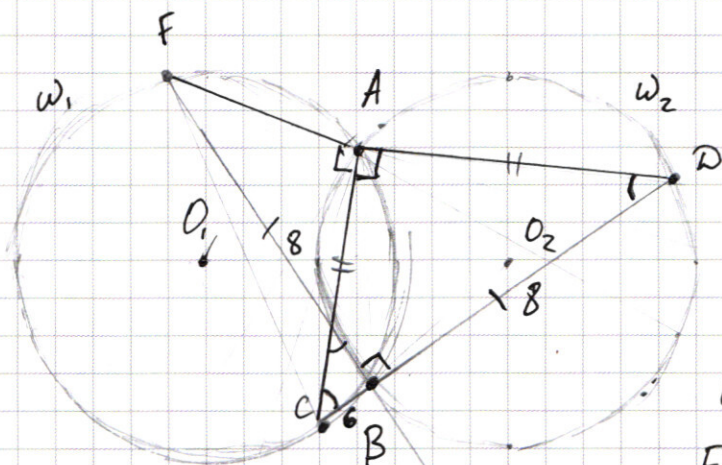
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \quad x_1 \approx -1,25 \quad x_2 \approx 0,75.$$



$$x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; 2)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$

N 6.



1) $\angle CAD = 90^\circ$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

Д т.к. окружности
одинаковые, то
градусная мера $\widehat{AB}$
одинакова. $\Rightarrow$
F лежит на дуге

AD.

$$\cancel{BF} = \cancel{BD} \quad \cancel{CD} = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \cancel{CB} + \cancel{BD}, \text{ m.e.}$$

$\angle CAF = 90^\circ \Rightarrow CFA$ -прямоугольный
треугольник $\Rightarrow CF = 2R = 10$.

2) $CB = 6 \Rightarrow BF = \sqrt{100 - 36} = 8. \Rightarrow CD = 6 + 8 = 14$
 $FD = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}.$

$$CA = AD = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$FA = \frac{1}{2} \sqrt{2} \Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} AF \cdot CA = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

Orubem: $CF = 10$; $S_{ACF} = 7$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{3000} = b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} = S$$

$$S_{1000} = b_1' \frac{1-q_1^{1000}}{1-q_1} = b_1 \cdot q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} \Rightarrow 50 \cdot S_{1000} = 10S$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2 \quad b_2 = b_1 \cdot q^5 \quad b_3 = b_1 \cdot q^8 \Rightarrow (b_1 q^2) \cdot q^{n3}$$

$$b_1 q^2 \cdot q^3 \quad b_1 q^2 \cdot q^6$$

$$50 \cdot q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} = 10 \cdot b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q}$$

$$\frac{(1-q)q^2}{1-q^3} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5q^2}{1-q^3} = \frac{1}{1-q}$$

$$-5q^3 + 5q^2 = 1 - q^3 \Rightarrow 4q^3 - 5q^2 + 1 = 0$$

$$(q-1)(4q^2 - q - 1)$$

$$(q-1) \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \right)$$

$$S_{1500} = b_1'' \frac{1-q_2^{1500}}{1-q_2} = b_1 q \frac{1-q^{3000}}{1-q^2}$$

$$\frac{2b_1 q \frac{1-q^{3000}}{1-q^2}}{b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q}} = \frac{2q(1-q)}{1-q^2} = \frac{S_1}{S}$$

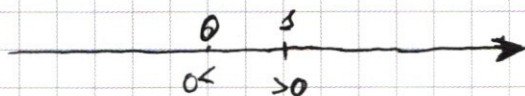
$$\frac{2q}{1+q} = \frac{S_1}{S}$$

$$\frac{q^2}{q(1+q+q^2)} = \frac{1}{5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} = 5$$

$$8x^3 - 9x^2 + 14x - 4 = 0$$

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$$

$$64 - 36 + 28 - 4 > 0$$



$$S + 50b, q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} - b, q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} = S + 49b, q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} = 10S.$$

$$S + 2b, q \frac{1-q^{300}}{1-q^2} - b, q \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} = S + b, q \frac{1-q^{3000}}{1-q^2}$$

$$q \cdot b, \frac{1-q^{3000}}{1-q} = 49 \cdot b, q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3}$$

$$32 - 24 + 28 - 8 + 4 > 0.$$

$$9 - 9q^3 = 49q^2 - 49q^3$$

$$40q^3 - 49q^2 + 9 = 0.$$

$$(q-1)(40q^2 - 9q - 9) = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 9 \cdot 40}}{80}.$$

$$S + b, q \frac{1-q^{3000}}{1-q^2} = (n-1) \cdot b, \frac{1-q^{3000}}{1-q}$$

$$\frac{q}{1-q^2} = (n-1) \frac{1}{1-q}$$

$$3000$$

$$2000 + 8000 =$$

$$80 = 4 \cdot 5 \cdot 2$$

$$x(x^2 - 4) = -80.$$

$$q = \frac{1+q}{1-q} (n-1) = nq + n - 1$$

$$q(n-1) + n - 1 = 0.$$

$$q = 1.$$

$$q - q^2 = (1 - q^2)(n-1)$$

$$q - q^2 = -q^2 n + q^2 - 1 + n$$

$$q^2(n-2) + q + n - 1 = 0.$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(n-1)(n-2)}}{2(n-2)}.$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = -216 + 24 + 80.$$

$$= x^2 + 10x + 24$$

$$x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$48 = x_1 x_2 x_3$$

$$20 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

$$-2 = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 = -(2 + x_2 + x_3)$$

$$-2x_1 - x_2^2 - 2x_3 - x_2 x_3 - x_3^2 + 20.$$

$$20 = -(2 + x_2 + x_3)x_2 + x_2 x_3 + -(2 + x_2 + x_3)x_3 =$$

$$= -2x_2 - x_2^2 + x_2 x_3 - 2x_3 - x_2 x_3 - x_3^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$700 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2$$

8 мест.

$$8 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 40 \cdot 10 = 400$$

$$C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$q = \text{const.}$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$8x^3 - 9x^2 + 14x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 64 - 36 - 28 - 4 \\ -64 -4 \end{array}$$

№ 2.

$$b_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} = S$$

$$\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{x^3-4x+80} =$$

$$= x^2 + 10x + 24$$

$$(x^2+6)(x+4)$$

$$b_3 = b_1 \cdot q^2$$

$$b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$b_9 = b_1 \cdot q^8$$

$$[x = -6]$$

$$x^3 - 4x + 80 = x^2 + 10x + 24$$

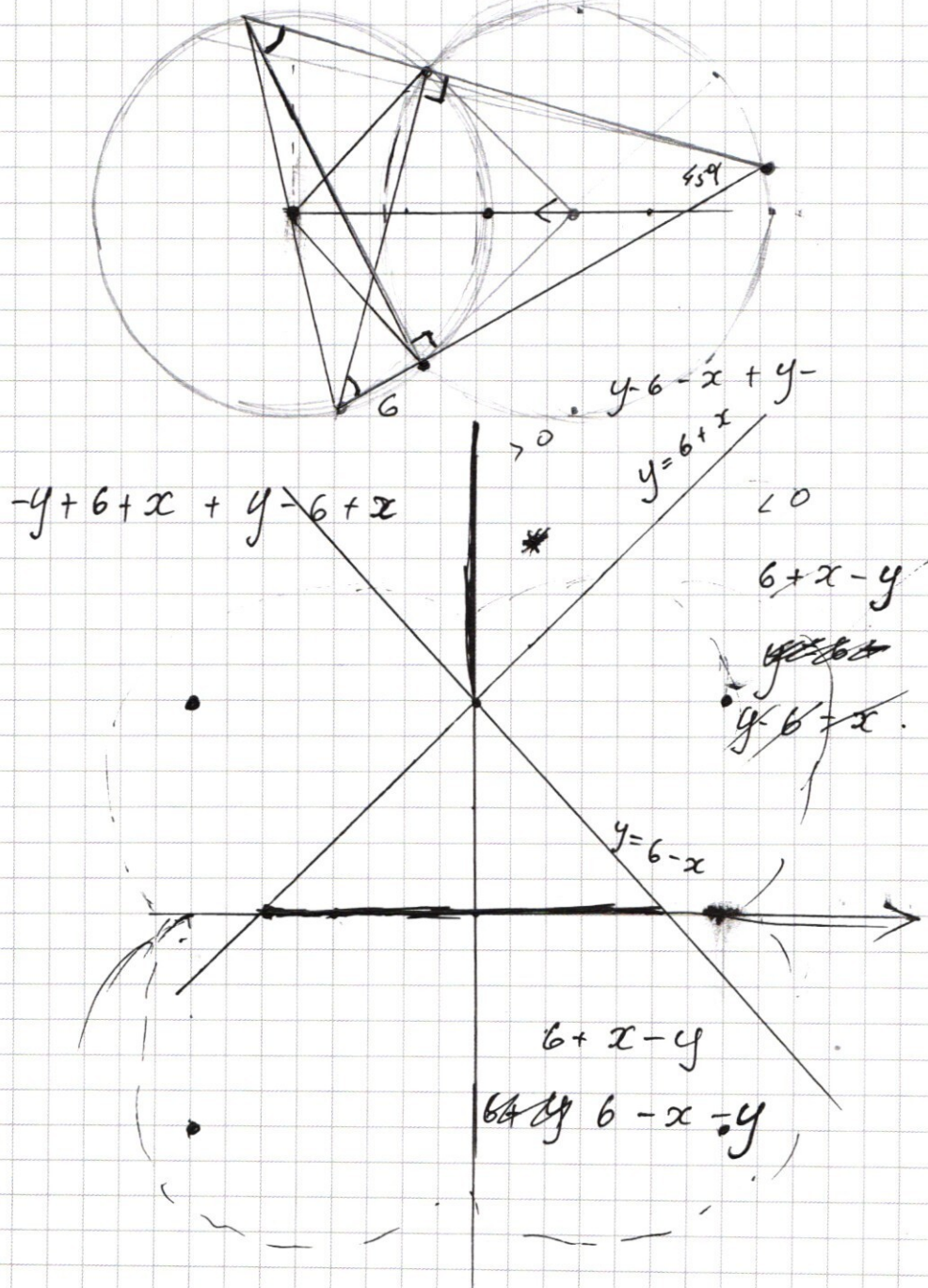
$$b_3 \frac{1-q^{3n}}{1-q^3} = b_3 \frac{1-q^{3000}}{1-q^3} = 50 \cdot b_1 \cdot q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^2} = 10S$$

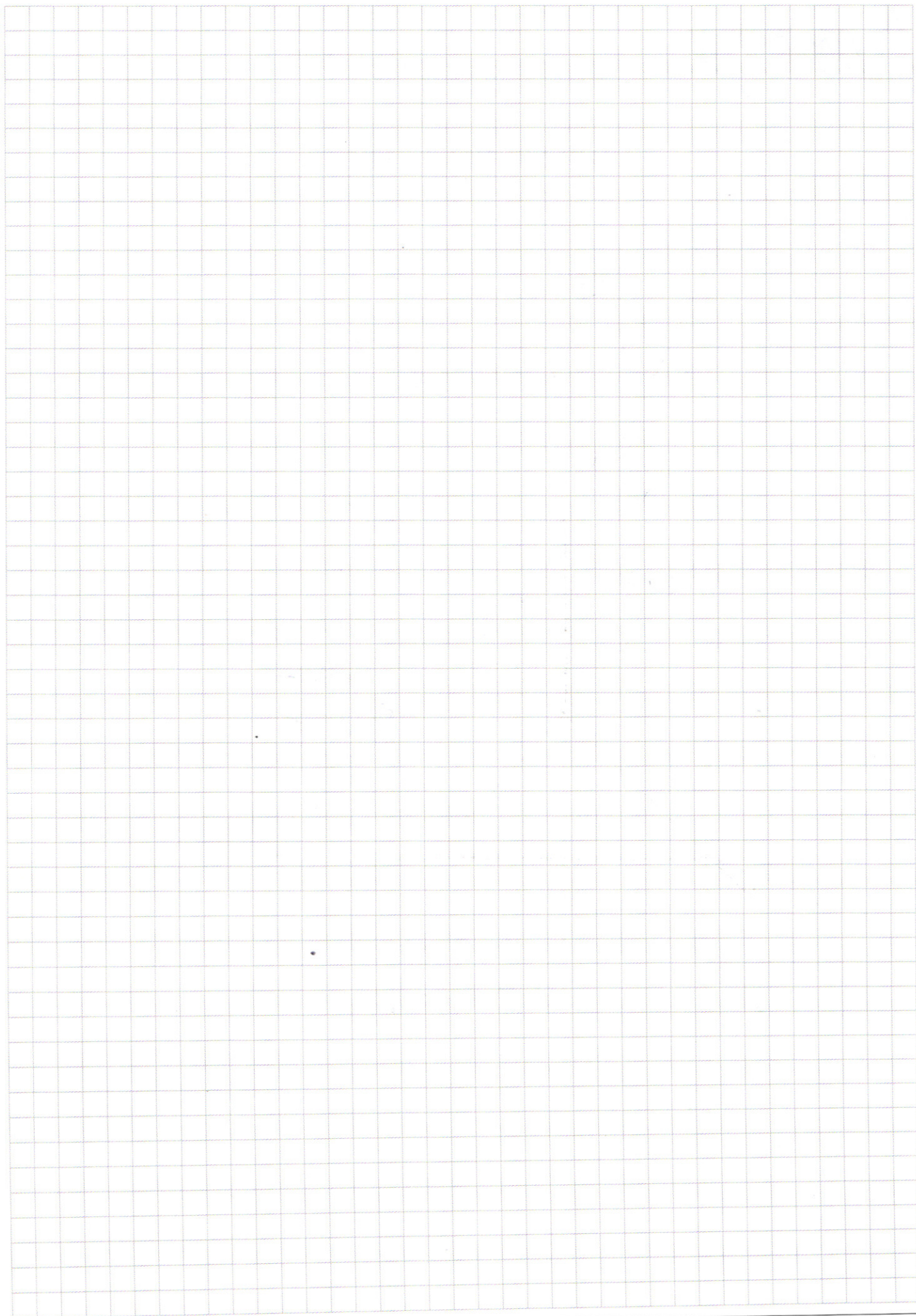
$$q b_1 \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} = ? \quad b_2 = b_1 \cdot q \quad b_4 = b_1 \cdot q^3 \quad b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$10 b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q} = 50 b_1 q^2 \frac{1-q^{3000}}{1-q^2}$$

$$10 \cdot \frac{5q^2}{q+1} / 5q^2 - q + 1 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)