

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$X = \frac{a-72y}{3(a+b)}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

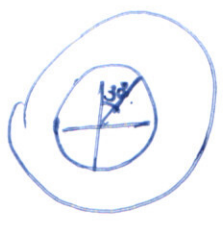
3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

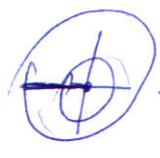
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

$0 \geq 16$
 $\begin{cases} Q \geq 6 \\ -Q \leq 6 \end{cases}$



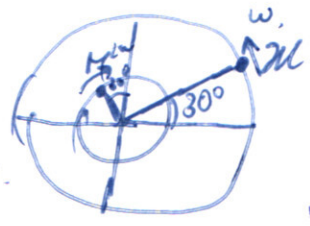
$8-2+20$ 240 720
 76 300
 $(x^2+x-3)(x-2)$
 4 x^3-x^2-5x+6 270



$2x^2-7x+5=0$
 $2x^2-7x+5=0$

$x \in [-1, 2]$

$2x^2-x+2=0 \Rightarrow 7 \pm \sqrt{7}$
 $2x^2-x-7=0 \Rightarrow 1 \pm 4 \cdot 2$
 $1-4 \cdot 2 \cdot 2$



$\begin{cases} Q \geq 6 \\ Q \geq 6 \end{cases}$

$\frac{90}{3\omega^\circ}$ $\frac{360^\circ}{3\omega^\circ} = 2$

x^3-x+20 $x \geq -2$



$x^3-x^2-5x+6=0$

$8-2+20=0$

$\frac{(a+b)}{3} = \frac{4}{3}$

$8-2+20$

$5, 2, 1$
 $8+2$

$-4 \pm \sqrt{16+72}$

$\frac{24-72\sqrt{7}}{77+4\sqrt{7}}$

$x^2+x+3=0$

$Q6(a+b)=72 \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1+72}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{7} - 2 \pm \sqrt{7}}{2}$

$1-1-5+6$ $(a+b)^2=16$

$1-1-5+6$
 $\begin{cases} a+b=4 \\ \frac{3(a+b)}{4}=3 \\ a+b=-4 \\ \frac{3(a+b)}{4}=4 \end{cases}$

$8-4-10+6$

$1-7-5+6$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1+72}}{2}$

$16-4 \cdot 3$ $24 \pm 12\sqrt{7}$

$Q - \frac{3}{Q} + 4 = 0$

$Q + \frac{3}{Q} - 4 = 0$

$Q - \frac{3}{Q} + 4 = 0$

$+1-7-5+6$

$Q-4Q+3$

$\frac{-\sqrt{7}-7}{2}$

$Q^2+4Q-3=0$

$Q^2+4Q-3=0$

$Q^2-4Q+3=0$

$Q^2+4Q-3=0$

$-7 \pm \sqrt{16+72}$

$Q = 7, 3, 6 = 3, 7$

$Q = 7, 3, 6 = 3, 7$

$Q = \frac{-4 \pm \sqrt{4+3}}{-2 \pm \sqrt{7}}$
 $Q = \frac{3}{\sqrt{7}-2}$ $\frac{3}{2-\sqrt{7}}$ $\frac{3(2+\sqrt{7})}{4-7} = -(\sqrt{7}+2)$

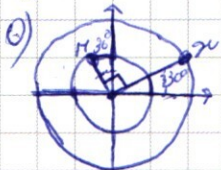
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

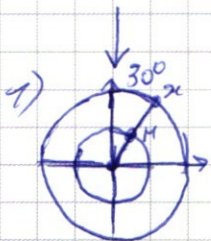
Заметим, что в выбранной системе координат, координаты Муравья и Жука считаем как $x_m^2 + y_m^2 = R_m^2$ и $x_{ж}^2 + y_{ж}^2 = R_{ж}^2$ соответственно, исходя из этого найдём радиусы окружностей, по которым они движутся: $R_m = 2$ и $R_{ж} = 4$. Также хочу заметить, что пройденные ими пути относятся как 2:1, т.е. $v_i = \omega_i r_i = \frac{v}{R_i} t$, где v - скорость с которой они движутся.

Нак. угол находим как $\varphi_m = \cos^{-1}(-\frac{3}{4}) = 71^\circ$ и $\varphi_{ж} = \cos^{-1}(\frac{3}{4}) = 36^\circ$, угол откл. от оси абсцисс против часовой стрелки.

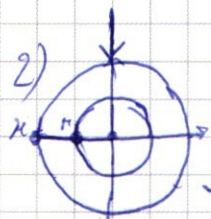
Далее нарисуем их начальные положения:



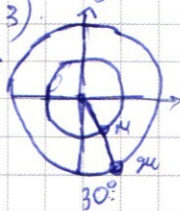
Заметим, что первоначальное движение жука и муравья на кратчайшем расстоянии (дальше - "встреча") произойдет когда жук пройдет 30° , а муравей - 60° .



Следующая "встреча" произойдет когда ж. пройдет 240° , а м. 120° .



Следующая "встреча" произойдет, когда ж. пройдет 240° , а м. 120° .



Следующая встреча наступит на тех же координатах от первой, т.е. их скорости остаются прежними, дальнейшие встречи будут аналогичными.

П.е. Also существует 3 параллельных луча,
при которых он находится на кратчайшем
расстоянии от М. Верн они: $(\frac{1}{2}) (2; 2\sqrt{3}); (-4; 0); (2; -2\sqrt{3})$
Важливо так же из альтернативного предположения
координат Кирова $(4\cos\alpha; 4\sin\alpha)$, а отвл. от
оно обычно против часовой стрелки до радиус
вектора луча.

Ответ: $(2; 2\sqrt{3}); (-4; 0); (2; -2\sqrt{3})$.

№2.

Не отходя себе в упрямые зачетники,
что $3(a+b)x + 7y = a$ - линейная
функция, равно как и $46x + (a+b)y = 7$,
потому если система предложенная
система уравнений имеет бесконечно
много решений, то их график
совпадают. Т.е. если $3\frac{a+b}{a} = 46$
и $6(a+b) = \frac{7}{a}$, получив систему:

$$\begin{cases} 3(a+b) = 46a \\ ab(a+b) = 72 \end{cases}; a \neq 0, \text{ иначе система очевидно имеет} \\ \text{нетривиальное решение.}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a+b)^2 = 76 \\ 3(a+b) = 46a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \\ a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a+3=0 \\ b=\frac{3}{a} \\ a^2+4a-3=0 \\ b=-\frac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1, b=3 \\ a=3, b=1 \\ a=\sqrt{7}-2, b=-\sqrt{7}-2 \\ a=-\sqrt{7}-2, b=\sqrt{7}-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Проверив полученные корни, я убедился, что они подходят.
Ответ: ~~(0;0)~~ $(1;3), (3;1), (\sqrt{7}-2; -\sqrt{7}-2), (-\sqrt{7}-2; \sqrt{7}-2)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{(x+3)\sqrt{x^3-x+20}} = x^2+5x+6 \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{x^3-x+20} = (x+2)(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3-x+20} = x+2 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x+20 = x^2+4x+4 \\ x^3-x+20 \geq 0 \wedge x \geq -2 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+x+3) = 0 \\ x^3-x+20 \geq 0 \wedge x \geq -2 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \\ x = \frac{\sqrt{13}-7}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x = -3 \vee x = 2 \vee x = \frac{\sqrt{13}-7}{2}$.

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-7| + 7 \geq 0 \Leftrightarrow (2x^2 - |x-7|)(x^2 - |x-7|) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - |x-7| > 0 \\ x^2 - |x-7| > 0 \\ 2x^2 - |x-7| < 0 \\ x^2 - |x-7| < 0 \\ 2x^2 - |x-7| = 0 \\ x^2 - |x-7| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - |x-7| > 0 \\ 2x^2 - |x-7| < 0 \\ 2x^2 - |x-7| = 0 \\ x^2 - |x-7| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - |x-7| \leq 0 \\ x^2 - |x-7| \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \leq x-7 \\ 2x^2 \leq 7-x \\ x^2 \geq x-7 \\ x^2 \geq 7-x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\infty; -\frac{\sqrt{5}-7}{2} \right] \cup \left[-7; \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-7}{2}; \infty \right)$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{5}-7}{2} \right] \cup \left[-7; \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-7}{2}; \infty \right)$.

N5.

Заметим, что $1400 = 14 \cdot 10^2 = 7 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^3$.

Так как цифра в числе от 1 до 9 (или есть 0, но произведение точно 0),

~~то 7 и 5 должны присутствовать в разложении~~
~~и каждая цифра ровно по 6 шкатулкам~~
 чисел ровно одна 7 и две пятёрки.

8-е можно также представить как $2 \cdot 4$ или $2 \cdot 2 \cdot 2$, поэтому следует это учесть.

И.е. шкатулки числа могут иметь след. набор цифр: $(7, 5, 5, 2, 2, 2, 1, 1)$ или $(7, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1)$ или $(7, 5, 5, 8, 1, 1, 1, 1)$.

И.к. я привел лишь 3 разных набора цифр ^{каждое} ~~набор~~ ~~числа~~, которые можно из них составить аналогично тем как из этих цифр можно совершенно

составить $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 3!} + \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{7!}{3} + \frac{2 \cdot 7!}{3} + \frac{7!}{6} = 5880$

⇒ Ответ: 5880.

А.А.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2.70$$

$$x^2 = |x-7|$$

$$x^2 - x + 7 \geq 0$$

$$\frac{1-y}{x^2+x-7}$$

$$\frac{-7 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{2,23-7}{2} \approx 0,675$$

$$\frac{\sqrt{5}-7}{2} \quad \frac{\sqrt{5}-7}{2}$$

$$2x^2 - 7 + x \leq 0$$

$$\textcircled{2} x-3 \geq 0$$

$$2x^2 = x \rightarrow x \geq 3-x$$

$$2x^2 + x - 6$$

$$\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \textcircled{7}$$

$$\frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y \geq 0$$

$$x-3 \geq y$$

$$0 \geq y$$

$$x-3 \geq -x$$

$$y \geq 3-x$$

$$3,23$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$y \leq x-3$$

$$x-3 \geq y$$

$$x-3 \geq -x$$

$$y \geq 3-x$$

$$y \leq 0$$

$$\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ 3-x-y \geq 0 \end{cases}$$

$$3-x-y \geq 0$$

$$\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases}$$

$$x-y$$

$$x+y$$

$$x-3 \geq y$$

$$|x-3| + |y-3| \leq 6$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$|x-3| + |y-3| \leq 6$$

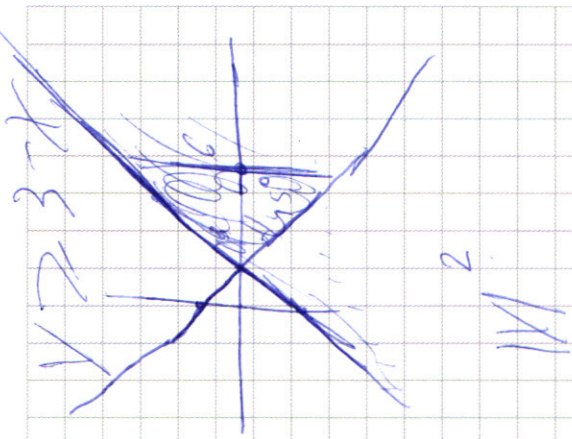
$$|x-3| + |y-3| \leq 6$$

$$x-3-y$$

$$x-3-y$$

$$x-3-y$$

$$x-3-y$$



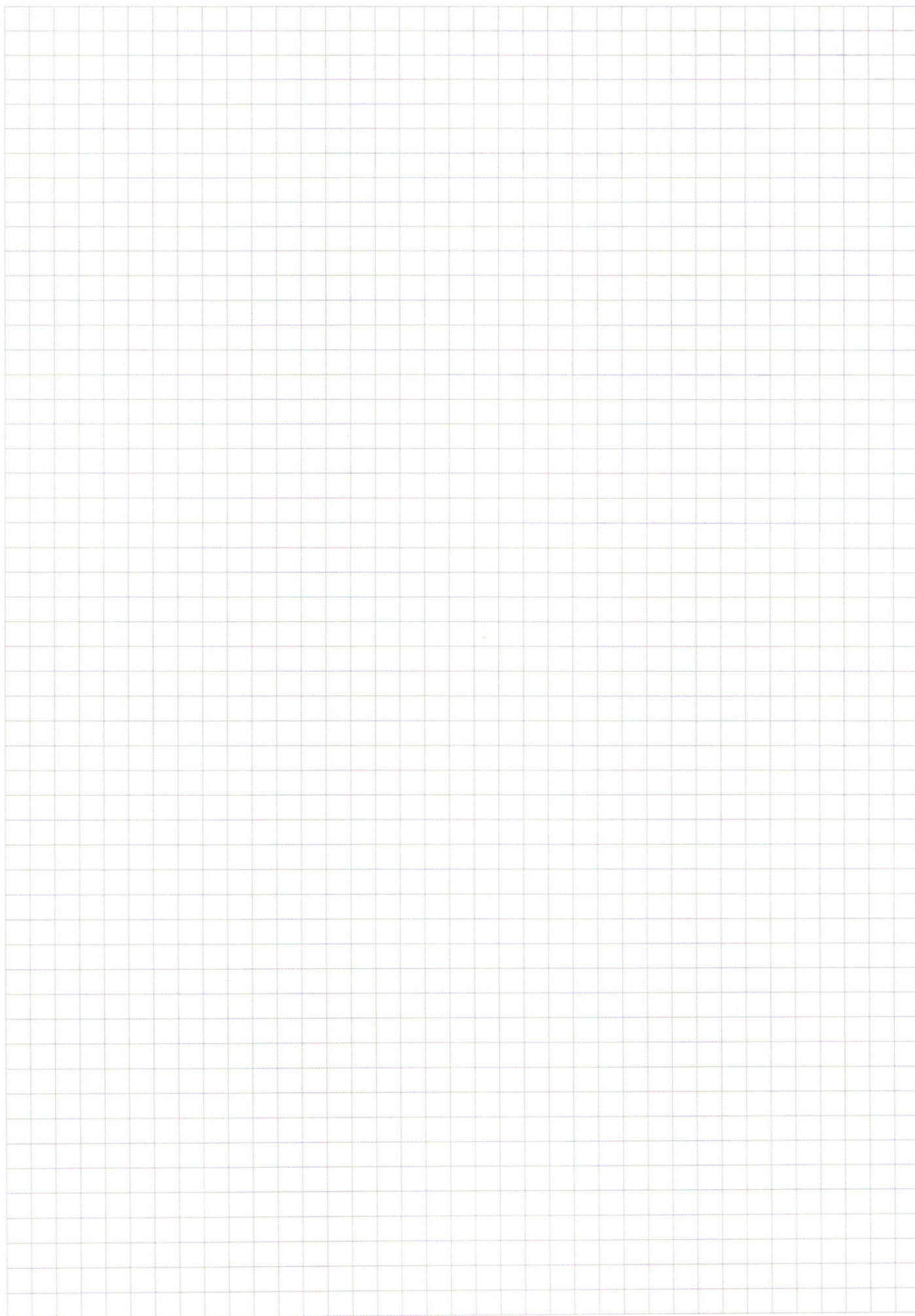
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

Найти Φ

$$\Phi = |x-3-y| + |x-3+y| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \\ x \geq 3 \wedge y \leq 0 \end{cases}$$

задать, что





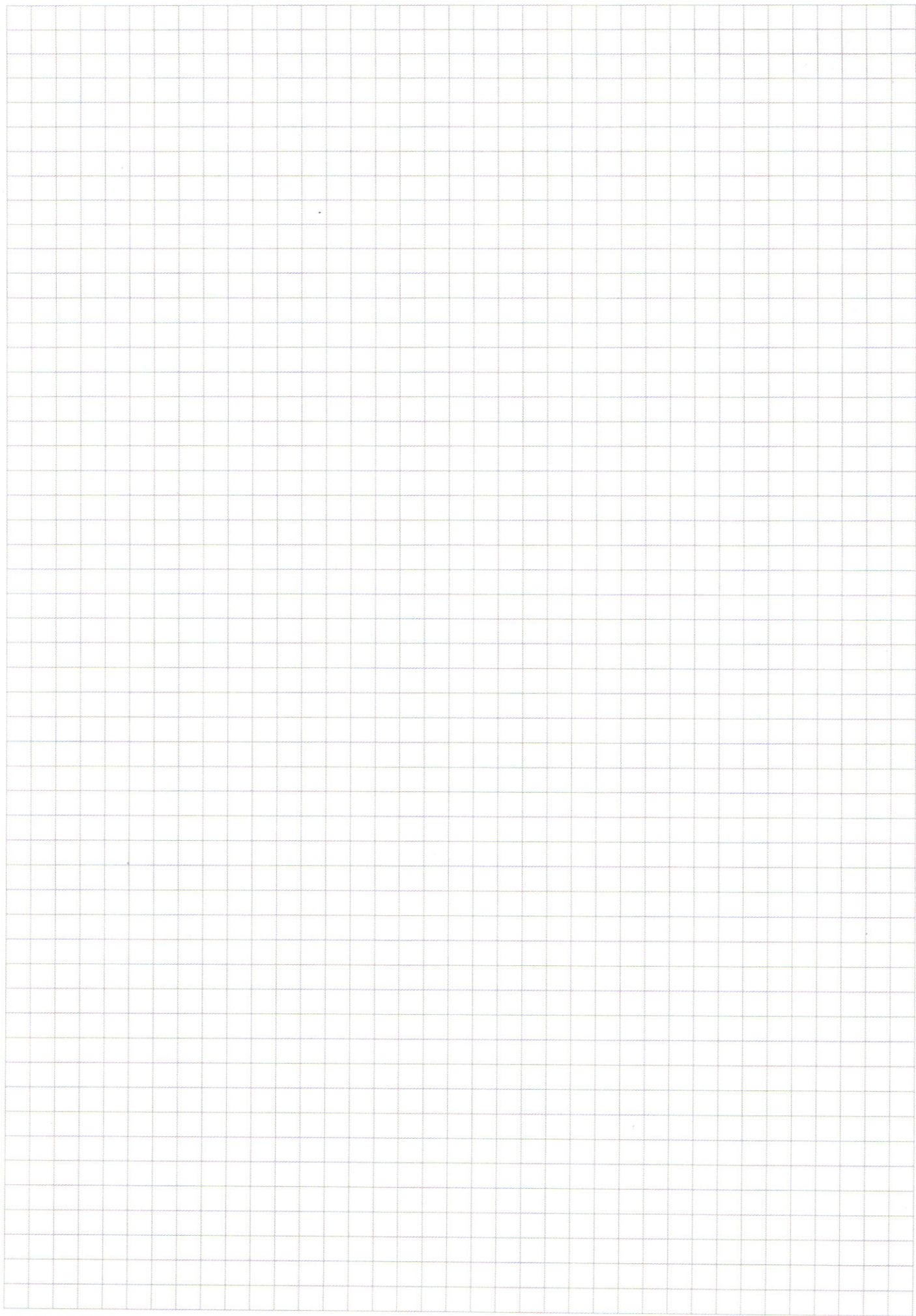
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)