МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a, \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

$8\cdot 7\cdot C_6^2$

75581111

75542111 $8\cdot C_7^2\cdot 5\cdot 4$

75522211

$8\cdot C_7^2\cdot C_5^2$

$x^2+y^2-2|x|-2|y|=0$

$x^2+y^2=2|x|+2|y|$

$|x-3-y|+|x-3+y|\leq 6$

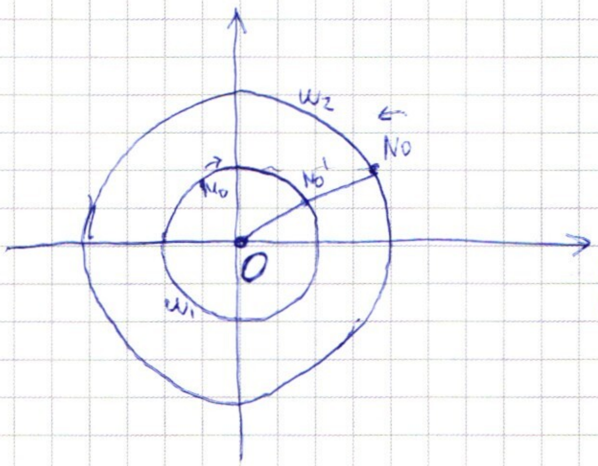
$(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1)

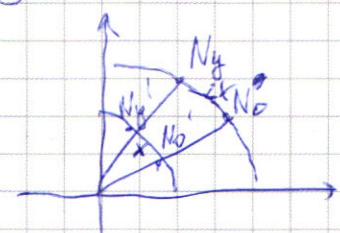


Пусть M_0 катается по окружности ω_1, N_0 по окружности ω_2.

Посмотрим, когда достигается кратчайшее расстояние:

– в момент времени x

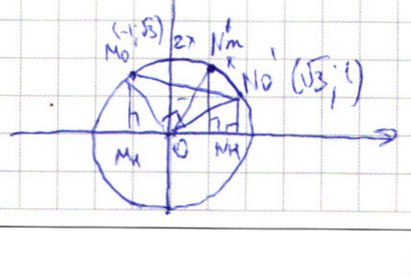
Заметим, что OM_0 и ON фиксированы – это радиусы окружностей, на которых стоят муравей и жук соответственно. $OM_x = \sqrt{(-1-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$; $ON = \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$. Заметим, что по неравенству $\triangle OM_xN_x$ в момент времени x $M_xN_x \geqslant |ON_x - OM_x|$ ($M_xN_x + OM_x \geqslant ON_x$), при том равенство достигается, когда O, N_x и M_x лежат на одной прямой. Давайте поймём, что окружность ω_2 гомотетична окружности ω_1 (т.к. они концентрические) с центром в O с коэффициентом $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Тогда проведём ON_0. Пусть N_0' – точка пересечения ON_0 и ω_1. Тогда N_0' переходит в N_0 в результате гомотетии с центром в O и коэффициентом 2. Давайте рассмотрим момент времени k, когда между M_k и N_k кратчайшее расстояние. Ровно в этот момент M_k будет гомотетична N_k с центром в O (т.к. они будут лежать на одной прямой. Тогда давайте вместо точки N_y в каждый момент времени y будем рассматривать точку N_y' на окружности ω_1, которая будет являться гомотетичной точке N_y с ~~коэф.~~ центром в точке O. Тогда наша новая точка N_y' тоже непрерывно двигается по окружности ω_1 в том же направлении, что и N_y но со скоростью в 2 раза меньшей, т.к. в каждый момент времени она будет проходить в 2 раза меньшую по длине дугу.



(т.к. гомотетия с коэф. $\frac{1}{2}$).

Тогда давайте просто будем следить, в каких точках будут встречаться на окружности ω_1 точки M_y и N_y' — узнаем все такие координаты проекции жука — уменьшим их на 2 — узнаем координаты жука. Итак, давайте узнаем координаты N_0': из гомотетии они равны

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{2}\right) = (\sqrt{3}, 1)$



Нетрудно понять, что $\angle M_0ON_0 = 90$, т.к. если опустим перпендикуляры M_H и N_H, то поймём, что

$\sin\angle N_0'ON_H = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle N_0'ON_H = 30^\circ$ (очевидно <90)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

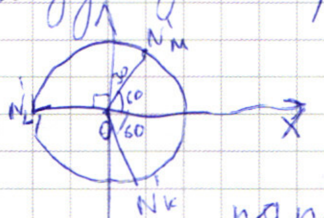
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) (продолжение) и $\angle M_0OM_H=60$, т.к. $\sin\angle M_0OM_H=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (радиус ω_1 равен r) $\Rightarrow \angle M_0ON_0'=180-\angle M_0OM_H-\angle N_0ONH=180-60-30=90^\circ$, при том $M_0O=ON_0'$, т.к. это радиусы ω_2. Очевидно, что первая их встреча произойдёт в точке, делящей меньшую дугу M_0N_0' в отношении $2:1$ считая от M_0, т.к. $V_{M_0}=V_{N_0}=2V_{N_0}'\Rightarrow$ Эта точка (N'_H на чертеже) делит $\angle M_0ON_0'$ на 3 равные части $\Rightarrow \angle N'_HON_0'=30\Rightarrow \angle N'_HON_H=60^\circ$. Тогда найдём координаты N'_H: т.к. ON'_H - гипотенуза, равная r в $\Delta ON'_HN_H$, то $N'_HN_H=\sqrt{3}$; $ON_H=1$, т.к. $\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 60=\frac{1}{2}$.
Тогда координаты $N'_H(1;\sqrt{3})$. Заметим также, что после первой встречи их встреча сместится на $\frac{1}{3}$ всей окружности, т.к. относительно 1 встречи за время до второй они суммарно пройдут всю окружность $\Rightarrow$ отношение до 2 встречи относительно 1 будет делить окружность в $1:2$, аналогично со 2 и 3 и с 3 и 4. Итого, ~~к 4-ой~~ в 4-й раз они встретятся в той же точке, что и в первый, т.к. пройдёт суммарно 3 встречи, в результате которых ~~[illegible]~~ встречами будет пройдена вся окружность

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3
(Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{1}{3} \cdot 3 = 1\right)$, тогда встречи делят w_1 на 3 равные части => встречи мы можем обозначить следующим образом:



— т.к. они делят окружность на 3 части, то углы между каждой парой из них и центром по 120. Но тогда $\angle N'_M OX = \angle N'_K OX = 120 - 60 = 60$ => N'_M симметрична N'_K относительно OX (т.к. $N'_M = N'_K$ и углы между $N'_M OX = \angle N'_K OX = 60$) => её координаты $(1; -\sqrt{3})$.

И, наконец, у N'_L они $(-2; 0)$, т.к. $\angle N'_M O N'_L = 120$ => N'_L — пересечение w_1 с прямой OX). Теперь найдём координаты жука: $(2; -2\sqrt{3})$; $(2; 2\sqrt{3})$; $(-4; 0)$

№2) Заметим, что ~~как~~ система уравнений имеет бесконечно много решений в случае, если ни один коэф. не равен 0 (иначе можно понять, чему равны x и y — в 1 ур. $12 \neq 0$, а во втором единственно) отношения коэффициентов при x и при y равные (иначе домножаем 2 уравнение на коэффициент отношение $\frac{3(a+b)}{4b}$, тогда вычитаем из первого 2-е, получаем линейное уравнение от y, у которого не более 1 решение и находим x => конечное число решений). При том отношение правых частей равно им же, т.к. иначе система просто неверна).

Итого $\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4ab \\ 12 = (a+b)ab \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2) (продолжение) введём замену $a+b=q$, $ab=p$

Тогда $\begin{cases} 3q=4p \\ 12=qp \mid \cdot 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 4p\cdot q=48 \\ 3q=4p \end{cases}$

$\begin{cases} 3q^2=48 \\ 3q=4p \end{cases}$

$\begin{cases} q=\pm 4 \\ qp=12 \end{cases}$

У нас 2 случая: 1) $q=4$, откуда $p=3$

2) $q=-4$, откуда $p=-3$

1сл.

$q=4$, $p=3$

$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$

$a(4-a)=3$

$4a-a^2=3$

$-a^2+4a-3=0$

$a^2-4a+3=0$

$(a-3)(a-1)=0$

откуда

$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

2сл.

$q=-4$, $p=-3$

$a+b=-4$

$ab=-3$

$a(-4-a)=-3$

$-a^2+4a-3=0$

$a_{1,2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{7}}{2}$

$a_1=-2+\sqrt{7}$

$a_2=-2-\sqrt{7}$

$\begin{cases} a=-2+\sqrt{7} \\ b=-2-\sqrt{7} \end{cases}$ $\begin{cases} a=-2-\sqrt{7} \\ b=-2+\sqrt{7} \end{cases}$

Все пары подходят т.к. ничего не обнуляется из чисел a, b, $a+b$

Ответ: $(3;1)$; $(1;3)$; $(-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7})$; $(-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3) $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=(x+3)(x+2)$

-3 – один из корней, т.к. обе части обнуляются.
Пусть $x\neq-3$, тогда разделим обе части на $x+3$

$\sqrt{x^3-x+10}=x+2$ (*1)

Возведём в квадрат:

$x^3-x+10=(x+2)^2$

$x^3-x^2-x-4x-4+10=0$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-3 \\ \quad -x^2-5x+6 & \\ \quad \underline{-x^2-2x} & \\ \qquad -3x+6 & \\ \qquad \underline{-3x+6} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^3-x^2-5x+6=(x-2)(x^2+x-3)$, откуда $x=2$ тоже корень, т.к. $x+2>0$. Осталось узнать корни уравнения x^2+x-3: $\frac{-1\pm\sqrt{1+3\cdot4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, при том $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ не подходит, т.к. $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}+2<0$ (откуда (*1) неверно) $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}+2=\frac{3-\sqrt{13}}{2},\ \sqrt{13}>3\right)$, а $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ подходит, т.к. $\frac{\sqrt{13}-1}{2}+2=\frac{\sqrt{13}+3}{2}>0$ откуда корни -3; 2 и $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$

Ответ: -3; 2; $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$

№4

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq0$

1 случай) $x\geq1$. Тогда модуль раскрывается как $|x-1|=x-1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4) (Продолжение) Отсюда

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1=2x^4+x^2-2x-3x^2(x-1)+1=$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1 \overset{?}{\geq} 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1=2x^4-3x^3+3x^2+\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2\geq 0}$

Заметим, что $2x^4-3x^3+3x^2=2x^4-4x^3+2x^2+x^3+x^2=$

$2x(x^2-2x+1)+x^3+x^2=2x(x-1)^2+x^3+x^2\geq 0$ для $x\geq 1$ – положительных. Итого, всё выражение при $x\geq 1$ неотрицательно, откуда подходят $x=[1;+\infty)$

При $x<1$ модуль $(x-1)$ раскрывается как $1-x$:

$2x^4+x^2-2x-3x^2(1-x)+1 \overset{?}{\geq} 0$

$2x^4+x^2-2x-3x^2+3x^3+1 \overset{?}{\geq} 0$

$2x^4-2x^2+3x^3-2x+1\geq 0$

Заметим, что

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-2x^2+3x^3-2x+1 & x+1 \\ 2x^4+2x^3 & 2x^3+x^2-3x+1 \\ \hline x^3-2x^2-2x+1 & \\ x^3+x^2 & \\ \hline -3x^2-2x+1 & \\ -3x^2-3x & \\ \hline x+1 & \end{array}$$

, а

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2-3x+1 & x-\frac{1}{2} \\ 2x^3-x^2 & 2x^2+2x-2 \\ \hline 2x^2-3x+1 & \\ 2x^2-x & \\ \hline -2x+1 & \end{array}$$

Итого из этих двух частных

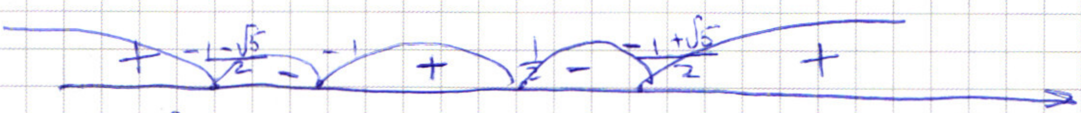
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) получаем $2x^4+3x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(x-\frac{1}{2})(2x^2+2x-2)$ — двойка на „~~положительность~~ неотриц." не влияет, откуда нам надо узнать, при каких x

$(x+1)(x-\frac{1}{2})(x^2+x-1) \overset{?}{\geq} 0$

Найдём корни уравнения x^2+x-1:

$\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Тогда это выражение обнуляется при $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Воспользуемся методом интервалов: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \frac{-1-2}{2} = -1,5 < -1 < \frac{1}{2} = \frac{-1+2}{2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Очевидно, что $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$, т.к. $\sqrt{5}<3$, откуда решением неравенства будут $x=(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}]$; $[-1; \frac{1}{2}]$; $[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

№5

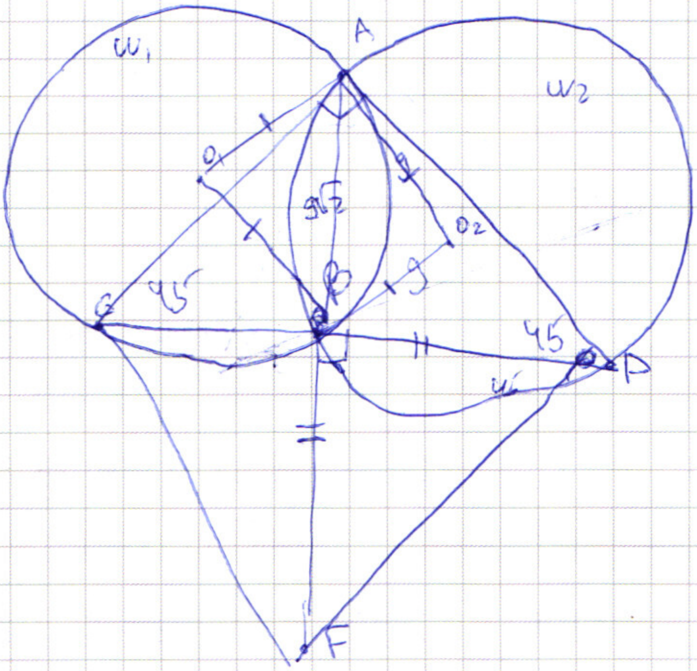
Посмотрим, как число 1400 раскладывается на множители: $1400=2^2\cdot5^2\cdot2\cdot7=2^3\cdot5^2\cdot7$. Заметим, что цифр, которые делятся на 7 или на 5 (простые числа) ровно по две: 0 и 7 и 0 и 5 соответственно, но в нашей десятичной записи нет цифры 0 (т.к. иначе произведение 0), поэтому есть ровно две цифры 5 и ровно одна цифра 7, чтобы обеспечивалась 2-я степень 5 и 1-я степень

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5) (Продолжение ~~7~~) 7. Тогда произведение оставшихся 5 цифр равно 8: это либо $8\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=8$, либо $4\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1=8$, либо $2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1=8$. ~~Разберёмся с случаем, у нас есть 8 способов~~ В любом случае, у нас есть 8 способов поставить 7 и C_7^2 поставить 5 на какие-либо остальные (кроме первого занятого семёркой) места. Всего $8\cdot C_7^2=\frac{8\cdot7\cdot6}{2}=8\cdot3\cdot7=24\cdot7=168$. Теперь рассмотрим, сколькими способами на остальные 5 мест можно поставить цифры: 8 1111 можно поставить 5 способами - в зависимости от того, где находится 8, 42 111 - всего $5\cdot4=20$ способами - „4" на любое из 5 оставшихся мест, „2" - на любое из 4 оставшихся мест, итого $5\cdot4=20$. „1" распределятся по остальным. Теперь 222 11 можно расставить $C_5^2=\frac{5\cdot4}{2}=10$ способами - на любые 2 места из 5 ставятся „1", на остальные „2". Итого, всего способов $168\cdot(5+10+20)=$
$168\cdot35=840\cdot7=5880$

Ответ: 5880

№6



Заметим, что т.к. радиусы у w_1 и w_2 равны, то $O_1A = O_1B = O_2A = O_2B = 9$, откуда O_1AO_2B - ромб $\Rightarrow$ он и параллелограмм. Тогда $\angle AO_1B = \angle AO_2B$. При том $\angle AO_1B = 2\angle ACB$ (центральный) и $\angle AO_2B = 2\angle ADB$, т.к. $\angle AO_2B$ центральный. Откуда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AO_1B = \frac{1}{2}\angle AO_2B = \angle ADB$, при том ~~$\angle ACD = 180 - \angle$~~ $\angle ACD + \angle ADC = 180 - \angle CAD = 180 - 90 = 90$, откуда $\angle ACD = \angle ADC = 45$. Тогда $\angle AO_2B$ как центральный равен $45 \cdot 2 = 90$, откуда т.к. AO_2BO_1 ромб, то т.к. в одном из его углов прямой, то на самом деле это квадрат, откуда $AB^2 = AO_2^2 + BO_2^2 = 2 \cdot 9^2 \Rightarrow AB = 9\sqrt{2}$. Теперь заметим, что т.к. $\triangle FBD$ равнобедренный, то $\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$, следовательно, $\triangle BFD \sim \triangle CAD$ по трём углам (90, 45, 45) откуда $\frac{CD}{DF} = \frac{AD}{BD}$, ~~откуда $CD \cdot BD = AB \cdot DE$ или $\frac{CD}{AD} = DE$~~

Тогда заметим, что $\triangle ADB \sim \triangle CDF$ по 1 признаку (2 сторонам $\frac{CD}{DF} = \frac{AD}{BD}$ и углу между ними ($\angle ADB = \angle CDF$)

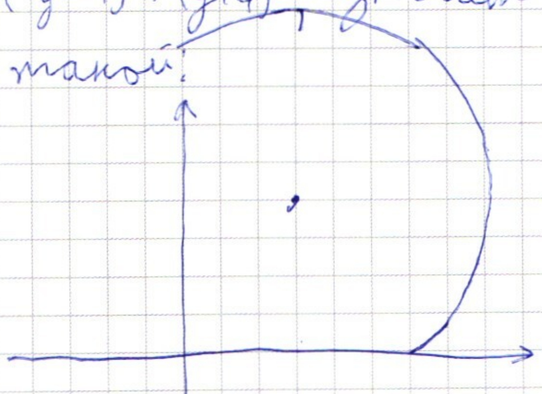
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6) (продолжение), откуда $\frac{AB}{CF}$ = коэффициенту подобия). Заметим, что коэффициент подобия равен $\frac{DF}{BF} = \sqrt{2}$ ($\frac{1}{\sin 45} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$), откуда $CF = AB \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 18$

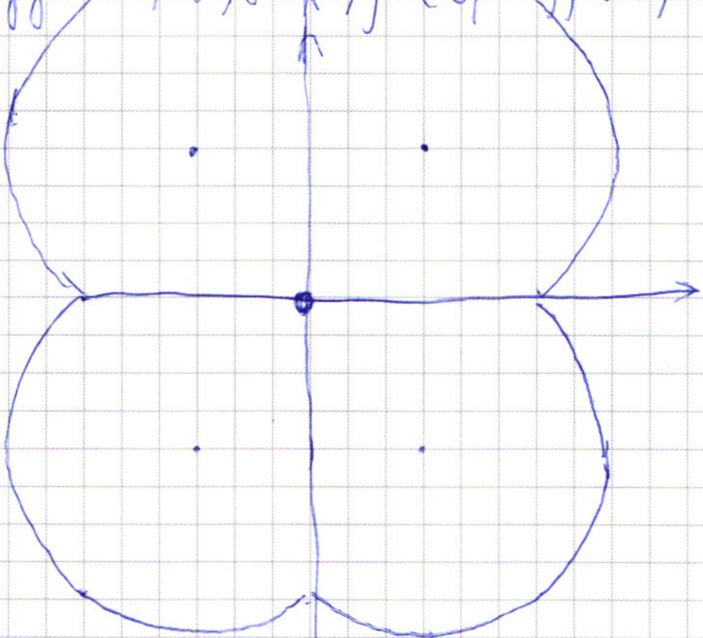
Ответ: 18

№7)

Изобразим систему графически: Для начала ~~график~~ ~~это~~ $(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25$. График - куски окружности с $r=5$) При $x>0$, выражение $(|x|-3)^2 = (x-3)^2$, а при $x<0$ $(|x|-3)^2 = (-x-3)^2 = (x+3)^2$, аналогично с y: при $y>0$ $((|y|-4))^2 = (y-4)^2$, при $y<0$ $(|y|-4)^2 = (-y-4)^2 = (y+4)^2$ значит, для $x>0, y>0$ график такой:

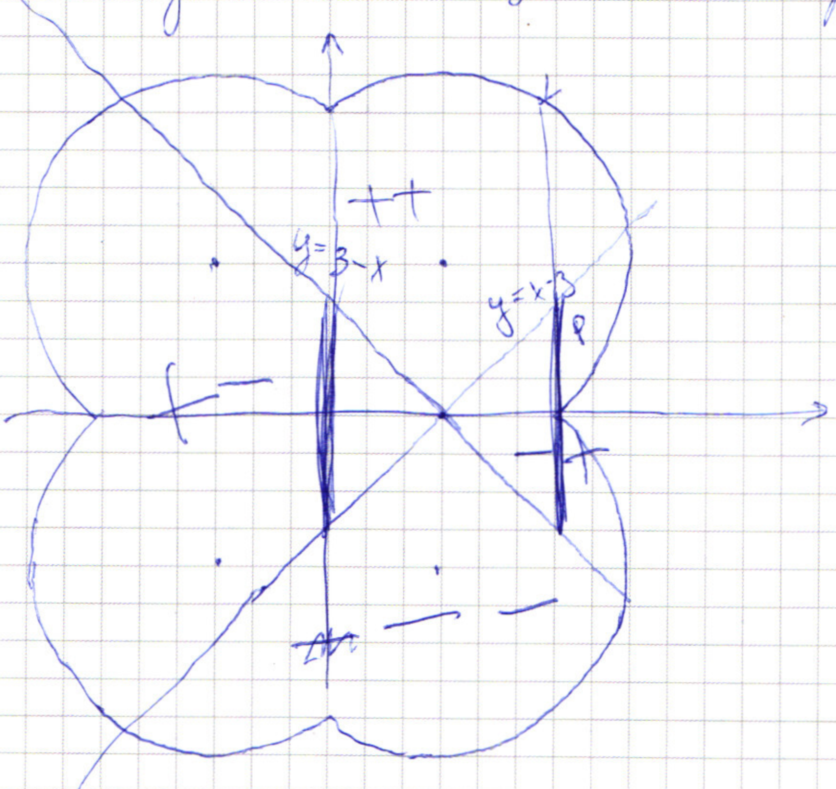


(т.к. мы ~~не~~ задевали нашей окружностью $(x-3)^2+(y-4)^2 = 5^2$ только эту (положительную по x и y четверть плоскости)), очевидно, что при $x<0$ и $y<0$ график займет противоположную четверть, а при $x>0, y<0$ и $x>0$ и $y<0$ займут соседние четверти, при этом координаты вершины будут (3;4), (-3;4); (3;-4); (-3;-4). Итого, график такой:



(точка 0;0 тоже будет учитываться)

Теперь изобразим прямые ~~x-y~~ x-3-y=0 => y=x-3 и x-3+y=0 => y=3-x. И наложим на уже имеющийся 2 выражением график:

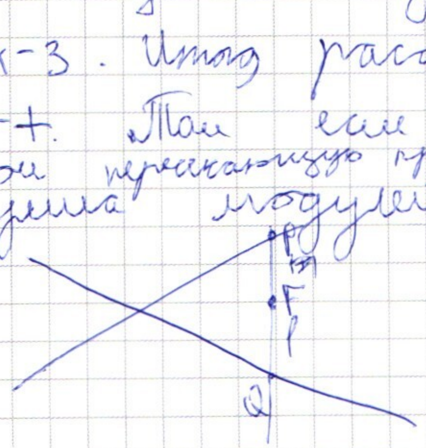


Итак, теперь рассмотрим четверти плоскости, на которые эти прямые делят

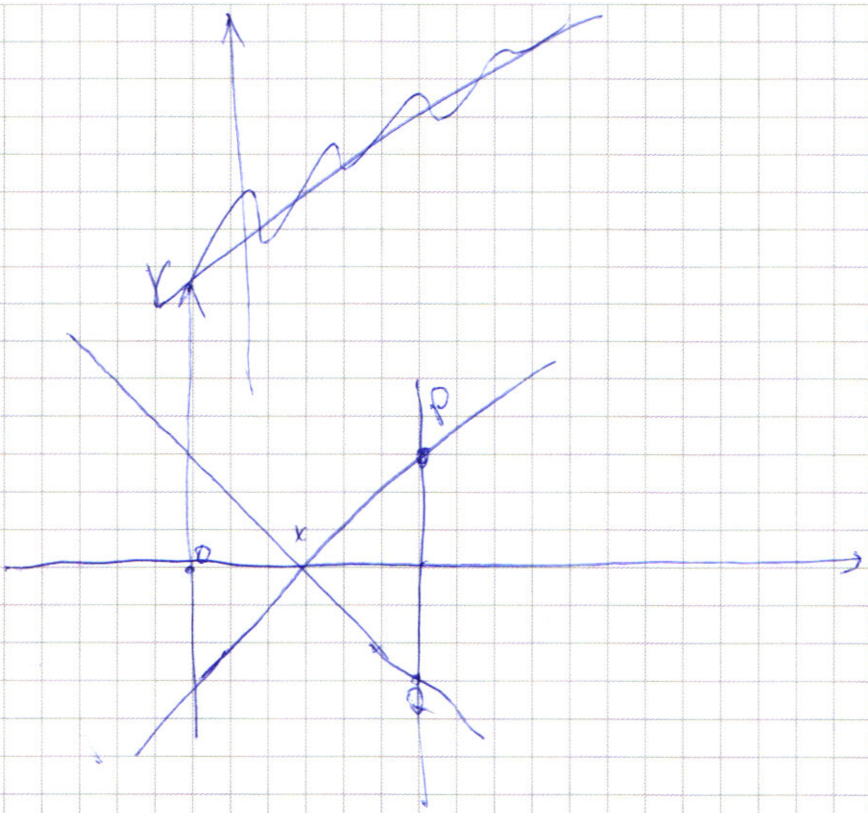
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

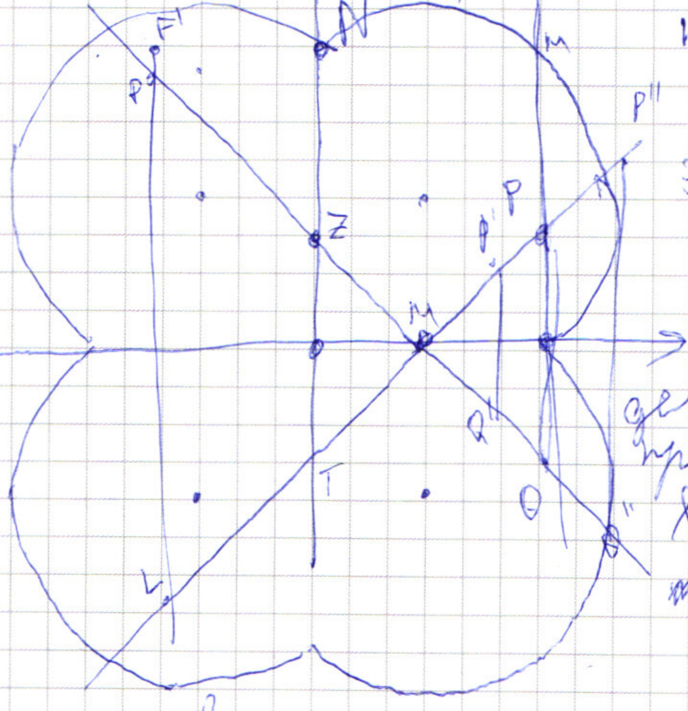
всю систему. Итак, ++ обозначается четверть, где оба модуля раскрываются как положительные числа, т.к. мы можем просто через точку в L в этой четверти провести прямую, параллельную Oy и координаты точек пересечения этой параллельной прямой с $y=x-3$ и $y=3-x$ по оси Oy будут меньше, откуда оба модуля полож. Аналогично с остальными четвертями — в -- оба выражения под модулем отриц, в +- первое полож, второе отриц, в -+ первое отриц, второе полож. Возьмём нашу точку L и проведённую через неё прямую l, параллельную Oy пусть эта прямая $l \cap y=x-3$ в точке P. Тогда длина PL — это и есть модуль первого выражения, т.к. она показывает модуль разности между y и $x-3$. Итак рассмотрим четверти +- и -+. Там если мы возьмём точку F и проведём $l \parallel Oy$, при том пересекающую прямые в P и Q, то сумма модулей — это длина отрезка PQ ($PQ = FP + FQ$). Тогда давайте отсечём эту четверть полностью прямой $x=6$.



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



Тогда $PQ=6$ и все точки, подходящие нам по условию нер-ва находятся внутри $\triangle XPQ$ (т.к. при приближении к точке пересечения $y=x-3$ и $y=3-x$ длина $P'Q'$ уменьшается — мы двигаем параллельную прямую ~~вправо~~ ~~с что есть~~ рис. 2 $P'Q' < PQ < P''Q''$)



(Тогда единственная точка которая нам подходит в этой четверти — это $6; 0$)

рис. 2 Для четверти — + ~~двигаем~~ делаем аналогично — проводим прямую $x=0$ — тогда все подходящие точки лежат внутри $\triangle MZT$ (по анал. причине и подходит только $0;0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

что касается четвертей т+ и ~~=~~, то там не подойдет ни одна точка, т.к. там расстояние равно $F'P + F'L$, но абсолютно очевидно, что такая сумма всегда превосходит 6, т.к. PL лежит на этой сумме, откуда F' заключена между ZT и PQ, при этом наименьшее расстояние какой-либо из нужных нам точек до $y=x-3$ и до $y=3-x$ минимум по 5, откуда минимум суммы $5+5=10 >$ (т.к. минимум ~~в~~ достигается для $y=x-3$ в пересечении прямой PQ с первым графиком, а для $y=3-x$ до пересечения прямой ZT со 2 графиком, откуда они минимум по 5 (т.к. точка M на окружности с коор. (6;8) лежит на PQ, как и точка N с координатой (0;8) - и при том $NZ < NT$ и $MP < MQ$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

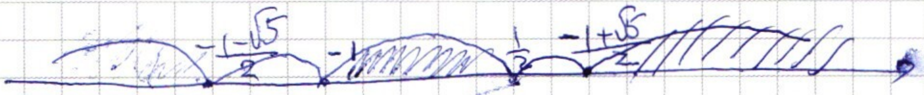
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt5}{2}\right]; \left[-1; \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{-1+\sqrt5}{2}; +\infty\right)$

$\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) < 1$

12 $\quad -1-\sqrt5$

$32-12\cdot1$ $\quad \frac{-1-\sqrt5}{2}$

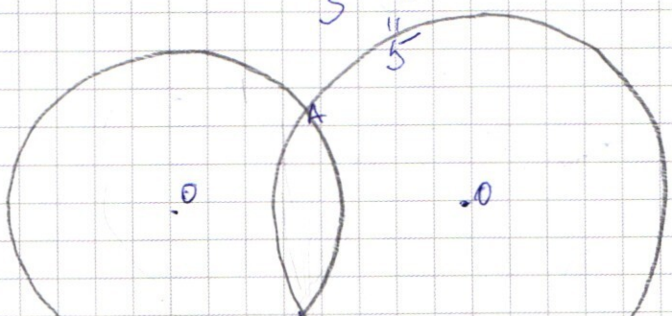
$32+4 \;\; +4$
40

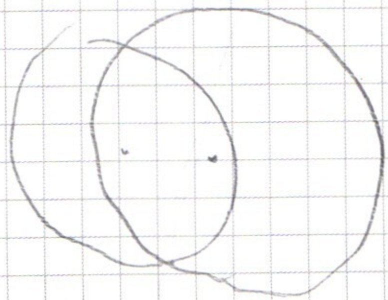
$-\cancel{8}-12\cdot3+1$ (36)

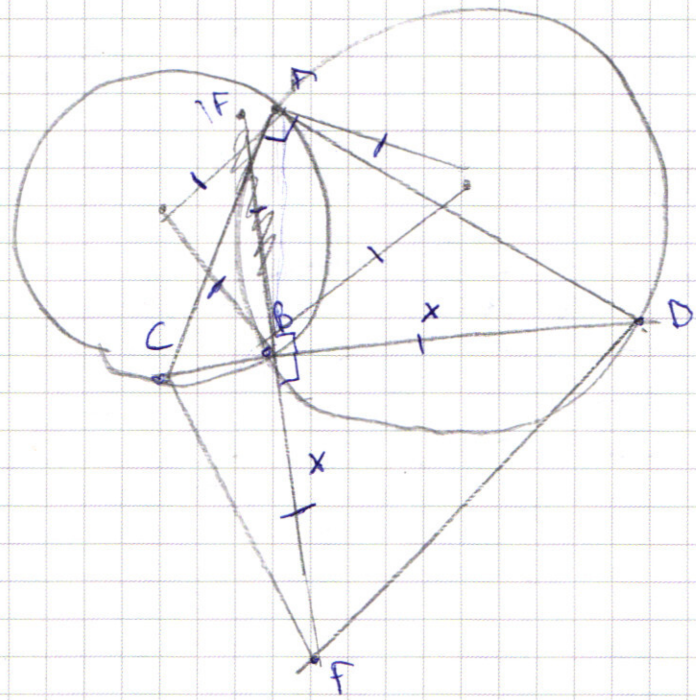
$32+4 \;\; +4$
$36 \quad 40$

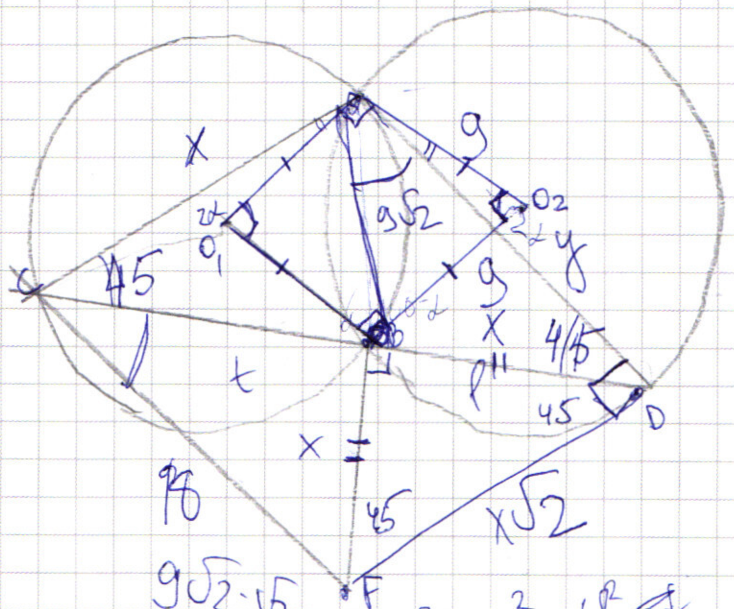
$40-$

$2 \;\; +1 \;\; -$ $\quad 5-3\cdot2+1<0$
$3 \;\; +2$
5









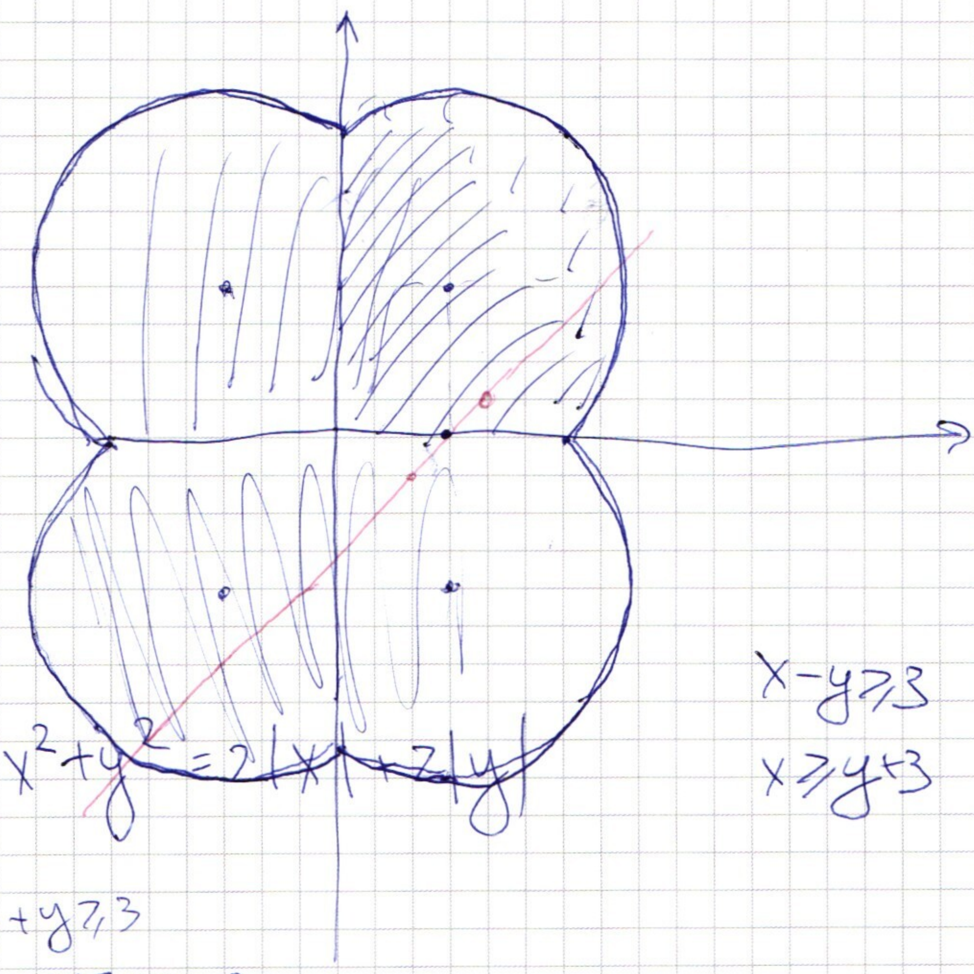
$x^2 + y^2 = \cancel{l^2}$

$(l+t)^2 - 2lt$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x^2+y^2=2|x|+2|y|$

$x-y\geqslant 3$

$x\geqslant y+3$

$x+y\geqslant 3$

$x\geqslant -y-3$

x^2 полом.

$|x-3-y|+|x-3+y|$

$|x|^2+2|x|+|y|^2+2|y|=0$

$x+3$

$x<y+3$

$x+y<3$

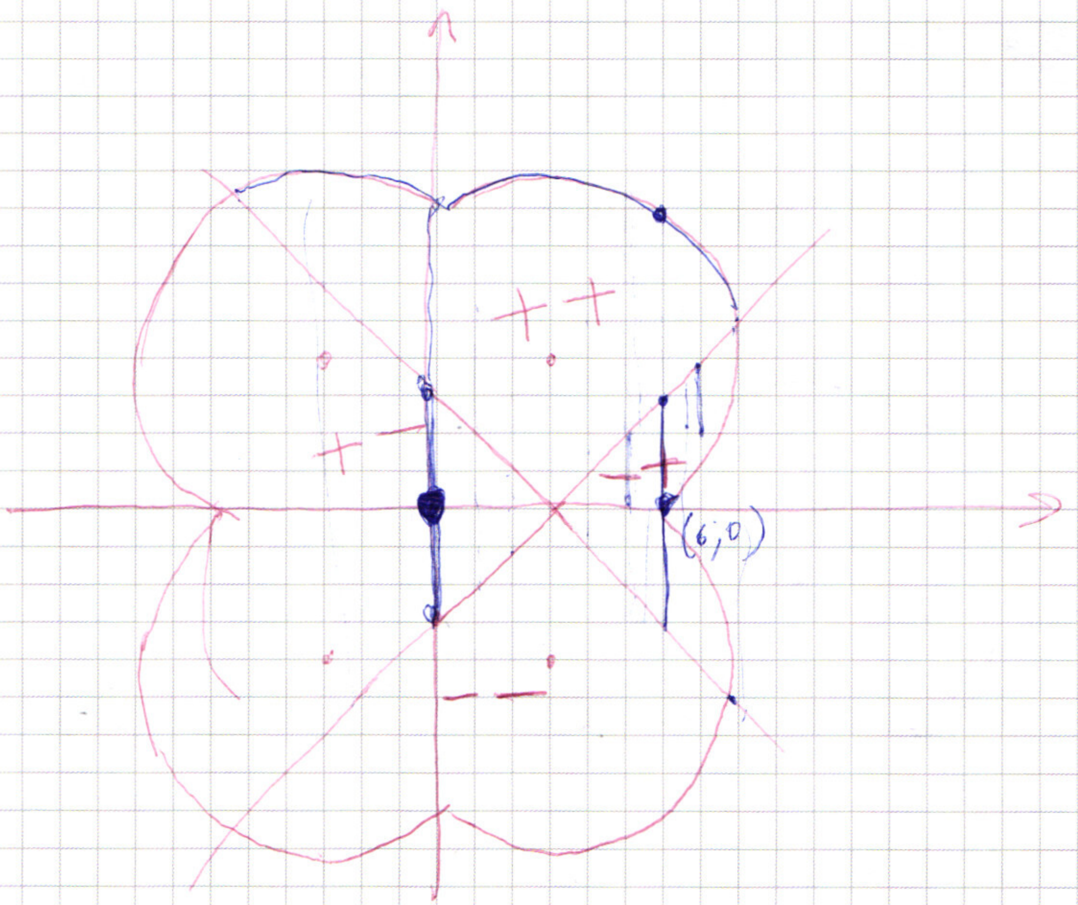
$y+3-x \quad +3-x-y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$y = 3$

$y = x - 3$

$x - 3 - y$

$3 \geq y \geq 3$

$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$

$2x - 6 \leq 6$

$x^2 + 2|x| = y^2 + 2|y|$ $\quad x \leq 6$

$x^2 + y^2 = 6|x| + 8|y|$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3) $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$ I к. $x=-3$

$(x+3)(x+2)$

3^3-3+10

$x=2$

$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4$

$x^3-x^2-\cancel{4}5x+6=0$

$1-1-5+6$ $8-4=4$

$4-10=-6+6=0$

$-1-1+5+6$

$x^3-x^2-5x+6 \mid (x-2)$

x^3-2x^2 $\quad x^2+x-3$

x^2-5x+6

x^2-2x

$-3x+6$

2^3-2

$4\cdot5$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}+2=$

$-1-\sqrt{13}+4=$

$3-\sqrt{13}$

$(x^2+x-3)(x-2)$

$1+4\cdot3=13$

$x_{1,2}=$ $1+4\cdot3=13$

$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x=-3$ ✓ $\quad x=2$ ✓ $\quad \cancel{x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}$ $\quad x=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ ✓

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geq 0$

1400
$\parallel$
$2^2 \cdot 5^{-2} \cdot 2 \cdot 7$
$2^3 \cdot 5^{-2} \cdot 7$

° ° ° ° ° ° ° °

① ② ③ 5 цвет
7 5 5

8 1111 $\to \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2}=$
4 2 111
222111

3360 +
1680
5040

5040 +
840
5880

5880

7 5 5 8 1111

$8 \cdot 7 \cdot C_6^2$ $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2}$

$C_8^2 \cdot 6 \cdot 5$

$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \cdot 5$

$8 \cdot C_7^2 \cdot 5$

$4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$
$\parallel$
$20 \cdot 42$
$\parallel$
840

1а

2а 7 5 5 4 2 111

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot C_5^2$

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2}$ (56, 280)

840 ×
4
3360

3

280 ×
12
56
280
3360

8

2а 3360

3а 7 5 5 2 2 2 1 1

840 ×
2
1680

$8 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2$

$8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2}$

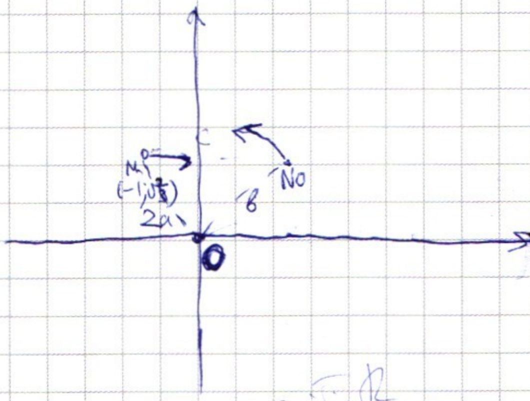
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

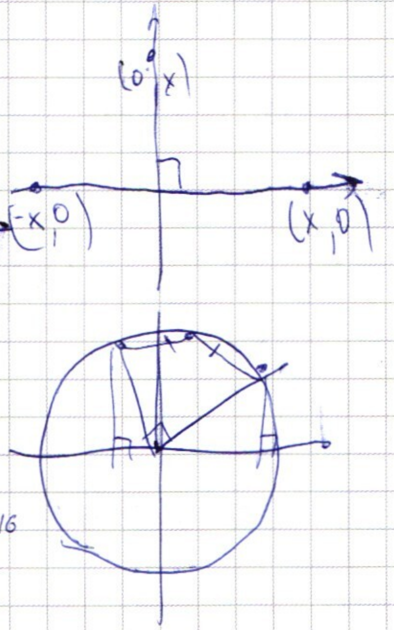
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



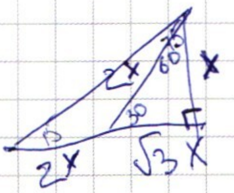


$\sqrt{1^2+3}$

$2\sqrt{3}R$

4

$4\cdot 3+4=16$



$4\cdot 3+4$

2

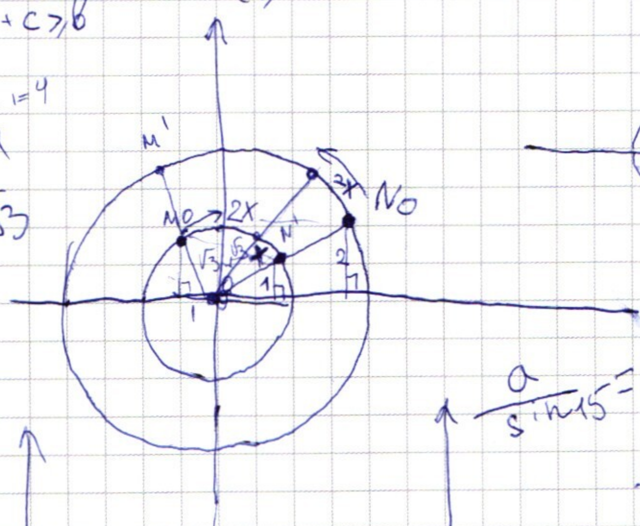
$c \geqslant b-a$

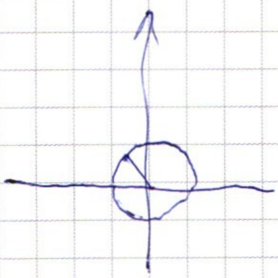
$(2+\sqrt{3})^2 x^2 + x^2$ $\quad a+c \geqslant b$

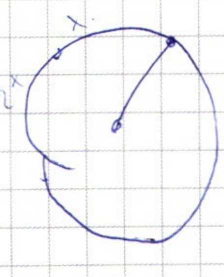
$3+1=4$

$x\cdot 7+4\sqrt{3}+1$

$8+4\sqrt{3}$



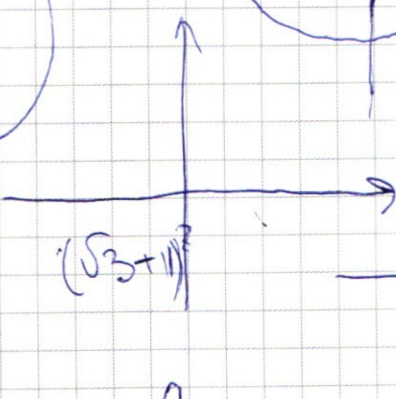


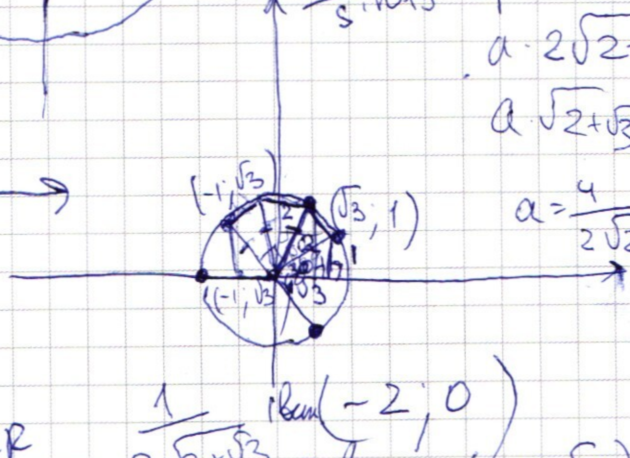


$\frac{a}{\sin 15} = 4$

$a\cdot 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = 4$

$a\sqrt{2+\sqrt{3}}$





$a=\frac{4}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\frac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$ $\quad (\sqrt{3}+1)^2$

$\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $\quad \frac{a}{\sin 15}=2R$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

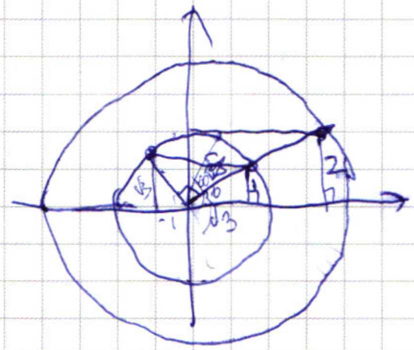
1вет. $(-2;0)$

2вет. $(1;\sqrt{3})$

3вет. $(1;-\sqrt{3})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$12x+12y=3$

$4x+4y=1$

$\frac{3\cdot 4}{4\cdot 3}$

12

$3(a+b)x+12y=a$

$4bx+(a+b)by=1$

$\frac{3(a+b)}{4b}=\frac{12}{(a+b)b}=a$

$-2+\sqrt{7}$

$\frac{3\cdot(-4)}{4\cdot(-2-\sqrt{7})}$

$\sqrt{7}-2$

$\frac{-3}{-2-\sqrt{7}}$

$$\begin{cases} 3a+3b=4ab \\ (a+b)ab=12 \end{cases}$$

Вв. замену $a+b=q$

$ab=p$

$4\cdot 3$

$3q=4p$

$3(-4+12)$

$(-2-\sqrt{7})(-2+\sqrt{7})$

$=4-7=-3$

$3(a+b)^2=48$

$(a+b)^2=16$

$\frac{12}{-4}$

$-12+12=2+\sqrt{7}$

$a+b=\pm 4$

I) $a+b=4$

$ab=3$

$a(4-a)=3$

$4a-a^2=3$

$-a^2+4a-3=0$

$a^2-4a+3=0$

$(a-3)(a-1)=0$

$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

II) $\begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases}$

$a(-4-a)=-3$

$-a^2-4a+3=0$

$a^2+4a-3=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{16+12}=2\sqrt{7}$

$a_{1,2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{7}}{2}$

$a=\frac{-4+2\sqrt{7}}{2}$

$\begin{cases} a=-2+\sqrt{7} \\ b=-2-\sqrt{7} \end{cases}$ $\begin{cases} a=-2-\sqrt{7} \\ b=-2+\sqrt{7} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1$

I a. $x\geq 1$

$2x^4+x^2-2x-3x^2(x-1)+1\geq 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$2-3+4-2$

$-1 \quad 3$

$2-3+4 \quad \frac{1}{8}-\frac{3}{8}$ $\quad x>1$

$2+3+4+2+1$

$32-24$

8

$x^2-2x+1\geq 0$

$2x^4-3x^3+3x^2$

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

$2x^4+x^2-2x-3x^2(x-1)+1\geq 0$ $\quad +9-3+1$

$2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0$ $\quad 2x^4-4x^3+2x^2$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$\frac{3^4}{2^3}-\frac{3^4}{2^3}+4\cdot\frac{3^2}{4} \quad 4\cdot$

$2-3+4-2+1$ $\quad +36 \quad x$

$2x^4+2x^2>$

$x^2+1\geq 2x$

$2x^4+3x^2 \quad 3x^3$

$x^2(2x^2-3x+3)$

$x^2-1{,}5x+1{,}5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$2x^4+x^2-2x-3x^2(1-x)+1 \geqslant 0 \quad | x<1$

$2x^4+x^2-2x-3x^2+3x^3+1 \geqslant 0$

$2x^4-2x^2+3x^3-2x+1 \geqslant 0$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 \mid x+1$

$2x^4+2x^3 \qquad 2x^3+x^2-3x+1$

x^3-2x^2-2x+1

x^3+x^2

$-3x^2-2x+1$

$-3x^2-3x$

$x+1$

$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)$

$-2+1+3+1$

$2x^3+x^2-3x+1 \mid x-\frac{1}{2}$

$-2+1+3+1$

$2x^3-x^2 \qquad 2x^2+2x-2$

$2x^2-3x+1$

$-\frac{27}{4}+\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+1$

$2x^2-x$

$-2x+1$

$-\frac{27}{4}$

$x<1$

$\frac{2}{}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x^2+x-1)$

$1+4=5$

$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}))(x-(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}))$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)