ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$

$\underline{x=-3 \text{ корень}}$

$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$

$\Downarrow$

$x^3-x+10=(x+2)^2$

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$x=2$ подходит, $\underline{x=2 \text{ корень}}$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+x-3 \\ x^2-5x & \\ \underline{x^2-2x} & \\ -3x+6 & \\ \underline{-3x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

$(x-2)(x^2+x-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2+x-3=0 \\ x-2=0 \end{array}\right.$ $\quad D=1+12=13;\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

Проверка: $x=2$ подходит;

$x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ посторонний (т.к. $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}+2<0$, а $\sqrt{x^3-x+10}\geq 0$)

$x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ подходит; $\underline{x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}}$ корень

Ответ: $x\in\left\{-3;\ 2;\ \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Задача №5. Разложим 1400 на простые множители.

~~1400~~ $\quad 1400 = \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot7}_{6 \text{ множителей}}$

1) Число состоит из этих 6 множителей (как цифр) и двух единиц.

$N_1 = \dfrac{8!}{2!\cdot3!\cdot2!}$ (цифры 2, 5, 1 повторяются)

2) $2\cdot2=4$. Число состоит из 4, 2, 5, 5, 7 и ~~двух~~ трех 1.

$N_2 = \dfrac{8!}{2!\cdot3!}$ (цифры 5, 1 повторяются)

3) $2\cdot2\cdot2=8$. Число состоит из 8, 5, 5, 7 и ~~четырех~~ трех 1

$N_3 = \dfrac{8!}{2!\cdot4!}$ (цифры 5, 1 повторяются

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

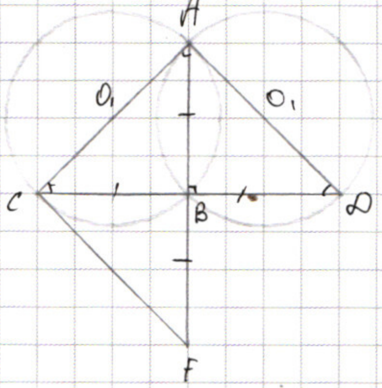
При перемножении других множителей получаются двузначные числа, эти случаи не подходят (цифра - 1 знак)

$$N_0 = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{8!}{2!\cdot3!\,2!} + \frac{8!}{2!\cdot3!} + \frac{8!}{2!\cdot4!} = 8!\left(\frac{4!+2!\cdot4!+3!\cdot2!}{2!\cdot2!\cdot3!\cdot4!}\right) =$$

$$= \frac{8!\,(4\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot3\cdot2+3\cdot2\cdot2)}{2\cdot2\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot(24+48+12)}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4} = 2\cdot5\cdot7\cdot84 = 5880$$

Ответ: $N_0 = 5880$.

Задача №6.



$B \in AF$
AF - перпендикуляр к CD | $\angle ABC = \angle ABD = 90°$

$\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ прямоугольные ~~вписаны в~~ вокруг них описаны окр. с ц. O_1, O_2

$\Downarrow$

$\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ опираются на диаметры окр.

$AC = 2R$
$AD = 2R$ | $AC = AD$; $\triangle CAD$ - р/б; $\angle ACD = \angle ADC$

$\Downarrow$

AB - высота, медиана, бис-са

$\Downarrow$

$CB = BD = AB$ (т.к. $\triangle CAD$ - прямоуг.)

AB - бис-са $\Rightarrow \angle CAB = \angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°$

$\angle ACB = \angle ADB = 90° - 45° = 45°$

$\triangle ABC$, $\triangle ABD$ - р/б

По условию $BD = BF$, т.е. $BD = FB = AB = CB$

$\triangle CBF$ - р/б; $\triangle CBF = \triangle ABC$ по 2 сторонам и углу между ними

$\Downarrow$

$CF = AC = 2R = 2\cdot 9 = 18$

Ответ: $CF = 18$

Задача №4.

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

1) $x - 1 \geq 0$; $x \geq 1$

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$

$2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + x^3 + 1 \geq 0$

$2x(x^3-1) - 4x^2(x-1) + (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

$2x(x-1)(x^2+x+1) - 4x^2(x-1) + (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

$(x-1)(2x^3+2x^2+2x - 4x^2) + (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

$(x-1)(2x^3-2x^2+2x) + (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

$2x(x-1)(x^2-x+1) + (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

$(x^2-x+1)(2x^2-2x+x+1) \geq 0$

$(x^2-x+1)(2x^2-x+1) \geq 0$ $\boxed{x \geq 1}$

$x \in [1; \infty)$

$x^2 - x + 1 \geq 0$; $D < 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 0$

$2x^2 - x + 1 \geq 0$; $D < 0 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 \geq 0$

$\Downarrow$

выражение верно при любых x $(x > 1)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x-1\le 0$

$x\le 1$

$2x^4+x^2-2x-3x^2+3x^3+1\ge 0$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\ge 0$

$2x^4+2x^3-2x^2-2x+x^3+1\ge 0$

$2x(x^3-1)+2x^2(x-1)+(x+1)(x^2-x+1)\ge 0$

$2x(x-1)(x^2+x+1)+2x^2(x-1)+(x+1)(x^2-x+1)\ge 0$

$(x-1)(2x(x^2+x+1)+2x^2)+(x+1)(x^2-x+1)\ge 0$

$(x-1)(2x^3+2x^2+2x+2x^2)+(x+1)(x^2-x+1)\ge 0$

$(x-1)\cdot 2x\cdot(x^2+4x+1)+(x+1)(x^2-x+1)\ge 0$

$(x-1)\cdot 2x(x+1)^2+(x+1)(x^2-x+1)\ge 0$

$(x+1)((x^2-1)\cdot 2x+x^2-x+1)\ge 0$

$(x+1)(2x^3-2x+x^2-x+1)\ge 0$

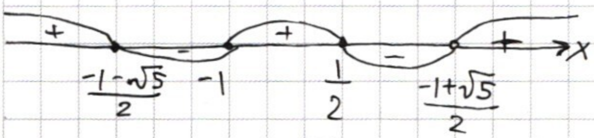
$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)\ge 0$

$(x+1)(2x^3+2x^2-x^2-2x-x+1)\ge 0$

$(x+1)(2x-1)(x^2+x-1)\ge 0$

$x^2+x-1=0;\ D=5$

$x=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$



$\boxed{x\le 1}$

$x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt5}{2}\right]\cup\left[-1;\frac12\right]$

При $x=1$ нер-во выполняется.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt5}{2}\right]\cup\left[-1;\frac12\right]\cup[1;\infty)$

Задача №1. $\boxed{x_0=0;\ y_0=0}$

Ур-ние окружности: $x^2+y^2=R^2$

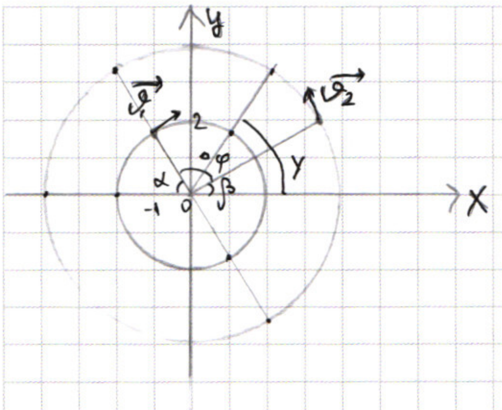
$R_1>0$

$R_2>0$

$(-1)^2+(\sqrt3)^2=R_1^2;\ R_1=2$

$(2\sqrt3)^2+(2)^2=R_2^2;\ R_2=4$

$v_1=v_2;\ v_1=\omega_1R_1;\ v_2=\omega_2R_2;\ \omega_1=\frac{v_1}{R_1};\ \omega_2=\frac{v_2}{R_2};\ \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac42=2;\ \omega_1=2\omega_2$



$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+4\cdot 3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{4+4\cdot 3}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

1) $\Delta\varphi = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - (30^\circ+60^\circ) = 90^\circ$

$\omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega$; $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = 3\Delta\varphi_2$

$\Downarrow$

$\Delta\varphi_1 = 2\Delta\varphi_2$ $\qquad \Delta\varphi_2 = \frac{\Delta\varphi}{3} = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$; $\Delta\varphi_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \Delta\varphi_1) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$

По симметрии $x_1 = 1$; $y_1 = \sqrt{3}$ $\qquad$ 1) $(2; 2\sqrt{3})$

По подобию $x_2 = 2x_1 = 2$; $y_2 = 2y_1 = 2\sqrt{3}$

2) Теперь $\Delta\varphi = 360^\circ$; $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = 3\Delta\varphi_2$; $\Delta\varphi_2 = 120^\circ$; $\Delta\varphi_1 = 240^\circ$
(новый)

$\gamma_2 = \Delta\varphi_1 - \gamma_1 = 240^\circ - 60^\circ = 180^\circ$

Координаты: $x_1 = -2$; $y_1 = 0$; $x_2 = -4$; $y_2 = 0$ $\qquad$ 2) $(-4; 0)$

3) Теперь $\Delta\varphi = 360^\circ$; $\Delta\varphi_1 = 240^\circ$

$\gamma_3 = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ (это первонач. положение муравья)

$x_1 = -1$; $y_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -2$; $y_2 = 2\sqrt{3}$ $\qquad$ 3) $(-2; 2\sqrt{3})$

4) $\Delta\varphi = 360^\circ$; $\Delta\varphi_1 = 240^\circ$

$\gamma_4 = 240 - 60^\circ = 180^\circ$

По симметрии $x_1 = 1$; $y_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = 2$; $y_2 = -2\sqrt{3}$ $\qquad$ 4) $(2; -2\sqrt{3})$

5) $\Delta\varphi = 360^\circ$; $\Delta\varphi_1 = 240^\circ$

$\gamma_5 = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ (это пункт 1)
Дальше будут циклом такие же значения

Если они будут ползти в другую сторону, то получатся такие же значения

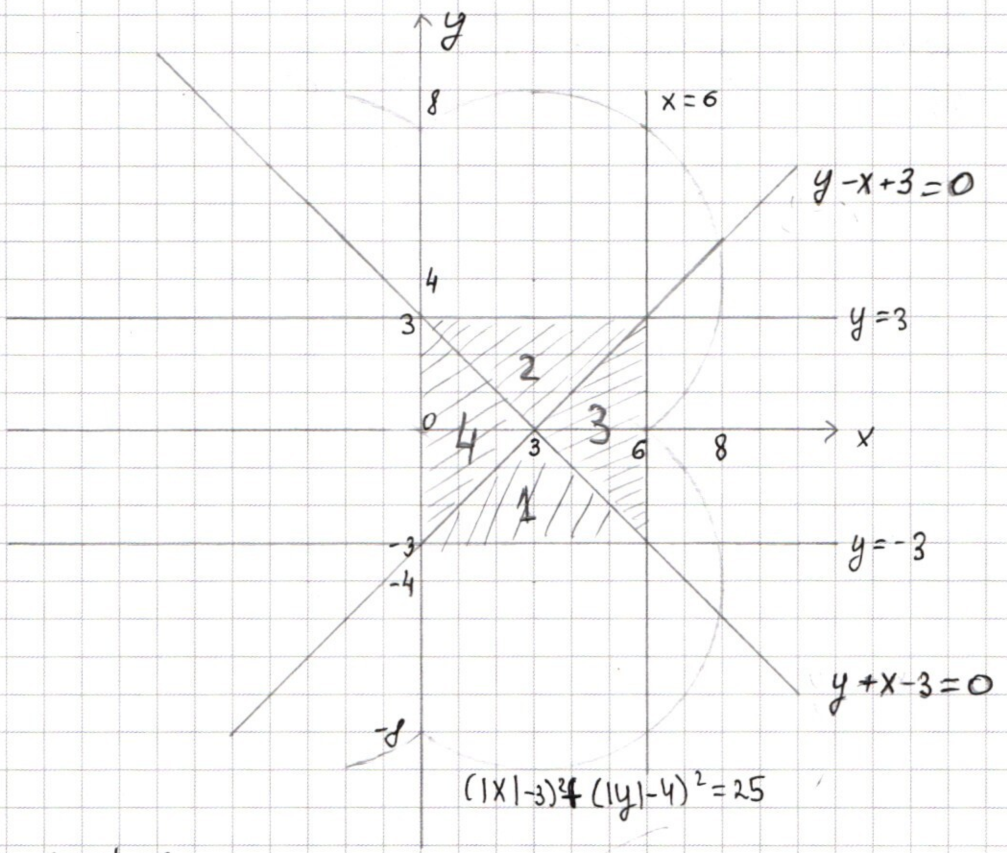
Ответ: $\{(2; 2\sqrt{3}); (-4; 0); (-2; 2\sqrt{3}); (2; -2\sqrt{3})\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №7.

$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25 \end{cases}$$ окружность

Построим:



$|x-3y|+|x-3+y| \leq 6$

1) $\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq x-3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$ $\quad x-3-y-x+3-y \leq 6$

$2y \geq -6;\ y \geq -3$

2) $\begin{cases} x-3-y \leq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq x-3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$ $\quad -x+3+y+x-3+y \leq 6$

$2y \leq 6$

$y \leq 3$

3) $\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq x-3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$ $\quad x-3-y+x-3+y \leq 6$

$2x-6 \leq 6$

$x \leq 6$

4) $\begin{cases} x-3-y \leq 0 \\ x-3+y \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq x-3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$ $\quad -x+3+y-x+3-y \leq 6$

$-2x+6 \leq 6$

$-2x \leq 0;\ x \geq 0$

Возьмем в ответ пересечения графика $(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25$ и областей графика $|x-3-y|+|x-3+y| \leq 6$.

Получим ответ $(6;0)$

Ответ: $x=6;\ y=0$

Задача №2

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$

Система имеет бесконечно много решений, когда она не зависит от одного или обоих неизвестных.

1) $3(a+b)x-a+12y=0$

$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ $12y=0$; $\begin{cases} y=0 \\ x\text{-любое} \end{cases}$

При $b=0$; $3ax-a+12y=0$

$a(3x-1)+12y=0$

$y=-a$

$12=3x-1$; $13=3x$; $x=\frac{13}{3}$

2) $4bx+(a+b)by=1$

$b=0$; $\begin{cases} x\text{-любое} \\ y\text{-любое} \end{cases}$ ~~подходит~~

$a+b=0$; $\begin{cases} y\text{-любое} \\ x=\frac{1}{4b} \end{cases}$ не подходит, т.к. в п.1 $y=0$, x-любое

Ответ: $b=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 1400$

a b c d e f g h

1) 2,2,2,5,5,7,1,1 } 8!

2) 4, 2,5, 5,7, 1,1 } 8!

3) 8,5,5,7,1,1,1,1 } 8!

$3 \cdot 8! = 3^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 9 \cdot 8 \cdot 42 \cdot 40 = 72 \cdot 42 \cdot 40 =$

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

$\frac{8!}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 3}$

1) $(1; -\sqrt{3})$

2)

$\varphi_1 = 240^\circ$ $\quad 240^\circ + 2\varphi t = 330^\circ + \varphi t$

$\varphi_2 = 330^\circ$ $\quad \varphi t = 90^\circ$

$t = \frac{90^\circ}{\varphi}$

$\Delta\varphi_1 = 60^\circ$

$\Delta\varphi_2 = 30^\circ$

$12 \times 7 = 84$ $\quad 84 \times 2 = 168$ $\quad 168 \times 5$ $\quad 1680 : 2 = 840$

$\omega = \frac{v}{R}$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{1}$

$168 \times 35 = 840$ $\quad 840 \cdot 7$ $\quad 840 \times 7 = 5880$

$3\varphi \quad 30^\circ$

$\Delta\varphi = 90^\circ$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}$ $\quad 2\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1$ $\quad 504$ $\quad 5880$

$\Delta\varphi_1 = 60^\circ$

$\Delta\varphi_2 = 30^\circ$

$\Delta\varphi = 60^\circ$

$\Delta\omega = \omega$

$\Delta\varphi_1 = 30^\circ$

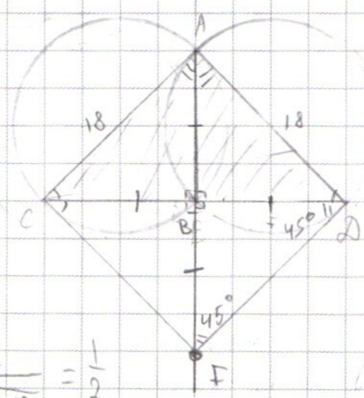
$\Delta\varphi_2 = 15^\circ$

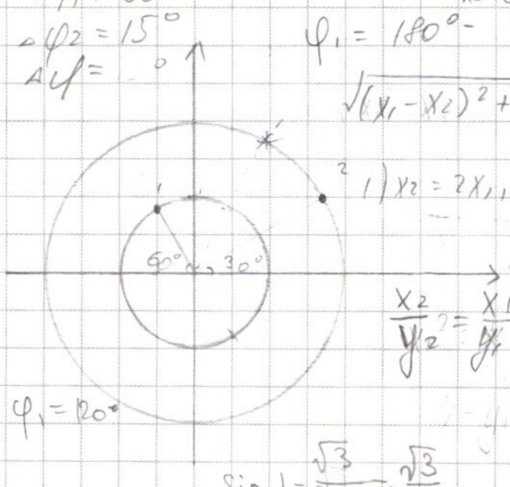
$\Delta\varphi = \ ^\circ$

$\varphi_1 = 180^\circ -$

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 2$

R=9





1) $x_2 = 2x_1$, $y_2 = 2y_1$

$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_1}$

$\varphi_1 = 120^\circ$

$y = kx$

$y_1 = kx_1$

$y_2 = kx_2$

$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{4+12}} = \frac{1}{2}$

$\cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \beta = 30^\circ$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = 60^\circ$

2x

x

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

1) $x\geq 1$

$2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$2x^4-4x^3+4x^2-2x+x^3+1\geq 0$

$x-2 \quad x-2$

$(x-2)(2x^3+2x$ $\quad x^3(2x+1)-$

$2x^3(x-2)+2x(2x$

$2x^3(x-2)$

$2x^2-x+1$

$\cancel{2x^2-2x+x+1}$

$2x^4-4x^3+4x^2-2x+(x+1)(x^2-x+1)=0$

$2x^2+2x-x+1$

$2x(x^3-1)-4x^2(x-1)+(x+1)(x^2-x+1)=0$

$D=1$

$2x(x-1)(x^2+x+1)-4x^2(x-1)+(x+1)(x^2-x+1)=0$

$(x-1)(2x(x^2+x+1)-4x^2)+(x+1)(x^2-x+1)=0$

$(x-1)(2x^3+2x^2+2x-4x^2)+(x+1)(x^3-x+1)\geq 0$

$(x-1)(2x^3-2x^2+2x)+(x+1)(x^2-x+1)=0$

$2x(x-1)(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)=0$

$(x^2-x+1)(2x(x-1)+(x+1))=0$

$(x^2-x+1)(2x^2-2x+x+1)=0$

$\underbrace{(x^2-x+1)}_{\geq 0}\underbrace{(2x^2-x+1)}_{\geq 0}\geq 0$

$2+1+2-6+1\geq 0$

x^2

$\cancel{2}+1-2+1$

$2\geq 0$ $\quad x-1\leq 0$

$x\leq 1$

$2x^4+x^2-2x-3x^2+3x^3+1\geq 0$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0$

$2x^4+2x^3+x^3-2x^2-2x+1\geq 0$

$2x(x^3-1)+2x^2(x-1)+(x^3+1)\geq 0$

$2x(x-1)(x^2+x+1)+2x^2(x-1)+(x+1)(x^2-x+1)\geq 0$

$(x-1)(2x(x^2+x+1)+2x^2)+(x+1)(x^2-x+1)\geq 0$

$(x-1)(2x^3+2x^2+2x+2x^2)+(x+1)(x^2-x+1)\geq 0$

$(x-1)(2x^3+4x^2+2x)+(x+1)(x^2-x+1)\geq 0$

$2x^3+2x^2-2x-x+1-x^2$

$2x(x-1)(x^2+2x+1)+(x+1)(x^2-x+1)\geq 0$

$x^2(2x-1)+x(2x-1)-(2x-1)$

$2x(x-1)(x+1)^2+(x+1)(x^2-x+1)\geq 0$

$(2x-1)(x^2+x-1)$

$(x+1)(2x(x^2-1)+x^2-x+1)\geq 0$

$(x+1)(2x^3-2x+x^2-x+1)\geq 0$

$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)\geq 0$ $\quad -1$ $\quad \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$(x+1)(2x-1)(x^2+x-1)\geq 0$ $\quad \frac{1}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad -1$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$32+4+4-36+1=$

$=$

$2x^3+x^2-3x+1$

$2x^3+2x^2-x^2-2x-x+1$

$x^2(2x-1)+x(2x-1)-(2x-1)$

$(2x-1)(x^2+x-1)$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}>-2$ $\quad -\sqrt{5}>-5$

$5<25$

$1-\sqrt{5}>-4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$

$x^2+2x+3x+6=0$

$x(x+2)+3(x+2)=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$x=-3$ корень

$\sqrt{x^3-x+10}=x+2$

$x^3-x+10=x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$1-1-5+6=0$

$-1-1+5+6$

$8-4-10+6$

$x=2$ корень

$-8-4+10+6$

$x^3-x^2-5x+6 \,|\, x-2$

$x^3-2x^2 \quad | \; x^2+x-3$

x^2-5x

x^2-2x

$-3x+6$

$-3x+6$

0

$\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{13})^3}{8}-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}+10}$

x^2+x-3

$(\sqrt{13}-1)^3=\sqrt{13}^3-1-3\cdot13+3\sqrt{13}=$

$D=1+12$

$=\sqrt{13}\cdot16-40$

$\sqrt{13}\cdot16-40+4-4\sqrt{13}=$

$=12\sqrt{13}-36$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}+2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

$12\sqrt{13}+44$

3 9 27 81

162

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$8-2+10$

$\sqrt{16}$

$4=4$

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq0$

1) $x>1$; $2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq0$

$2-3+4-2+1$

$2+3+4+2+1$

$32-24+16-4+1$

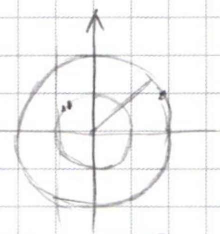
$32+24+16+4+1$

$162-81+36-6+1$

$162+81+36+6+1$

$\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{13})^3-4(-1+\sqrt{13})+80}{8}}$

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}+2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$



$x^2+y^2=R_1^2$

$x^2+y^2=R_2^2$

$-1+\sqrt{13}^3+3\sqrt{13}-3\cdot13=$

$=-40+\sqrt{13}\cdot(13+3)=-40+\sqrt{13}\,16=16\sqrt{13}-40$

$1+3=R_1^2$

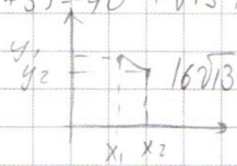
$R_1=2$

$12+4=R_2^2$

$R_2=4$

$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$\rho=4-2=R_2-R_1=2$



$16\sqrt{13}-40+4-4\sqrt{13}+80=$

$=12\sqrt{13}+44$

$\frac{12\sqrt{13}+44}{8}=$

$=\frac{3\sqrt{13}+11}{2}$

$x_1^2+y_1^2=4$

$x_2^2+y_2^2=16$

$y_1^2=4-x_1^2$

$y_2^2=16-x_2^2$

$\frac{y_1^2}{x_1^2}=\frac{4}{x_1^2}-1$

$\frac{y_2^2}{x_2^2}=\frac{16}{x_2^2}-1$

270

90

180, 90

$\begin{cases} 4=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \\ \frac{4}{x_1^2}-1=\frac{16}{x_2^2}-1 \\ y_1^2=4-x_1^2 \\ y_2^2=16-x_2^2 \end{cases}$

$16x_1^2=4x_2^2$

$4x_1^2=x_2^2$

$y_1^2=4-x_1^2$

$y_2^2=16-4x_1^2$

$\frac{y_2^2}{y_1^2}=4$

$y_2^2=4y_1^2$

$(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2=R$

$\left[\begin{array}{l} x_2=2x_1 \\ x_2=-2x_1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y_2=2y_1 \\ y_2=-2y_1 \end{array}\right.$

1) $x_2=2x_1$; $y_2=2y_1$

$4=x_1^2+y_1^2$

$y_2^2=4y_1^2$

$x_2^2=4x_1^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$

$b(4x+(a+b)y)=1$

$$\begin{cases} 3ax+3bx+12y-a=0 \\ 4bx+aby+b^2y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12y=a-3x(a+b) \\ (a+b)by=1-4bx \end{cases}$$

$y=\frac{a-3x(a+b)}{12}$

$y=\frac{1-4bx}{(a+b)b}$

$\frac{a-3x(a+b)}{12}=\frac{1-4bx}{(a+b)b}$

$ab(a+b)-3xb(a+b)^2=12-48bx$

$x(48b-3b(a^2+b^2+2ab))=12-ab(a+b)$

$x=\frac{12-ab(a+b)}{3b(16-(a+b)^2)}=$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$

$\frac{\pi R}{T}$

$C=2\pi R$

$C_1=4\pi$

$C_2=8\pi$

$\frac{C_2}{C_1}=2 \leftrightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{2}{1}$

$3a+3b=a$

$2a=-3b$

$b=-\frac{2}{3}a$

$(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25$

$(|y|-4)^2=25$

$(|y|-9)(|y|+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} |y|=9 \\ |y|=-1 \text{ неверно} \end{array}\right.$$

$(3;4)$

$|x-3-y|+|x-3+y|\le 6$

$$\begin{cases} x-3-y\ge 0 \\ x-3+y\ge 0 \end{cases}$$ $y=x-3$

$6+|2x|\le 6$ $\quad |2x|\le 0$

$2x=0$

$x=0$

$y=-3$

$x\le 6$

$y\le 3$

$5-3-2\ge 0$

$5-3+2\ge 0$

$x-3-y\ge 0$

$y\le x-3$

$\cancel{x-3-y}-x+3-y\le 6$

$\cancel{y\ge 6}\ -2y\ge -6$

$y\ge -3$

$x-3-y\le 0$

$y\le x-3$

$y\ge x-3$ $\quad x-3+y-x+3+y\le 6$

$2y\le 6$

$y\le 3$

$x-3-y+x-3+y\le 6$

$2x\le 12$

$x\le 6$

$y\ge x-3$

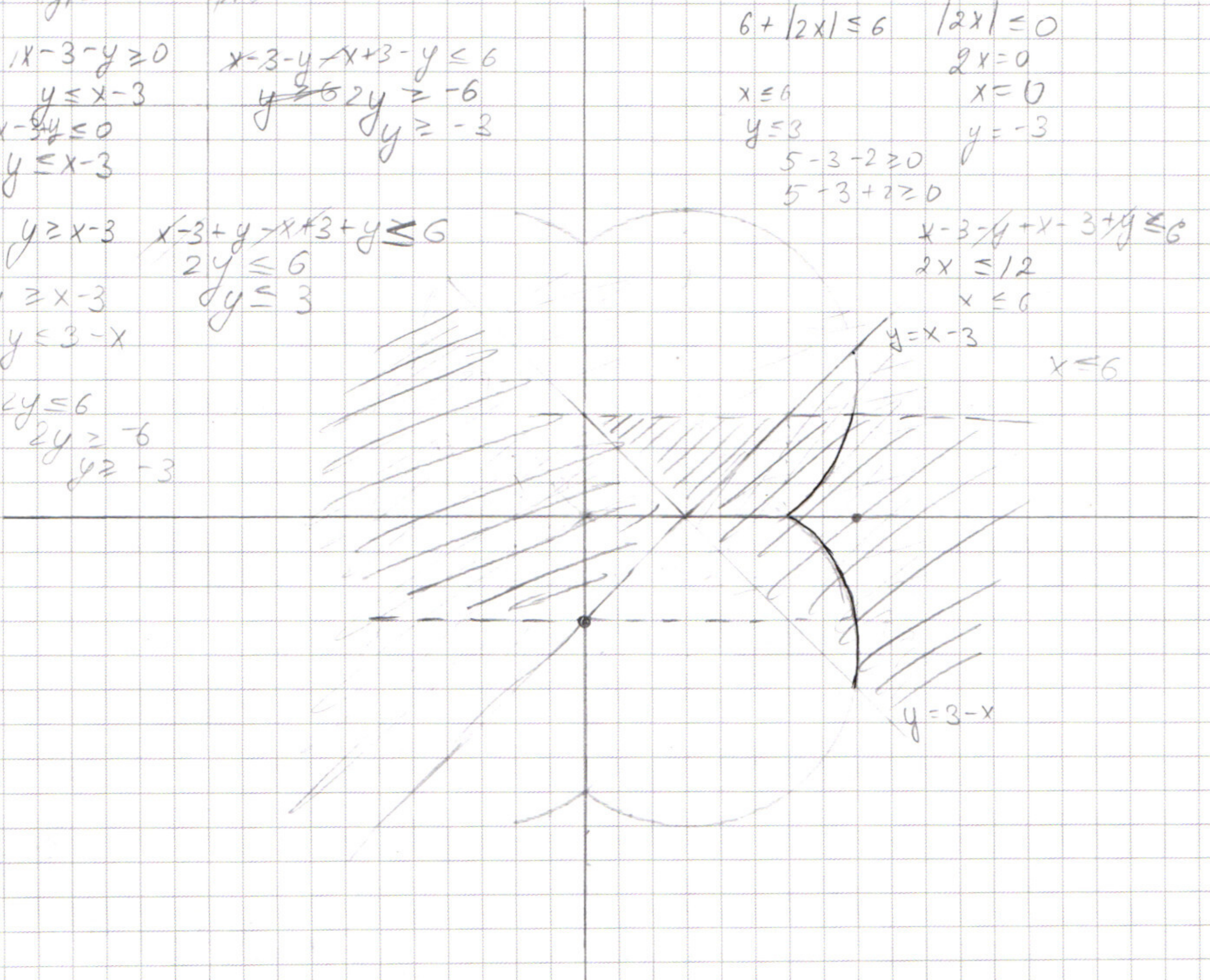
$y\le 3-x$

$x\le 6$

$-2y\le 6$

$2y\ge -6$

$y\ge -3$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР 20015542

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases}3(a+b)x+12y=a,\\ 4bx+(a+b)by=1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases}|x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6,\\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25.\end{cases}$$

$y \le x-3$
$y \ge 3-x$

$y \ge x-3$
$y \le 3-x$

$2y \le 6$
$y \le 3$