

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

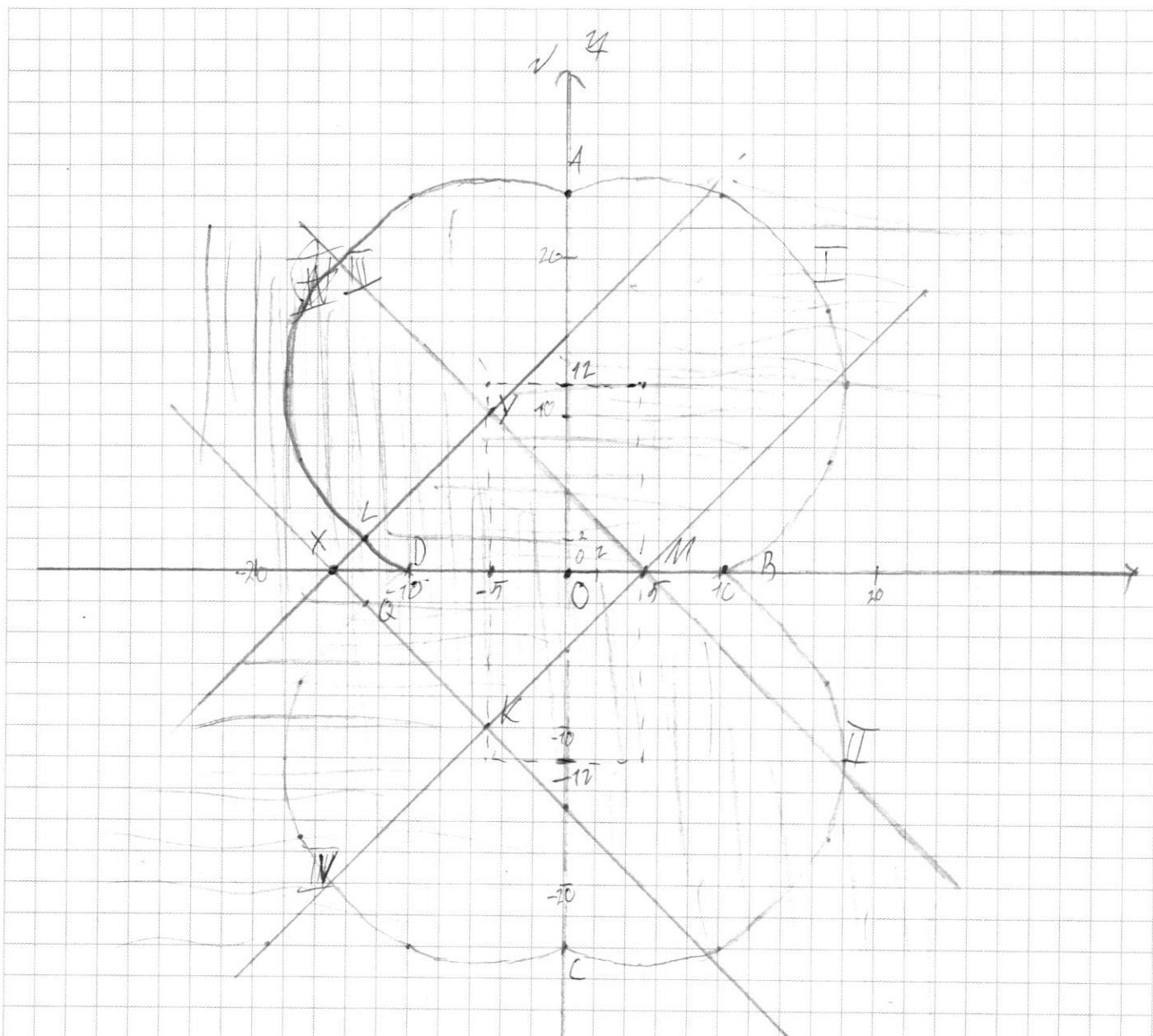
$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



На координатной плоскости построим $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 13^2$
 Рассмотрим случаи: $x \geq 0$, $x < 0$; $y \geq 0$, $y < 0$.
 Все это будут части окружностей. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ — уравнение окружности где (a, b) — координаты центра, a — радиус.

и 2

$b \neq 0$, т.к

$$\begin{cases} 3 \cdot 0 \cdot x + (a-0) \cdot 0 \cdot y = 7 \\ 0 = 7 \end{cases}$$

не имеет решений)

и $a-b \neq 0$

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 \cdot x + 6y = a \\ 3bx + 0 \cdot b \cdot y = 7 \end{cases}$$

$6y = a$ - горизонтальная линия
 $3bx = 7$ - вертикальная линия
1-решение

а нужно бесконечно много

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)b y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a - 2(a-b)x}{6} \\ y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}(a-b)x + \frac{a}{6} \\ y = -\frac{3}{(a-b)}x + \frac{1}{(a-b)b} \end{cases}$$

$y = kx + b$ - уравнение прямой
если у двух прямых бесконечно много решений
нужно чтобы k и b были одинаковыми у прямых

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}(a-b) = -\frac{3}{a-b} \quad I \\ \frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b)b} \quad II \end{cases}$$

$$I \quad \frac{a-b}{3} = \frac{3}{a-b}$$

$$(a-b)^2 = 9$$

$$a-b = 3$$

$$a-b = -3 \quad \text{или} \quad b-a = 3$$

и 6

$$a \cdot b \cdot (a-b) = 6 \quad III$$

$$a \cdot b \cdot (a-b) \neq -6 = 0$$

$$(3-b) \cdot b \cdot 3 - 6 = 0$$

$$3b - b^2 - 2 = 0$$

$$-b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$b_1 = \frac{3-1}{-1} = 2 \quad a = -1$$

$$b_2 = \frac{-3+1}{-1} = 2$$

Пусть $a-b = 3$

$$a = 3+b$$

$$(3+b) \cdot b \cdot 3 - 6 = 0$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17$$

$$b_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \quad a_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

$$b_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \quad b_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

Пусть $a-b = -3$

$$a = b-3$$

$$(b-3) \cdot b \cdot (-3) - 6 = 0$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$b_3 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad a_3 = -2$$

$$b_4 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad a_4 = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- I - дуга I и точки A, B, O
II - дуга II и точка C
III - дуга III и точка D
IV - дуга IV

$$(x-5)^2 + (y-12)^2 = 13^2$$

$$(x-5)^2 + (y+12)^2 = 13^2$$

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 13^2$$

$$(x+5)^2 + (y+12)^2 = 13^2$$

Рассмотрим $|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$, т.к. модуль неотрицателен, то каждый из членов ≤ 10 (если какой-то будет > 10 , сумма будет > 10)

$$\begin{cases} |x+y+5| \leq 10 \\ |x-y+5| \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+5 \leq 10 \\ x+y+5 \geq -10 \\ x-y+5 \leq 10 \\ x-y+5 \geq -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 5-x \\ y \geq -15-x \\ y \geq x-5 \\ y \leq x+15 \end{cases}$$

Наметим это на коорд. пл.

$\Rightarrow$ Всё что ~~не~~ лежит вне квадрата XUMK противоречит $|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$

на дуге LD (без точки D) $x = -10 - \Delta x$ (Δx - ~~не~~ положительное)
 $y = \Delta y$ (Δy - положительно)

$$|-10 - \Delta x + \Delta y + 5| + |-10 - \Delta x - \Delta y + 5| \neq =$$

$$= |- \Delta x + \Delta y - 5| + |- \Delta x - \Delta y - 5|$$

Δx - отриц., $\Delta y < 5$ $\Rightarrow$ $|- \Delta x + \Delta y - 5| + |- \Delta x - \Delta y - 5| = \Delta x - \Delta y + 5 + \Delta x + \Delta y + 5 =$

$$= 10 + 2\Delta x$$

$10 + 2\Delta x > 10 \Rightarrow$ точки дуги LD кроме D - не являются решением

1
 2 +
 3
 4 +
 5 +
 6 +
 7 +
 7 +

$$\begin{aligned}
 &4 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \\
 &4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \\
 &4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \\
 &4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &8! \\
 &\hline
 &3! \cdot 3! \\
 &\hline
 &8! \\
 &\hline
 &3! \cdot 2! \\
 &\hline
 &8! \\
 &\hline
 &3! \cdot 3!
 \end{aligned}$$

$$2 \frac{8! \cdot 2}{3! \cdot 3!} + \frac{8! \cdot 3}{3! \cdot 3!}$$

$$\frac{5 \cdot 8!}{3! \cdot 3!}$$

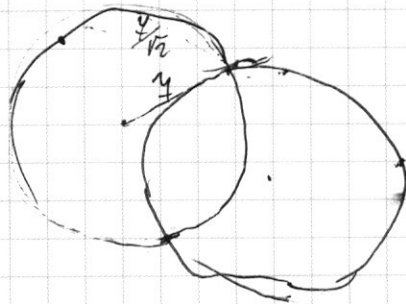
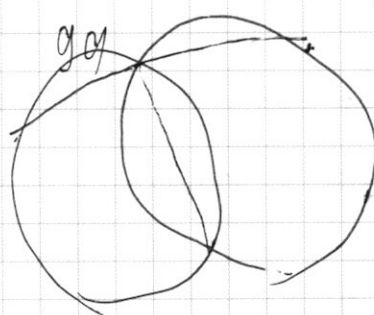
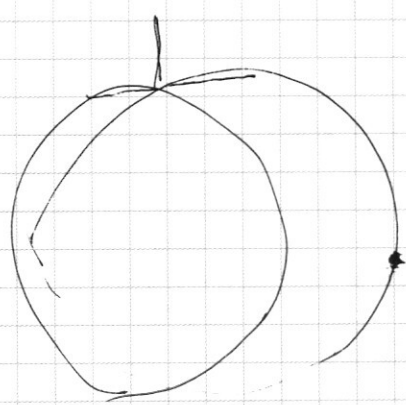
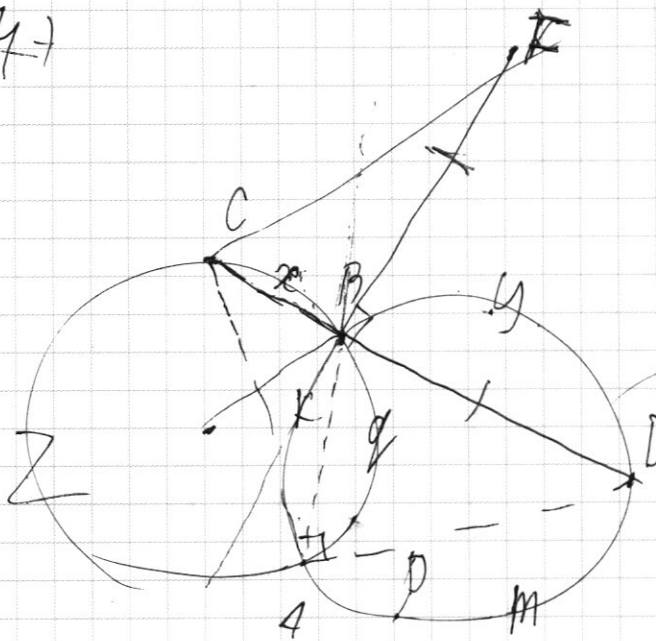
$$\begin{aligned}
 c + q + z &= 180 \\
 k + y + m &= 180
 \end{aligned}$$

$$90 \quad k = q$$

$$c + y = 90$$

$$49 \cdot 2 + 2 \cdot 49$$

$$2 \cdot 4 \quad 741$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

На графике QD (крайне точки) $x = -10 - \Delta x$ (Δx - положительно)
 $y = -\Delta y$ (Δy - положительно)

$$|-10 - \Delta x - \Delta y + 5| + |-10 - \Delta x + \Delta y + 5| = |-\Delta x - \Delta y - 5| + |-\Delta x + \Delta y - 5|$$

$$|\Delta y| \leq 5 \Rightarrow -\Delta x + \Delta y - 5 < 0 \text{ и } -\Delta x - \Delta y - 5 < 0$$

$$|\Delta y| \leq 5 \quad |-\Delta x - \Delta y - 5| + |-\Delta x + \Delta y - 5| = \Delta x + \Delta y + 5 + \Delta x - \Delta y + 5 =$$

$$= 10 + 2\Delta x > 10 \Rightarrow \text{точки графика QD (крайне точки) не являются решением. Проверим точки D и O}$$

Проверим точки D и O

$$D(-10; 0)$$

$$|-10 + 0 + 5| + |-10 - 0 + 5| \leq 10$$

$$|1 - 10| + |0 - 10| = 9 + 10 = 19$$

$$5 + 5 \leq 10$$

$$25 + 744 = 769$$

~~$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$~~

$$|0 + 0 + 5| + |0 - 0 + 5| \leq 10$$

$$|0 - 5| + |0 - 10| = 5 + 10 = 15$$

$$5 + 5 \leq 10$$

$$25 + 744 = 769$$

Ответ: D(-10; 0) и O(0; 0).

~~$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$~~

Рассмотрим 2 случая
I ($x+1 \geq 0$) и II ($x+1 < 0$)

~~$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$~~

~~$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$~~

при $x=1$ многочлен равно
 $\Rightarrow$ мы можем поделить на $(x-1)$

№ теор. Пифаг.

$$C'B'^2 + B'D'^2 = C'D'^2$$

$$CF^2 = CB^2 + BD^2 = C'B'^2 + B'D'^2 = C'D'^2$$

$$CF^2 = C'D'^2$$

(радиусы)

$$CF = C'D' = C'O_1 + O_1D' = 4 + 4 = 8$$

и 5

$4000 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ Эти простые множители должны ~~быть~~ в цифрах. Чтобы одна цифра ^{на} себя несла несколько простых множителей, нужно чтобы ~~их~~ их произведение было меньше 10

Так возможно в двух вариантах $4 = 2 \cdot 2$ и $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ ($5 \cdot 2 = 10$ $4 \cdot 2 > 10$ $4 \cdot 5 > 10$ и т.д.)

Число у нас должно быть 8-значным, нехватку цифр компенсируем единицами (чтобы произведение осталось прежним) $\Rightarrow$ у нас три

варианта цифр I (4, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 1) II (4, 4, 2, 5, 5, 5, 1, 1) III (4, 8, 5, 5, 5, 1, 1, 1)
 ~~Посчитаем~~
 ~~каждое перестановку~~
 ~~в каждой и сложим~~

$$\frac{8!}{3!3!} + \frac{8!}{3!2!} + \frac{8!}{3!3!} = \frac{8!}{3!3!} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{8!}{3!3!} = \frac{5 \cdot 8!}{3! \cdot 3!} =$$

$$\frac{4}{5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{20 \cdot 140 \cdot 280 \cdot 1400}{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4} = 5600$$

$$\frac{2}{8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \quad | \quad x-1 \\
 \underline{6x^4 - 6x^3} \\
 x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -3x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{-3x^2 + 3x} \\
 -x + 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$(6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1) = (x-1)(6x^3 - 3x + x^2 - 1) = (x-1)(3x(2x^2 - 1) + (x^2 - 1))$$

$$6x^4 - 5x^3$$

$$\begin{array}{l}
 I \quad x+1 \geq 0 \\
 x \geq -1
 \end{array}$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

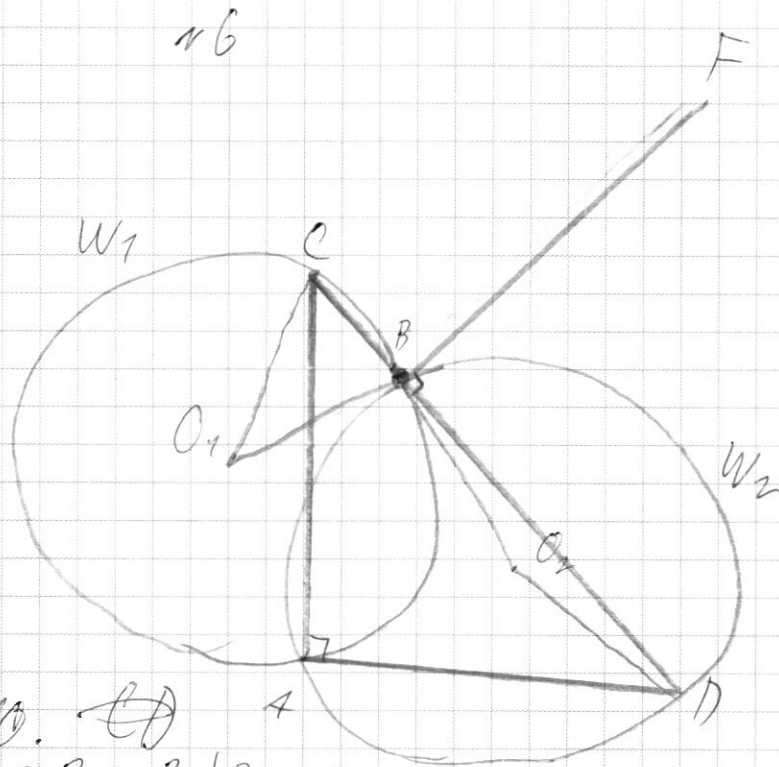
при $x=1$ множитель равен 0 $\Rightarrow$ мы можем разделить на $(x-1)$

$$\begin{array}{r}
 -6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \quad | \quad x-1 \\
 \underline{-6x^4 - 6x^3} \\
 x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -3x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{-3x^2 + 3x} \\
 -x + 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

Сокращенное решение на стр. 8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано
радиусы W_1 и $W_2 = 4$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $BF \perp CD$
 $BF = BD$
Найти
 $CF = ?$



По теор. Писко. $\odot$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2 \quad (BF = BD \text{ н/у})$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CB \quad (\text{угол опирающийся на дугу})$$

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BD$$

$$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 90^\circ$$

$$\frac{1}{2} \angle CB + \frac{1}{2} \angle BD = 90^\circ$$

$$\angle CB + \angle BD = 180^\circ$$

$$BO_1 = BO_2 = 4 \quad (\text{н/у})$$

$$\angle CO_1B = \angle CB$$

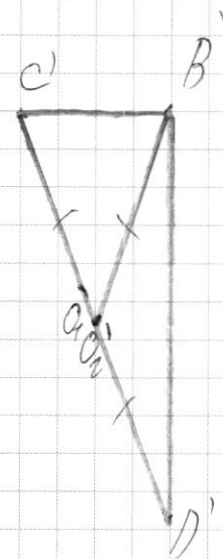
$$\angle BO_2D = \angle BD$$

Построим $\triangle C'B'D'$

(это возможно так как $BO_1 = BO_2$ и $\angle CO_1B + \angle BO_2D = 180^\circ$)

$$CO_1 = BO_1 \quad (\text{радиусы}) \Rightarrow CO_1' = BO_1' = O_1'D' \quad O_1' - \text{центр}$$

$BO_2 = O_2D$ ~~отсюда~~ $\triangle C'B'D' \neq \text{прямоугольный}$



$$x^4 - 4x^2 + 2x + 7$$

$$2(a-b)x + 6y = a$$

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{6}$$

$$3bx + (a-b)y = 1$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b}$$

$$y = -\frac{1}{3}(a-b)x + \frac{a}{6}$$

$$5 \times \frac{4}{5} = 280$$

$$-(x-1)x^2 + 6x^3 - 3x + 2x^2 - 1$$

$$y = -\frac{3}{(a-b)}x + \frac{1}{(a-b)b}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1400}{4} = 5600$$

$$x-1 > 0$$

$$x > 1$$

$$\frac{1}{3}(ab) = \frac{3}{a-b}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b)b}$$

$$(a-b)^2 = 9$$

$$ab(a-b) = 6$$

$$a-b = 3$$

$$ab = 2$$

$$ab = -2$$

$$b-a = 3$$

$$a(3+a) =$$

$$a^2 + 3a - 1 = 0$$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6x^2(x^2+1) + 5x^2(x^2+2x+1)$$

$$-24 - 40$$

$$5x^4 + 5x^3 + 5x^2$$

$$x^4 + 5x^2(x^2+x+1) + 1$$

$$2$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3(x+1) + 1 \geq 0$$

$$x^2(6x^2+1)$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$1$$

$$(x-1) | (6x^3 + x^2 - 3x - 1)$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 1$$

$$(x^2-1) | (3x+1)(x-1)$$

$$-6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$

$$-6x^4 - 6x^3$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$

$$x^3 - x^2$$

$$-3x^2 + 2x + 1$$

$$-3x^2 + 3x$$

$$-x + 1$$

$$-x + 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\begin{aligned} b &= \frac{3 - \sqrt{14}}{2}; a = \frac{3 - \sqrt{14}}{2} \\ b &= \frac{3 + \sqrt{14}}{2}; a = \frac{3 + \sqrt{14}}{2} \end{aligned} \right) \quad \left(\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}; a = \frac{-2}{-4} \\ b &= \frac{1}{2}; a = \frac{1}{1} \end{aligned} \right)$$

и 4

Рассмотрим II случай

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x^4 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x^4 + 5x^2(x^2 + x + 1) + (x+1)^2 \geq 0$$

$$x^2 + x + 1 - \text{это } x \text{ коэффициент при } x^2 > 0$$

$$\text{и } D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0$$

$$x^2 + x + 1 > 0$$

$$5x^2 \geq 0$$

$$x^4 \geq 0$$

$$(x+1)^2 \geq 0$$

$$\text{при } x+1 < 0$$

$$x < -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$

$$x^4 + 5x^2(x^2 + x + 1) + (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{при } x < -1 \quad 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$

