

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рс
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

Чтобы система ^{уравнений} имела бесконечно много решений нужно, чтобы все уравнения были одинаковыми.

т.е.
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = 4bx + (a+b)by \\ a = 1 \end{cases}$$

$$(3a + 3b - 4b)x = (ab + b^2 - 12)y$$

$$0x = 0y$$

$$\cancel{3a+3} \quad 3a - b = 0 \Rightarrow b = 3a = 3 \cdot 1 = 3$$

$$b^2 + ab - 12 = 0$$

$$b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow (b+4)(b-3) = 0$$

$$b = 3; \quad b = -4 \rightarrow \text{н.к.}$$

Ответ: при $a = 1; b = 3$

№3.

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)}$$

$$x^3-x+10 = \frac{(x+3)^2(x+2)^2}{(x+3)^2}$$

$$\frac{(x^3-x+10)(x+3)^2 - (x+3)^2(x+2)^2}{(x+3)^2} = 0$$

$$\frac{(x+3)^2(x^3-x+10-x^2-4x-4)}{(x+3)^2} = 0$$

$$\frac{(x+3)^2(x^3-x^2-5x+6)}{(x+3)^2} = 0$$

Произведение равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один

из множителей равен 0.

Дробь равна 0 тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не 0.

$$(x+3)^2(x^3-x^2-5x+6)=0$$

$$(x+3)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3.$$

$$x^3-x^2-5x+6=0.$$

	1	-1	-5	6	
1	1	0	-5	1	
-1	1	-2	-3	9	
2	1	1	-3	0	✓

$$x^3-x^2-5x+6=(x-2)(x^2+x-3)$$

$$x^2+x-3=0.$$

$$D=1+4 \cdot 3=13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$x^3-x^2-5x+6=(x-2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

Ответ: $x=2$; $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geq 0$$

1) $x \leq 1$. $\Rightarrow$ Модуль раскроем со знаком "-"

$$2x^4+x^2-2x+3x^2(x-1)+1 \geq 0.$$

$$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1 \geq 0.$$

$$2x^4+2x^3-(2x^2+2x)+(x^3+1) \geq 0.$$

$$2x^3(x+1)-2x(x+1)+(x+1)(x^2-x+1) \geq 0$$

$$(x+1)(2x^3-2x+x^2-x+1) \geq 0.$$

$$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1) \geq 0.$$

$$2x^3+x^2-3x+1=0.$$

$$(2x^3-x^2)+(2x^2-x)-(2x-1)=0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2(2x-1) + x(2x-1) - (2x-1) = 0.$$

$$(x^2 + x - 1)(2x-1) = 0.$$

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(x+1)(2x-1)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0.$$

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \vee -1 \quad | \cdot 2 \quad (2 > 0 \Rightarrow \text{знак не меняется})$$

$$-1-\sqrt{5} \quad \vee -2.$$

$$-\sqrt{5} \quad \vee -1.$$

(возведем в квадрат, но у нас числа отриц. $\Rightarrow$ знак поменяется)

$$5 > 1. \quad - \text{знак поменяется} \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1.$$

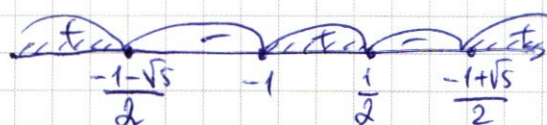
$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \frac{1}{2}. \quad | \cdot 2 \quad (2 > 0 \Rightarrow \text{знак не меняется})$$

$$-1+\sqrt{5} \quad \vee 1. \quad | +1.$$

$$\sqrt{5} \quad \vee 2$$

- возведем в квадрат, оба числа $> 0 \Rightarrow$ знак не см.

$$5 > 4 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2}$$



$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee 1.$$

$$-1+\sqrt{5} \quad \vee 2.$$

$$\int x \in (-\infty; -\frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty) \quad \sqrt{5} \quad \vee 3.$$

$$| x < 1$$

$$5 < 9 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1.$$

$$x \in (-\infty; -\frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 1)$$

2) $x \geq 1. \Rightarrow$ Модуль раскрываем со знаком "+"

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 2 - x^3 - 1 \geq 0.$$

$$2x^2 \left(\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - \left(x + \frac{1}{x} \right) + 2 \right) - (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$$2x^2 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) - (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$$2x^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) - (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$$2x^2 \cdot \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x^2-x+1}{x} - (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$$(x^2 - x + 1) \left(\frac{2x^2(x^2+1)}{x^2} - (x+1) \right) \geq 0.$$

$$(x^2 - x + 1) \frac{2x^4 + 2x^2 - x^3 - x^2}{x^2} \geq 0.$$

$$(x^2 - x + 1) \frac{(2x^4 - x^3 + x^2)}{x^2} \geq 0.$$

$$\frac{(x^2 - x + 1)x^2}{x^2} \frac{(2x^4 - x^3 + x^2)}{x^2} \geq 0.$$

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

$$2x^2 - x + 1 = 0.$$

$$D = 1 - 4 < 0$$

$$D = 1 - 8 < 0.$$

$$\text{н. ф.: } 0$$

$$y = \frac{x^4(x^2 - x + 1)(2x^4 - x^3 + x^2)}{x^2}$$

$$\text{н. ф.: } 0$$

$$x \neq 0.$$

$\Rightarrow$ ф-ия всегда > 0 . (кроме $x=0$ - выколотая точка)

$$\begin{cases} x \in (-\infty, +\infty) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \geq 1.$$

оба параболы,
ветви вверх $\Rightarrow$
обе ф-ии всегда > 0 .

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$$

$$\sqrt{5}.$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6. \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

$$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$$

Построим графики неравенства и уравнения

$$1) (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25.$$

$$1. \quad x, y \geq 0$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Мог были ур-ние окр-ти, у которой центр в точке $(3; 4)$, а её радиус $= 5$.

2. $x \geq 0, y \leq 0$.

$$(x-3)^2 + (-y-4)^2 = 5^2$$

- Окр-ть с центром в точке $(3; -4)$ и радиусом 5

3. $x < 0, y \geq 0$.

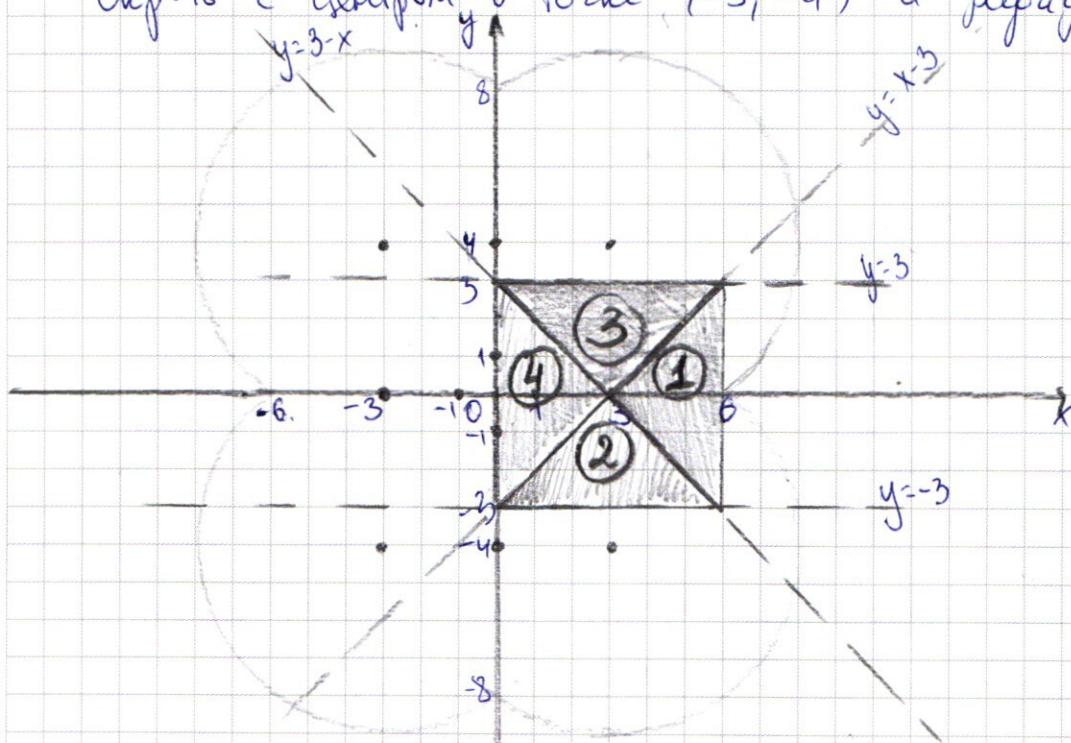
$$(-x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

Окр-ть с центром в точке $(-3; 4)$ и радиусом 5

4. $x < 0, y < 0$.

$$(-x-3)^2 + (-y-4)^2 = 5^2$$

Окр-ть с центром в точке $(-3; -4)$ и радиусом 5.



2) $|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$.

1. $\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x-3-y+x-3+y \leq 6 \Rightarrow x \leq 6$.

$$\begin{cases} y \leq x-3 \\ y \geq 3-x \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Построим прямые $y = x-3$ и $y = 3-x$.

$$\begin{array}{r|l} x & 3 & 6 \\ y & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x & 3 & 6 \\ y & 0 & -3 \end{array}$$

$$2. \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y < 0 \\ x-3-y-x+3-y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \\ y < 3-x \\ y \geq -3 \end{cases}$$

Построим прямую $y=3$

$$3. \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y \geq 0 \\ -x+3+y+x-3+y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x-3 \\ y \geq 3-x \\ y \leq 3 \end{cases}$$

Построим прямую $y=3$

$$4. \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y < 0 \\ -x+3+y+3-x-y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x-3 \\ y < 3-x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

По графику мы видим, что ~~единственная~~ ^{есть} точка: $(6; 0)$ и $(0; 0)$

Проверим: 1) $|6-3-0| + |6-3+0| = 3+3 = 6 \leq 6$.

$$(6-3)^2 + (0-3)^2 = 3^2 + 9 = 18$$

2) $|0-3-0| + |0-3+0| = 3+3 = 6 \leq 6$.

$$(0-3)^2 + (0-3)^2 = 9 + 9 = 18$$

Ответ: $(6; 0); (0; 0)$
НБ.

8-значн. числа. Проверение цифр равно 1400

$$\begin{array}{r|l} 1400 & 2 \\ 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & 7 \end{array}$$

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

т.е. различные варианты перестановок цифр

будут из наборов: 1) 22255711

2) 24557111

3) 85571111

Никаких других быть не может, т.к. $2 \times 5, 5 \times 7, 2 \times 7 > 9$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $4 \times 5, 4 \times 7, 8 \times 5, 8 \times 7 > 9$

1) 2 2 2 5 5 7 1 1

Всего из 8 цифр можно получить $8!$ чисел (если ни одно из них не равно 0)

Но т.к. у нас есть повторяющиеся цифры: 3 «2», 2 «5», 2 «1», то способов перестановки будет меньше (верь если хочешь посчитав 2 двойки, то ничего не изменится)

$$P_1 = \frac{8!}{3!2!2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

2) 2 4 5 5 7 1 1 1

Похожая ситуация: 8 цифр всего, но из них одинаковые 2 «5» и 3 «1»

$$P_2 = \frac{8!}{2!3!} = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 3360$$

3) 8 5 5 7 1 1 1 1

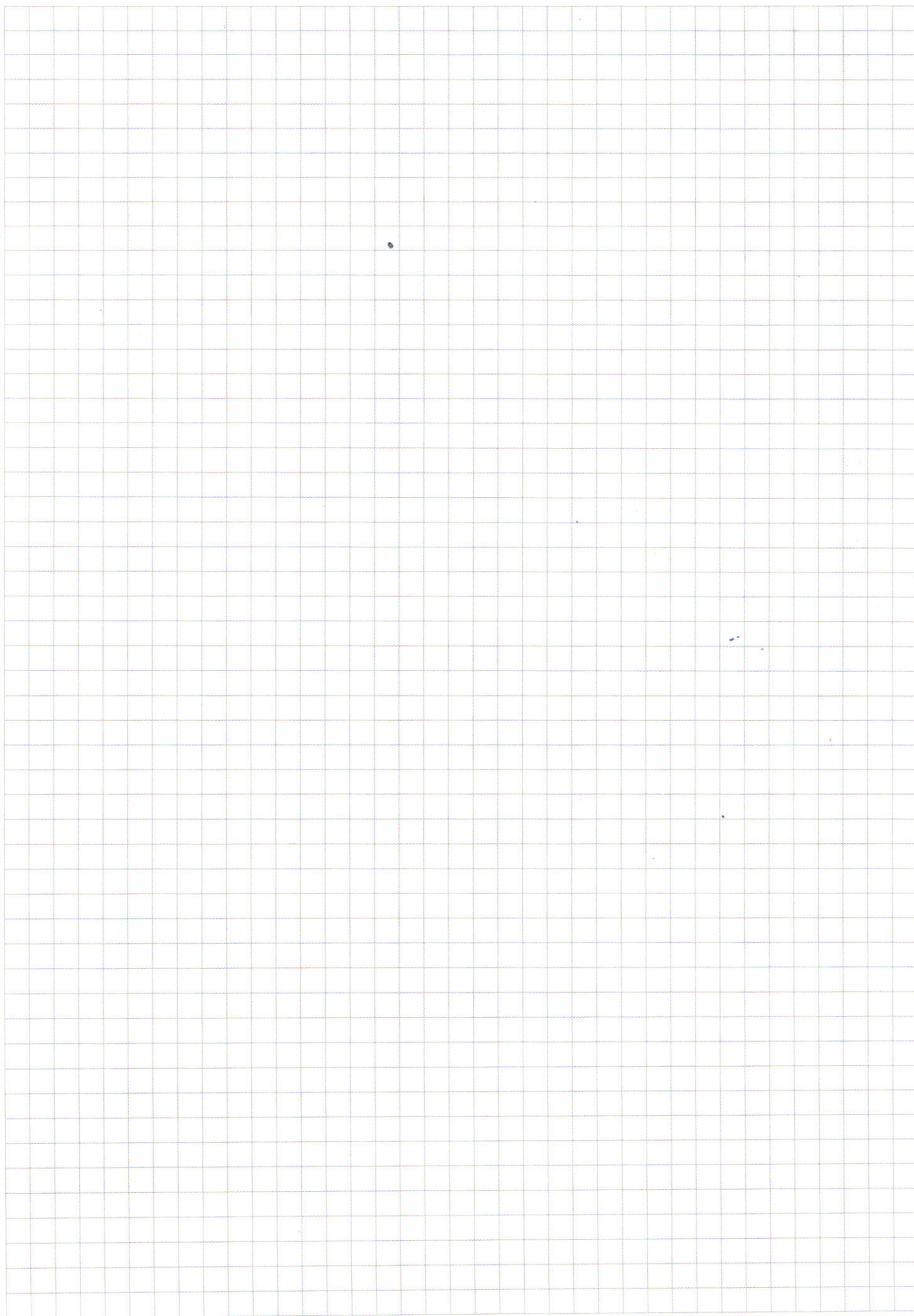
Снова: 8 цифр, из них одинаковых 2 «5» и 4 «1»

$$P_3 = \frac{8!}{2!4!} = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 840$$

$P = P_1 + P_2 + P_3$ - всего подкорректированных чисел.

$$P = 1680 + 3360 + 840 = 5880$$

Ответ: 5880.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle BDK \sim \triangle BMC \sim \triangle ANK$

$BMAA - \text{впис}$

У и угол изменился α кур. пробежал S
на $\alpha \Rightarrow$ ужука на $\frac{\pi \alpha}{180}$

$y = kx + b$
 $b = 0$

$2 = k_N \cdot 2\sqrt{3}$
 $k_N = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $k_M \cdot k_N = -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -1$
 $y = kx + b$
 $0 = 0 + b \quad b = 0$

$\text{tg } \alpha = \frac{k_N - k_M}{1 + k_M k_N}$
 $\alpha = 90^\circ$ между линиями

$\text{tg } \alpha = \frac{k_N - k_M}{1 + k_M k_N} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\sqrt{3})}{1 + (-\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1 - 1} = \frac{\frac{1 + 3}{\sqrt{3}}}{0} = \frac{4}{0} = \infty$
 $\alpha = 90^\circ$

$\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$
 $n\alpha + \frac{n\alpha}{2} = 90$
 $3n\alpha = 180$
 $n\alpha = 60$

$\text{tg } 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$
 $\text{tg } 180 = 0$

$k_M = k_N$
 $y_M = k x_M$
 $y_N = k x_N$
 $(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = 4$

0 или 180

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

№1.

$$M_0(-1; \sqrt{3}), \quad M_0(2\sqrt{3}; 2)$$

$O(0; 0)$ - центр.

Найдём радиусы окр-тей.

$$r_M = \sqrt{(x_{M_0} - x_0)^2 + (y_{M_0} - y_0)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$r_N = \sqrt{(x_{M_0} - x_0)^2 + (y_{M_0} - y_0)^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{12+4} = 4.$$

Кратчайшее расстояние между ними; когда жук и муравей находятся на одной прямой с началом координат и в одной четверти.

Т.е. кратчайшее расстояние $= r_N - r_M = 2$.

При этом уравнение окр-тей: $x_M^2 + y_M^2 = 4$
 $x_N^2 + y_N^2 = 16$.

Ур-ние прямой, на которой лежат т. M_0 и O : $y_M = k_M x_M + b_M$.

т. O : $0 = k_M \cdot 0 + b_M \Rightarrow b_M = 0$.

т. M_0 : $\sqrt{3} = -1 \cdot k_M + 0 \Rightarrow k_M = -\sqrt{3} \Rightarrow y_M = -\sqrt{3} \cdot x_M$

Ур-ние прямой, на которой лежат т. N_0 и O : $y_N = k_N x_N + b_N$

т. O : $0 = k_N \cdot 0 + b_N \Rightarrow b_N = 0$

т. N_0 : $2 = 2\sqrt{3} k_N + 0 \Rightarrow k_N = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$k_M \cdot k_N = -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -1 \Rightarrow$ угол между их направлениями положений $= 90^\circ$

Их скорости равны $\Rightarrow$ за равное время они пройдут равное расстояние.

$C_M = 2\pi r_M = 4\pi$ - длина окр-ти муравья

$C_N = 2\pi r_N = 8\pi$ - длина окр-ти жука.

$\frac{4\pi\alpha}{360^\circ}$ - расстояние, которое пройдёт муравей, при увеличении угла на α
 $\frac{8\pi\beta}{360} = \frac{\pi\beta}{45}$ - то же расстояние, что и у муравья, но жук при этом.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

проходит угол β

$$\frac{\pi\alpha}{90} = \frac{\pi\beta}{45} \quad | \cdot \frac{90}{\pi}$$

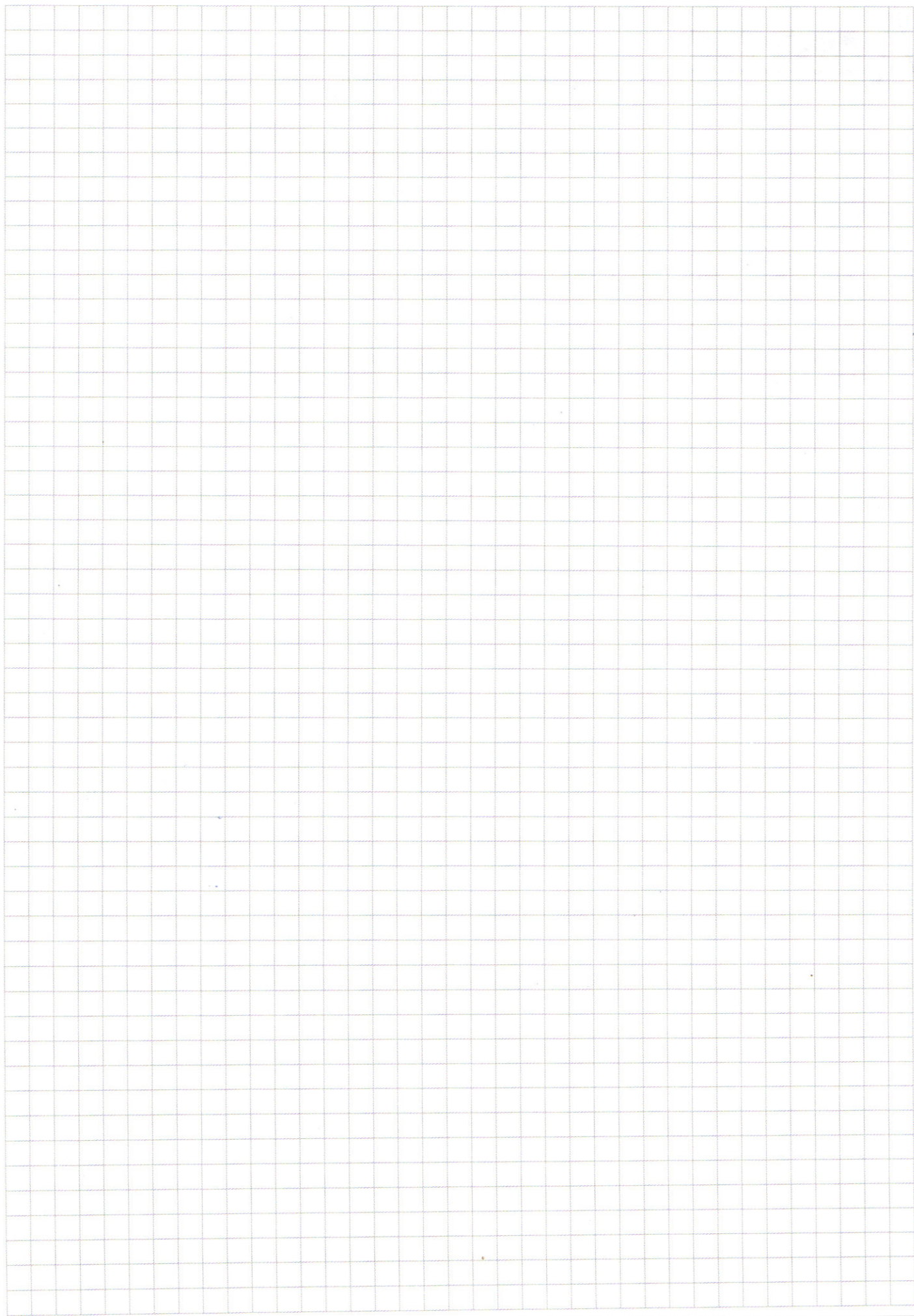
$$\alpha = 2\beta$$

Нам нужно, чтобы α и β были на одной линии, т.е.
они должны составить в сумме угол на 90° .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$2\beta + \beta = 90^\circ$$

$$3\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ - \text{найдем } \alpha$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
* (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{a - 3ax - 3bx}{12}$$

$$y = \frac{1 - 4bx}{ab + b^2}$$

$$(3x + y)(a+b) + 12y + 4bx = a + 1$$

$$\frac{a - 3ax - 3bx}{12} = \frac{1 - 4bx}{ab + b^2}$$

$$a^2b + ab^2 - 3a^2bx - 3ab^2x - 3ab^2x - 3b^3x = 12 - 48bx$$

$$x(-3a^2b - 6ab^2 - 3b^3 + 48b) = 12 - a^2b - ab^2$$

$$x = \frac{12 - a^2b - ab^2}{-3(a^2b + 2ab^2 + b^3 - 16b)}$$

$$\begin{cases} (a+b)x + 4y = \frac{a}{3} \\ 4x + (a+b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ \frac{a}{3} = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$$

$$a = 4 - b$$

$$4b \cdot b^2 - 3 = 0$$

$$b^3 - 4b + 3 = 0$$

$$(b-3)(b-1) = 0$$

$$b = 3; 1 \quad a = 1; 3$$

$$\begin{cases} (x; y) \\ 12x + 4y = 1 \\ 12x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ 12 = (a+b)b \\ a = 1 \end{cases}$$

$$3a = b$$

$$12 = ab + b^2$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a-4)x + 12y = a \\ -16x + 4(a-4)y = 1 \end{cases}$$

$$3a - 12 = -16$$

$$3a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$3(b+1)x + 12y = 4bx + (a+b)by$$

$$(12 - b - b^2)y = (4b - 3b - 3)x$$

$$12 - b - b^2 = (b-3)x$$

$$1400 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$

.....

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 7 \quad 7 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 7 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 8 \quad 5 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

раз. кордоок

$$\begin{array}{r} 3360 \\ 1680 \\ 840 \\ \hline 5880 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3!2!2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

$$\frac{8!}{2!3!} = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 3360$$

$$\frac{8!}{2!4!} = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 840$$

кр. крат. коор. $r_n - r_m = d$.

$$C_m = 2\pi r_m = 4\pi$$

$$C_n = 2\pi r_n = 8\pi$$

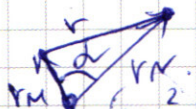
$S = 10\pi$ Они проползают одинак. расст. за равное время.

$$(-1-x)^2 + (\sqrt{3}-y)^2 = (2\sqrt{3}-x)^2 + (2-y)^2$$

$$\begin{cases} (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 = 4 \\ (x_m + 1)^2 + (y_m - \sqrt{3})^2 = (x_n - 2\sqrt{3})^2 + (y_n - 2)^2 \\ x_n^2 + y_n^2 = 16 \\ x_m^2 + y_m^2 = 4 \end{cases}$$

$$x_m^2 + 2x_m + 4 + y_m^2 - 2\sqrt{3}y_m = x_n^2 - 4\sqrt{3}x_n + 16 + y_n^2 - 4y_n$$

$$r = \sqrt{r_m^2 + r_n^2 - 2r_m r_n \cos \alpha} \quad 8 + 2x_m - 2\sqrt{3}y_m = 32 - 4\sqrt{3}x_n - 4y_n$$



$$4x_m - \sqrt{3}y_m = 12 - 2\sqrt{3}x_n - 2y_n$$

$$(x_n^2 - 2x_n x_m + x_m^2 + y_n^2 - 2y_n y_m + y_m^2) = 4$$

$$2y_n r^2 = r_m^2 + r_n^2 - 2r_m r_n \cos \alpha \quad x_n x_m + y_n y_m = 8$$

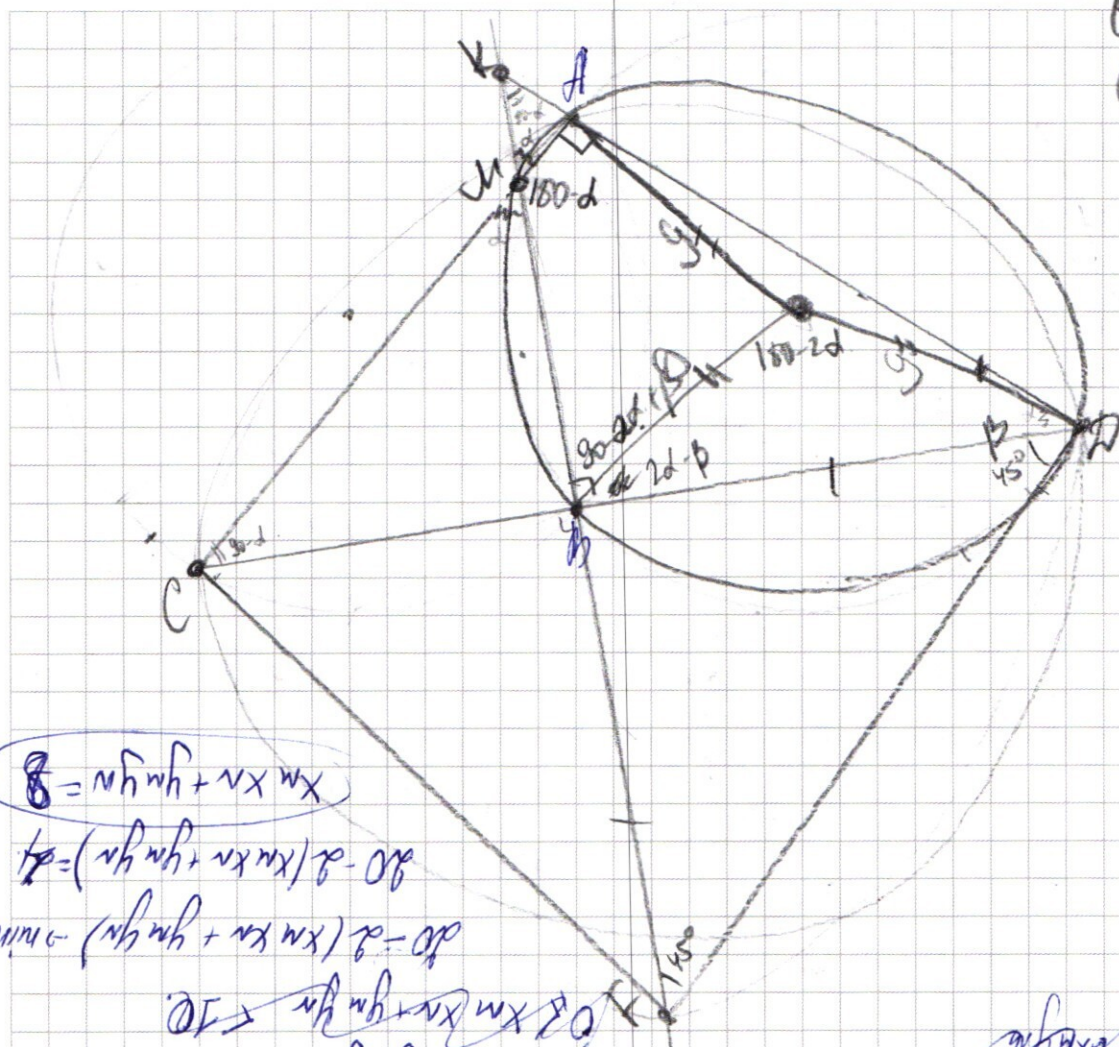
$$(x_n + x_m)^2 + (y_n + y_m)^2 - 2x_n x_m - 2y_n y_m = 20$$

$$(x_n + x_m)^2 + (y_n + y_m)^2 - 16 = 20$$

$$(x_n + x_m)^2 + (y_n + y_m)^2 = 36$$

$$(x_m + x_n) + (2\sqrt{3} - 1)x_n + 2(y_m + y_n) + (2 + \sqrt{3})y_n = 12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



OK - ?
(R = 9)

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$g = w_y w_y + w_x w_x$$

$$f_2 = (v_1^2 v_2^2 + v_1 x v_2 + y_1 y_2) = d_2$$

$$d\phi = -2(x_m x_n + y_m y_n) \rightarrow \text{min.}$$

~~$0.8 \times m \times 10 + 10$~~

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

до-дхмх-дхмх → мн

$$x_{n+1} - dx_n x_n + x_n^2 + y_n - dy_n y_n + y_n^2 \rightarrow \min.$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad \text{y m s}^{-1} \quad (v_y - w_y) + (v_x - w_x)$$

9 $x = 1$

$$q_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$X_M^2 + Y_M^2 = 4.$$

$$= 4 + (8 \times 1) = 12$$

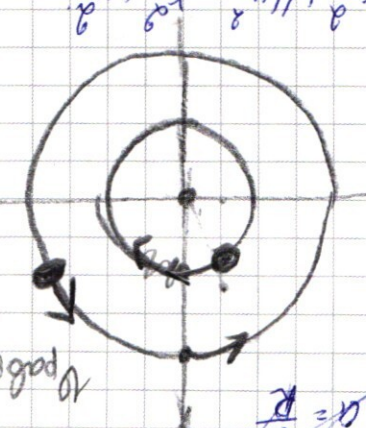
$$\sqrt{(-1-0)^2 + (13-0)^2}$$

$$x = \frac{(-1 \pm \sqrt{1 + 13})}{2} = 2$$

$$w \cdot f(x) - (w \cdot x + w) \cdot \frac{1}{4}$$

~~$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$~~

$$w_L + w_X = w_L + w_X$$



~~$$S = \frac{a}{R}$$~~

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25 \end{cases}$$

$$x^2 - 6|x| + y^2 - 8|y| = 0$$

$$(x-3-y)^2 + (x-3+y)^2 + 2|(x-3-y)(x-3+y)| \leq 36 \quad 2|x^2 - 6x + 9 - y^2| \leq 36$$

$$x^2 + 9 + y^2 - 6x + 6y - 2xy + x^2 + 9 + y^2 - 6x + 2xy - 6y + 2|x^2 - 6x + 9 - y^2| \leq 36$$

$$(x-3-y)(x-3+y) = x^2 - 3x + xy - 3x + 9 - 3y - xy + 3y - y^2 = x^2 - 6x + 9 - y^2$$

$$2x^2 + 18 + 2y^2 - 12x + 2|x^2 - 6x + 9 - y^2| \leq 36$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + |x^2 - 6x + 9 - y^2| \leq 36$$

$$(|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$|x-3| + (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

$$y^2 - 8y = 6x - x^2$$

$$(|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25$$

$$x, y \geq 0: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad |x-3| = 5 \quad |y-4| = 5$$

$$x > 0, y < 0$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x, y > 0$$

$$x-3-y \geq 0$$

$$x-3 \geq y$$

$$x-3+y \geq 2y$$

$$x-3-y + x-3+y \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$x-3-y - x+3-y \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$x-3-y \geq 0$$

$$x-3+y \leq 0$$

$$y \leq x-3$$

$$y \leq 3-x$$

$$x \in [y+3; 3-y]$$

$$x \geq y+3$$

$$x \leq 3-y$$

$$-x+3+y + x-3+y \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$x-3-y \leq 0$$

$$x-3+y \geq 0$$

$$y > x-3$$

$$y > 3-x$$

$$(|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25$$

$$-x+3+y - x+3-y \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$x-3-y \leq 0$$

$$x-3+y \leq 0$$

$$y > x-3$$

$$y < 3-x$$

$$x-3-y \geq 0$$

$$x-3+y \geq 0$$

$$y = x-3$$

$$y \leq x-3$$

$$y \geq 3-x$$

$$y \in [3-x; x-3]$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax + 3bx + 12y = a \\ 4bx + aby + by^2 = 1 \end{cases}$$

$$4abx + a^2by + ab^2y =$$

№3. $(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6.$

$$x \in \mathbb{R} \quad \boxed{x^3 - x + 10 \geq 0.}$$

$$x \neq -3 \quad \text{т.к. } (-3)^3 - (-3) + 10 < 0.$$

$$5 \cdot 16 = 80$$

$$4 + 10 + 6 = 20.$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2).$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = \frac{(x+3)(x+2)}{x+3}$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4.$$

$$x^3 - x + 10 = \frac{(x+3)^2(x+2)^2}{(x+3)^2}$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$$\frac{(x^3 - x + 10)(x+3)^2 - (x+3)^2(x+2)^2}{(x+3)^4} = \frac{x^3 - x^2 - 5x + 6}{x^4 + x - 3}$$

$$0 = \frac{(x+3)^2 (x^3 - x + 10 - x^2 - 4x - 4)}{(x+3)^2} = \frac{x^3 - x^2 - 5x + 6}{x^4 + x - 3}$$

$$1 + 12 = (\sqrt{13})^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

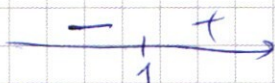
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$$x \neq -3$$

	1	-1	-5	6
1	1	0	-5	1
-1	1	-2	-3	9
2	1	1	-3	0

№4. $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x - 1 | + 1 \geq 0.$



1) $x < 1.$

$$2x^4 + 3x^2 - 2x + 3x^2(x-1) + 1 \geq 0.$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 2x^3 - (2x^2 + 2x) + 1 + x^3 \geq 0$$

$$2x^3(2x+1) - 2x(x+1) + (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$2x^3(2x+1) - 2x(x+1) + 3x$$

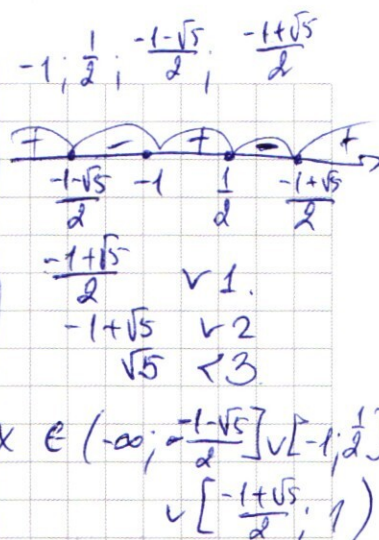
☒ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)



$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1)$$

$$(x+1)(2x^3 - 2x^2 + x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0.$$

$$\frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x^3 - x^2} \quad |x - \frac{1}{2}|$$

$$\frac{2x^3 - x^2 - 2x^2 - 3x}{2x^3 - x^2} = \frac{-2x^2 - 3x}{2x^3 - x^2} = \frac{-2x + 1}{-2x + 1} = 0$$

$$2(x+1)(x - \frac{1}{2})(x^2 + x - 1) \geq 0.$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x(2x^2(x-1) + 2x^2 - x =$$

2) $x \neq 1$.

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0.$$

$$2x^4 + 4x^2 - 2x - 3x^3 + 1 \geq 0.$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0.$$

$$2x^3(x-1) + 2x(x-1) - x^3 + 2x^2 + 1 \geq 0.$$

$$(2x^3 + 2x)(x-1) - x^3 + 2x^2 + 1 \geq 0.$$

$$(2x^3 - x^2 + 2x)(x-1) + (x-1)(x+1) + 2 \geq 0.$$

$$(2x^3 - x^2 + 3x + 1)(x-1) + 2 \geq 0.$$

$$2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 2 = 0. \quad | :2$$

$$2x^2 \left((x^2 + \frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{x}) + 2 \right) = 0.$$

$$x + \frac{1}{x} = t. \quad t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$t^2 - t = 0.$$

$$t(t-1) = 0.$$

$$t = 0, 1.$$

$$x + \frac{1}{x} = 0.$$

$$x + \frac{1}{x} = 1.$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} \neq 0.$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} \neq 0.$$

$$2x^2 \left((x + \frac{1}{x})^2 - (x + \frac{1}{x}) \right) = 0.$$

$$2x^2 (x + \frac{1}{x}) (x + \frac{1}{x} - 1) - (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$$2x^2 \cdot \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x} - (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$x \neq 0$.

$$\frac{(x^2 - x + 1)(2x^2 + 2 - x - 1)}{x^2} \geq 0.$$

$$\frac{2x^2(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)}{x^2} - (x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0.$$

$$(x^2 - x + 1) \left(\frac{2x^2(x^2 + 1)}{x^2} - (x+1) \right) \geq 0.$$

$$(x^2 - x + 1) \left(\frac{2x^4 + 2x^2 - x^3 - x^2}{x^2} \right) \geq 0.$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - (x + \frac{1}{x})$$

$$(x^2 - x + 1) \frac{2x^4 - x^3 + x^2}{x^2} \geq 0.$$

$$(x^2 - x + 1) \frac{x^2(2x^2 - x + 1)}{x^2} \geq 0.$$

$$\frac{x^2(x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1)}{x^2} \geq 0.$$

$$(x \geq 1).$$

Всегда.

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7

1, 2, 4, 5, 9, 8

for 6.61